II.TINJAUAN PUSTAKA

Dalam proses penelitian untuk mengkaji karakteristik pendugaan distribusi *generalized* weibull menggunakan metode *generalized* momen ini, penulis menggunakan definisi dan konsep dasar yang berkaitan dengan distribusi weibull, distribusi *generalized* weibull, pendugaan parameter dan metode *generalized* momen sebagai berikut:

2.1 Distribusi weibull

Distribusi Weibull diperkenalkan oleh seorang matematikawan yang bernama Wallodi Weibull. Distribusi Weibull sering digunakan dalam permodelan analisis kelangsungan hidup yang memiliki daerah fungsi peluang densitas positif dengan peubah acak kontinu. Distribusi Weibul memiliki dua parameter, yaitu:

β : Paramater skala yang menunjukan besarnya keragaman data distribusi weibull.

δ : Parameter bentuk

Definisi 2.1

Misalkan X adalah peubah acak dari distribusi Weibull dengan dua parameter, maka menurut Kundu dan Mangalick (2004), fungsi kepekatan peluang dari peubah acak weibull (β, δ) adalah sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\delta}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\delta-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\delta}} & ; x \geq 0, \delta > 0, \beta > 0 \\ 0 & ; lainnya \end{cases} \tag{2.1}$$

Fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Weibull didefinisikan sebagai:

$$F(x) = 1 - \exp[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\delta}] \tag{2.2}$$

Nilai harapan dari distribusi weibull adalah:

$$E(X) = \beta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \tag{2.3}$$

Ragam (*variance*) distribusi weibull adalah:

$$Var(X) = \beta^2\left\{\Gamma\left[1 + \left(\frac{2}{\delta}\right)\right] - \Gamma^2\left[1 + \left(\frac{1}{\delta}\right)\right]\right\} \tag{2.4}$$

(Kundu dan Mangalick, 2004)

Sub-bab selanjutnya akan membahas tentang distribusi *generalized* weibull yang merupakan perumuman dari distribusi Weibull dengan penambahan satu parameter lokasi.

2.2 Distribusi *Generalized* Weibull

Distribusi *Generalized* Weibull (*Generalized Weibull Distribution*) merupakan perluasan dari distribusi Weibull dengan menambahkan satu parameter lokasi, sehingga distribusi *generalized* weibull memiliki tiga parameter yaitu parameter lokasi, parameter skala dan parameter bentuk.

Definisi 2.2

Misalkan X adalah peubah acak dari distribusi *generalized* weibull dengan tiga parameter, maka menurut Jhonson dan Kotz (1970), fungsi kepekatan peluang dari peubah acak tersebut adalah

$$f(x) = \frac{\delta}{\beta}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^{\delta-1} e^{-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^{\delta}};\ \alpha < x < \infty, \alpha \geq 0, \beta > 0, \delta > 0 \qquad (2.5)$$

dengan

X : Peubah acak yang didefinisikan sebagai waktu gagal (*failure time*).

α : Parameter lokasi yang menunjukan lokasi waktu, dimana pada saat lokasi waktu tersebut belum ada objek pengamatan yang gagal maupun hilang.

β : Paramater skala yang menunjukan besarnya keragaman data distribusi weibull.

δ : Parameter bentuk

(Jhonson dan Kotz, 1970)

Subbab selanjutnya akan dibahas mengenai pendugaan parameter dengan metode *generalized* momen.

2.3 Pendugaan Parameter

Dalam statistika inferensial, dibutuhkan pemahaman mengenai kaidah-kaidah pengambilan kesimpulan tentang suatu parameter populasi berdasarkan karakteristik sampel. Hal ini membangun apa yang disebut dengan pendugaan titik dari suatu fungsi kepekatan peluang parameter yang tidak diketahui.

Definisi 2.3

Misal suatu peubah acak X memiliki fungsi kepekatan peluang yang bergantung pada suatu parameter tak diketahui θ dengan sebarang nilai dalam suatu himpunan ruang parameter Ω , maka dinotasikan dengan

$$f(x,\theta);\ \theta \in \Omega$$

(Hogg and Craig, 1995).

Selanjutnya akan dibahas mengenai definisi yang berkaitan dengan definisi sebelumnya.

Definisi 2.4

Misal *X1, X2, … , Xn* berdistribusi bebas stokastik identik dengan fungsi kepekatan peluang f(x,θ), θ∈ Ω . Suatu statistik *U*(*X1, X2, … , Xn*) = *U*(***X***) yang digunakan untuk menduga *g*(θ *)* disebut sebagai penduga bagi *g(θ)* (Hogg and Craig, 1995).

Selanjutnya akan dibahas mengenai pendugaan parameter dengan GMM.

2.4 Pendugaan Parameter dengan Metode *Generalized* Momen

Metode *Generalized Moment* merupakan bentuk pengembangan dan perumuman dari metode momen. Metode ini pertama kali diperkenalkan oleh Lars Petrus Hansen pada tahun 1982, dimana metode *Generalized Moment* ini digunakan untuk memperoleh penduga parameter dari model statistik. Metode tersebut telah banyak digunakan dalam bidang ekonomi dan seringkali diaplikasikan pada masalah keuangan. Metode *Generalized Moment* didasarkan pada kondisi momen populasi, yakni

$$E[f(v_t, \theta_0)] = 0 \tag{2.6}$$

Dengan θ_0 merupakan vektor dari parameter yang akan diduga, v_t merupakan vektor dari peubah acak, dan $f(.)$ merupakan suatu vektor fungsi (Hall,2009).

Untuk menduga parameter dari suatu distribusi, studi oleh Rasmussen (2001), dan oleh Askhar dan Mahdi (2003), menggunakan bentuk PWM:

$$M_{l,r} = E[X^l F^r] = \int_{-\infty}^{\infty} x^l [F(x)]^r f(x) dx$$

$$= \int_0^1 x^l [F(x)]^r \, dF \tag{2.7}$$

Dimana x adalah invers dari distribusi komulatif F(x), l merupakan momen ke-l dan r adalah statistik tataan ke- +1. $M_{l,r}$ ini bertindak sebagai suatu dasar untuk menerapkan metode *Generalized Momen,* r diambil sama dengan 0, dan l diambil sembarang yang tidak harus bilangan bulat, maupun positif (Ashkar dan Mahdi, 2006).

Berkaitan dengan pendugaan parameter menggunakan GMM, akan dijelaskan beberapa sifat penduga sebagai berikut:

Definisi 2.5 (Penduga Tak Bias)

Penduga *U(**X**)* dikatakan sebagai penduga tak bias bagi *g(* **θ** *)* jika

$$E(U(X)) = g(\theta) \quad , \qquad \forall \theta \in \Omega$$

(Hogg and Craig, 1995).

Selanjutnya akan dibahas definisi mengenai sifat penduga konsisten.

Definisi 2.6 (Penduga Konsisten)

Penduga *U(**X**)* dikatakan sebagai penduga konsisten bagi *g(* **θ** *)* jika

$U(\boldsymbol{X}) \xrightarrow{p} g(\boldsymbol{\theta})$ untuk n →∞, ∀ $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Omega}$ yaitu bila

$$P\{|U(\boldsymbol{X}) - g(\boldsymbol{\theta})| \geq \varepsilon\} = 0$$

Atau

$$P\{|U(\boldsymbol{X}) - g(\boldsymbol{\theta})| < \varepsilon\} = 1$$

(Hogg and Craig, 1995).

Berkaitan dengan pemeriksaan sifat penduga yang konsisten, digunakan teorema pendukung sebagai berikut:

Teorema 2.1 (Chebyshev's Inequality)

Misalkan X variabel acak dengan rata-rata μ dan ragam σ^2. Untuk $\forall\, \varepsilon > 0$,

$$P(|X-\mu| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

atau

$$P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

(Larsen dan Marx, 2012).

Teorema 2.2

Jika $U(\boldsymbol{X}) = U(X_1, X_2, \dots, X_n)$ merupakan rangkaian dari penduga suatu parameter θ, maka berlaku:

- $\lim_{n\to\infty} Var_\theta\, U(\boldsymbol{X}) = 0$
- $\lim_{n\to\infty} Bias\, U(\boldsymbol{X}) = 0$

Untuk $\forall\theta \in \Theta$, $U(\boldsymbol{X})$ merupakan rangkaian penduga konsisten dari suatu parameter θ (Casella and Berger, 2002).

Selanjutnya akan dibahas sifat penduga lainnya yaitu penduga varians minimum

Definisi 2.7 (Penduga Varians Minimum)

Misalkan $U(\boldsymbol{X})$ adalah penduga tak bias bagi $g(\boldsymbol{\theta})$, maka untuk sebarang penduga tak bias $U_1(\boldsymbol{X})$ bagi $g(\boldsymbol{\theta})$ disebut penduga varians minimum jika $Var\left(U(\boldsymbol{X})\right) \leq Var\ (U_1(\boldsymbol{X}))$ untuk setiap $\boldsymbol{\theta} \in \Omega$, dimana

$$Var\big(U_1(\boldsymbol{X})\big) \geq \frac{\left(\frac{\partial}{\partial\theta}g(\boldsymbol{\theta})\right)^2}{n\,.\,E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\theta})\right]^2}$$

(Bain and Engelhardt, 1992).

Berkaitan dengan sifat pendugaan varian minimum dibutuhkan beberapa faktor pendukung seperti informasi fisher, matriks informasi fisher dan pertidaksamaan cramer-rao bound atau cramer-rao lower bound.

Definisi 2.8 Informasi Fisher

Misalkan X variabel acak dengan fungsi kepekatan (p.d.f) f(x,θ), θ∈ Ω, *Information Fisher* dinotasikan dengan *I(θ)* , dimana

$$I(\theta) = E\left\{\left[\frac{\partial lnf(x;\theta)}{\partial\theta}\right]^2\right\}$$

Atau

$$I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2 lnf(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right]$$

(Hogg and Craig, 1995).

Berkaitan dengan informasi fisher tersebut, selanjutnya akan dibahas mengenai matriks informasi fisher.

Definisi 2.9 Matriks Informasi Fisher

Misalkan sampel acak X_1, X_2,…, X_n dari suatu distribusi dengan p.d.f. $f(x;\theta_1;\theta_2), (\theta_1,\theta_2)\epsilon\Omega$ dalam kondisi yang ada. Tanpa memperhatikan kondisi yang rinci, misalkan bahwa ruang dari X dimana $f(x;\theta_1;\theta_2) > 0$ yang tidak meliputi $\theta_1 dan\theta_2$, dan dapat diturunkan dibawah integralnya.

Sehingga matriks informasi fisher sebagai berikut:

$$I_n = -n\begin{bmatrix} E\left[\dfrac{\partial^2 lnf(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial{\theta_1}^2}\right] & E\dfrac{\partial^2 lnf(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1\partial\theta_2} \\ E\left[\dfrac{\partial^2 lnf(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\right] & E\left[\dfrac{\partial^2 lnf(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial{\theta_2}^2}\right] \end{bmatrix}$$

(Hogg and Craig, 1995).

Setelah informasi fisher dan matriks informasi fisher didapatkan, kemudian digabungkan kedalam pertidaksamaan cramer-rao bound atau cramer-rao lower bound seperti yang akan dijelaskan berikut ini.

Definisi 2.10 Pertidaksamaan Cramer-Rao Bound (CRB) atau Cramer-Rao Lower Bound (CRLB)

Menurut Elandt-Johnson (1971), ketidaksamaan Cramer-Rao Bound (CRB) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$Var(\hat{\theta}) \geq -\frac{1}{nE\left(\frac{\partial^2 in\, p}{\partial\theta^2}\right)} = -\frac{1}{E\left(\frac{\partial^2 in\, p}{\partial\theta^2}\right)}$$

Atau

$$Var(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial lnp}{\partial\theta}\right)^2\right]} = \frac{1}{E\left[\left(\frac{\partial lnp}{\partial\theta}\right)^2\right]}$$

Karena $-nE\left(\frac{\partial^2 in\, p}{\partial\theta^2}\right) = -E\left(\frac{\partial^2 in\, p}{\partial\theta^2}\right) = nE\left[\left(\frac{\partial lnp}{\partial\theta}\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{\partial lnp}{\partial\theta}\right)^2\right] = I(\theta)$

Maka $Var(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{I(\theta)}$

Dimana $\frac{1}{I(\theta)}$ disebut sebagai *Lower bound of the variance* dari penduga θ

Definisi 2.11

Misalkan Y merupakan penduga tak bias dari suatu parameter θ dalam kasus pendugaan titik. Statistic y disebut penduga efisien dari θ jika dan hanya jika ragam dari Y mencapai batas bawah Cramer- Rao (Hogg and Craig, 1995).

2.5 Matriks Varian dan Kovarian Asimtotik Menggunakan Metode *Generalized* Momen

Matrik varian dan kovarian asimtotik dari $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\beta}$ merupakan suatu sistim operasi penjumlahan varian dan kovarian dari momen sampel $\widehat{M}_{l_1,0}$ dan $\widehat{M}_{l_2,0}$. Sehingga bentuk umum matriks varian dan kovarian asimtotik menggunakan metode *generalized* momen adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} Var(\hat{\alpha}) \\ Var(\hat{\beta}) \\ Cov(\hat{\alpha},\hat{\beta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}^2 & M_{12}^2 & 2M_{11}M_{12} \\ M_{21}^2 & M_{22}^2 & 2M_{21}M_{22} \\ M_{11}M_{21} & M_{12}M_{22} & M_{11}M_{22}+M_{21}M_{12} \end{bmatrix}^{-1} x \begin{bmatrix} Var(\widehat{M}_{l_1,0}) \\ Var(\widehat{M}_{l_2,0}) \\ Cov(\widehat{M}_{l_1,0}\ \widehat{M}_{l_2,0}) \end{bmatrix}$$

Dimana:

- $M_{11} = \frac{\partial M_{l_1,0}}{\partial \alpha}$ $\quad M_{22} = \frac{\partial M_{l_2,0}}{\partial \beta}$
- $M_{12} = \frac{\partial M_{l_1,0}}{\partial \beta}$ $\quad Var(\widehat{M}_{l_1,0}) = \frac{\left(M_{2l_1,0} - M_{l_1,0}^2\right)}{n}$
- $M_{21} = \frac{\partial M_{l_2,0}}{\partial \alpha}$ $\quad Var(\widehat{M}_{l_2,0}) = \frac{\left(M_{2l_2,0} - M_{l_2,0}^2\right)}{n}$

- $Cov(\widehat{M}_{l_1,0}\ \widehat{M}_{l_2,0}) = \frac{\left(M_{l_1+l_2,0} - M_{l_1,0}\ M_{l_2,0}\right)}{n}$

(Askhar dan Mahdi, 2006)