II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan didiskusikan tentang istilah-istilah, teorema-teorema yang akan digunakan dalam penelitian ini.

2.1 Himpunan

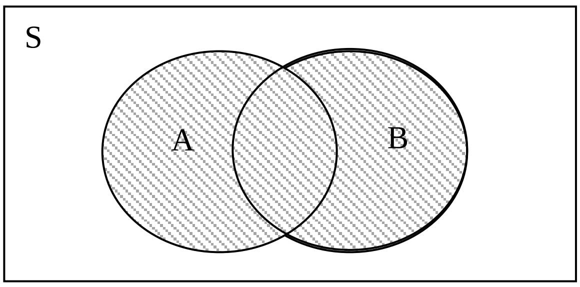
Himpunan adalah kumpulan objek-objek yang memiliki karakteristik tertentu (Wrede dan Spiegel, 2007).

Berikut ini akan diberikan beberapa operasi terhadap himpunan.

a. Gabungan dari dua himpunan A dan B, ditulis $A \cup B$, adalah

   $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$(Setiadji, 2009).

   Dalam diagram venn, $A \cup B$ dapat digambarkan sebagai daerah yang diarsir berikut :

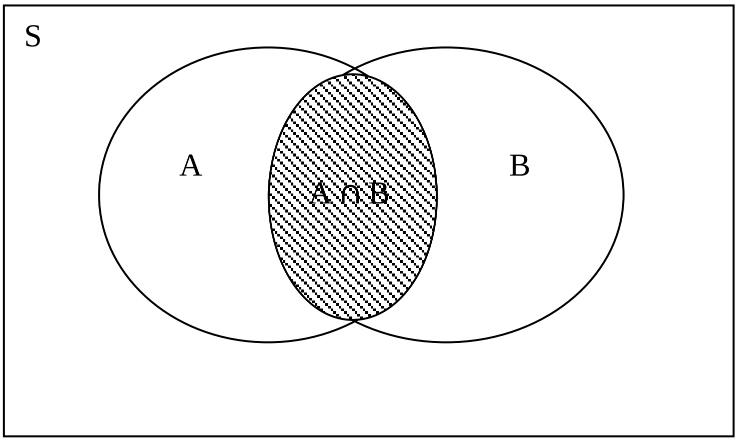


Gambar 1. Gabungan dari himpunan A dan B ($A \cup B$)

b. Irisan dari dua himpunan A dan B, ditulis $A \cap B$ adalah

   $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$(Setiadji, 2009).

Dalam diagram venn, $A \cap B$ dapat digambarkan sebagai berikut :

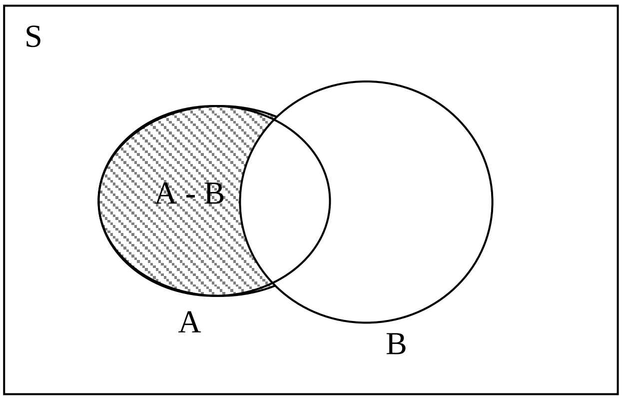


Gambar 2. Irisan dari himpunan A dan B ($A \cap B$)

c. Selisih dari dua himpunan A dan B, ditulis A – B adalah

$A - B = \{ x \mid x \in A, x \notin B\}$(Setiadji, 2009).

Dalam diagram venn A – B dapat digambarkan sebagai daerah yang diarsir sebagai berikut :



Gambar 3. Selisih dari himpunan A dan B (A – B)

2.2 Himpunan Konveks

Definisi 2.2.1. Himpunan C $\subseteq \mathbb{R}^n$ disebut konveks, jika untuk setiap $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2} \in$ C dan $0 \leq \lambda \leq 1$ berlaku $\lambda\, \mathbf{x_1} + (1 - \lambda)\, \mathbf{x_2} \in$ C (Schrijver, 2004).

Dari definisi tersebut, secara geometris C disebut konveks jika diambil sebarang dua titik $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2} \in$ C, maka segmen garis yang menghubungkan $\mathbf{x_1}$ dan $\mathbf{x_2}$ berada di C.

$\lambda\, \mathbf{x_1} + (1 - \lambda)\, \mathbf{x_2}$, dengan $0 \leq \lambda \leq 1$ merupakan suatu kombinasi konveks dari $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ (untuk suatu λ). Jadi suatu himpunan adalah konveks, jika setiap kombinasi konveks dari setiap dua titik dalam himpunan juga terdapat dalam himpunan tersebut (Hadley, 1992).

Berikut adalah contoh himpunan konveks dan himpunan tidak konveks.

a. himpunan konveks b. himpunan tidak konveks

Gambar 4. Contoh himpunan konveks dan himpunan tidak konveks

Pada gambar sebelah kiri (Gambar 4.a), semua kombinasi konveks dari $\mathbf{x_1}$ dan $\mathbf{x_2}$ berada di dalam C sehingga Gambar 4.a merupakan contoh himpunan konveks. Sedangkan, pada gambar sebelah kanan (Gambar 4.b), ada kombinasi dari $\mathbf{x_1}$ dan $\mathbf{x_2}$ yang berada di luar C sehingga Gambar 4.b adalah contoh himpunan tidak konveks.

Definisi 2.2.2. Titik **x** pada himpunan konveks C disebut titik ekstrim dari C jika tidak ada dua titik yang berbeda $\mathbf{x_1}$ dan $\mathbf{x_2}$ di C sedemikian sehingga

$\mathbf{x} = \lambda\, \mathbf{x_1} + (1 - \lambda)\, \mathbf{x_2}$, dengan $0 < \lambda < 1$ (Luenberger, 2007).

Dalam program linear, titik ekstrim berperan dalam menentukan nilai optimum suatu masalah.

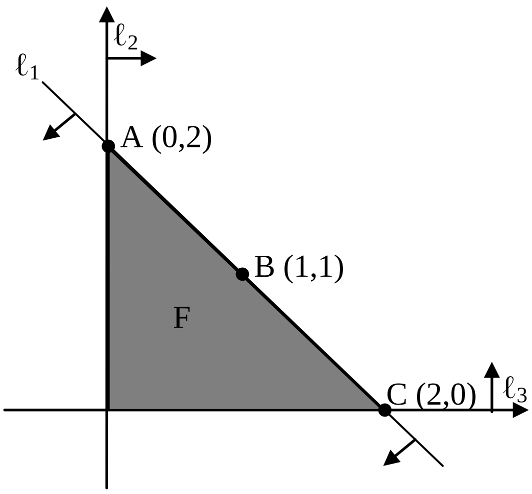
Contoh :

Misalkan F adalah himpunan konveks yang dibatasi oleh :

$\ell_1 : x_1 + x_2 \leq 2$

$\ell_2 : x_1 \geq 0$

$\ell_3 : x_2 \geq 0$



Gambar 5. Contoh titik ekstrim

Pada Gambar 5 titik A(0, 2) dan C(2, 0) merupakan contoh titik ekstrim, karena tidak ada dua titik yang berbeda yang membentuk kombinasi konveks yang menghasilkan titik A atau C. Sehingga, A dan C merupakan titik ekstrim. Sedangkan titik B (1, 1) bukan titik ekstrim, karena titik B dapat dihasilkan dari kombinasi konveks titik A dan C sebagai berikut : $(1, 1) = \lambda\,(0, 2) + (1 - \lambda)\,(2, 0)$; dengan $\lambda = \frac{1}{2}$.

Definisi 2.2.3 Misalkan *S* adalah himpunan bagian dari $\mathbb{R}^n$. *Convex hull* dari *S* yang dinotasikan *Co(S)* adalah himpunan yang terdiri dari irisan dari semua himpunan konveks yang memuat *S* (Luenberger, 2007).

Contoh:

Misalkan himpunan $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, maka

Co(A) $= \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ (Hadley, 1992).

Co(A) merupakan keliling dan titik-titik dalam lingkaran pada himpunan A. Karena *Co(A)* merupakan himpunan konveks terkecil yang memuat keliling pada lingkaran, maka *Co(A)* adalah *convex hull* pada himpunan A.

Definisi 2.2.4. Misal **a** bukan vektor nol di $\mathbb{R}^n$ dan misal c adalah bilangan rill, *hyperplane* didefinisikan sebagai $\mathbf{H} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}^T\mathbf{x} = c\}$.

Positif *closed half spaces* $\mathbf{H}_+ = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}^T\mathbf{x} \geq c\}$

Negatif *closed half spaces* $\mathbf{H}_- = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq c\}$

Positif *open half spaces* $\mathbf{H}_+ = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}^T\mathbf{x} > c\}$

Negatif *open half spaces* $\mathbf{H}_- = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}^T\mathbf{x} < c\}$ (Luenberger, 2007).

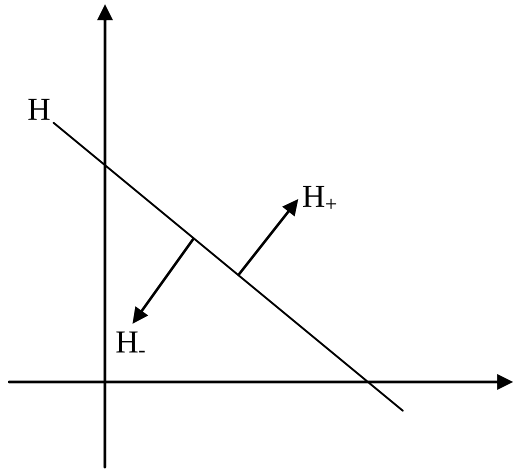
Contoh :

Positif dan negatif *closed half spaces*.

$H : \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 1\}$

$H_+ : \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 \geq 1\}$

$H_- : \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 \leq 1\}$



Gambar 6. Contoh positif dan negatif *closed half spaces*

Pada Gambar 6 apabila segmen garis pada persamaan $x_1 + x_2 = 1$ tidak diikut sertakan maka akan menjadi positif dan negatif *open half spaces.*

Definisi 2.2.5. Irisan dari himpunan berhingga dari *closed half spaces* disebut *convex polytope* (Luenberger, 2007).

Contoh :

Misalkan P adalah *polytope* yang dibatasi oleh :

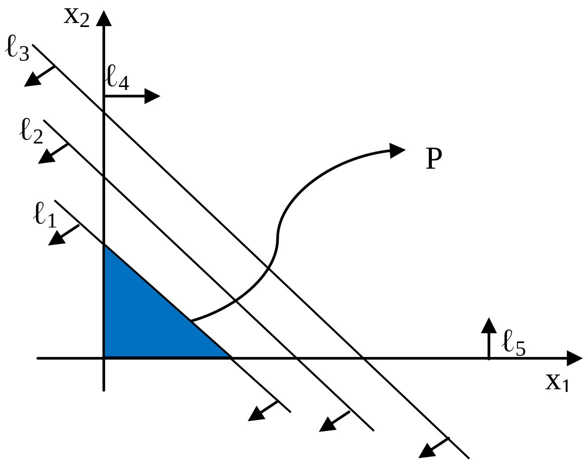
$\ell_1 : \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 \leq 1\}$

$\ell_2 : \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 \leq 2\}$

$\ell_3 : \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 \leq 3\}$

$\ell_4 : x_1 \geq 0$

$\ell_5 : x_2 \geq 0$



Gambar 7. Contoh *convex polytope*

Pada Gambar 7 daerah P merupakan contoh *convex polytope*, karena P terbentuk dari irisan dari himpunan berhingga dari *closed half spaces* yaitu ℓ_1, ℓ_2, dan ℓ_3 yang merupakan positif *closed half spaces*, sedangkan ℓ_4 dan ℓ_5 adalah negatif *closed half spaces.*

Definisi 2.2.6. *Polyhedron* $P \subseteq \mathbb{R}^n$ merupakan himpunan titik dari pertidaksamaan linear, $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, dengan *(A,b)* adalah matrik m x (n + 1) (Nemhauser dan Wolsey, 1998).

Contoh :

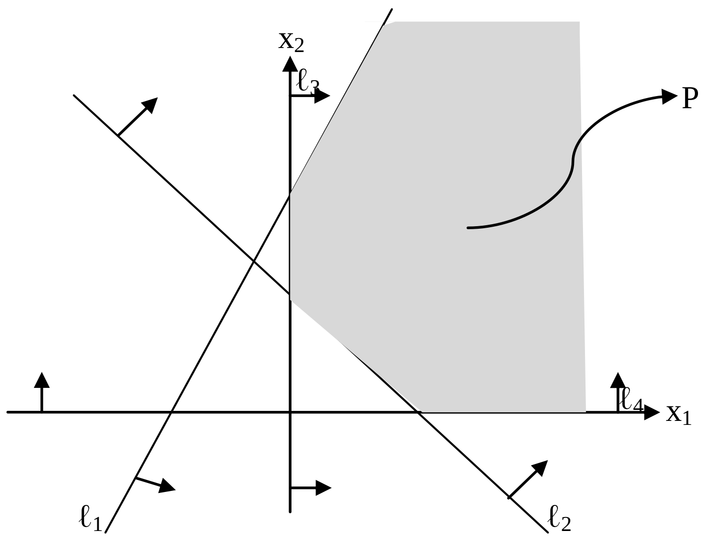
Misalkan P adalah polihedron yang dibatasi oleh

$\ell_1 : -2x_1 + x_2 \leq 4$

$\ell_2 : x_1 + x_2 \geq 2$

$\ell_3 : x_1 \geq 0$

$\ell_4 : x_2 \geq 0$

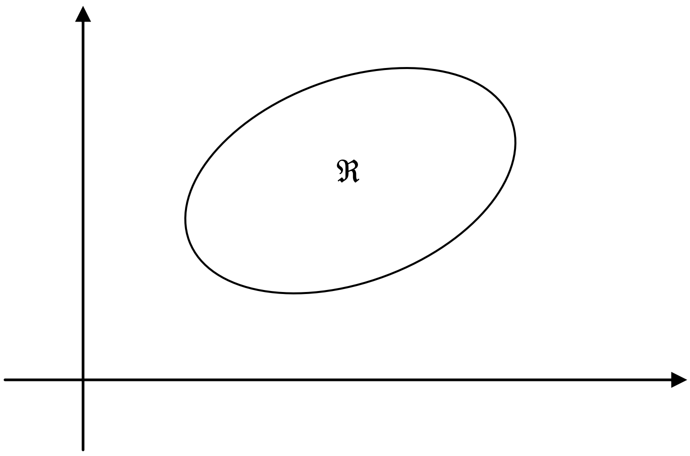


Gambar 8. Contoh polihedron

2.3 Daerah Tidak Terhubung Sederhana

Sebarang kurva tertutup yang terletak dalam $\Re$ yang dapat disusutkan secara kontinu hingga menjadi titik tanpa meninggalkan $\Re$ disebut daerah terhubung sederhana (Wrede dan Spiegel, 2007).

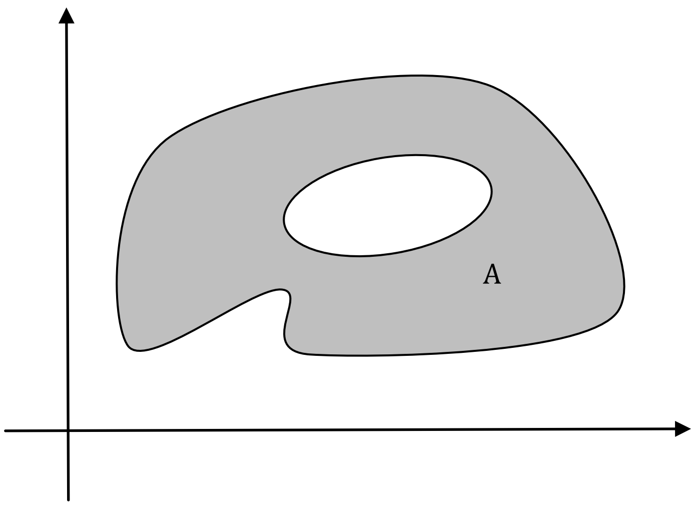
Berikut adalah contoh daerah terhubung sederhana.



Gambar 9. Contoh daerah terhubung sederhana

Daerah A pada Gambar 10 merupakan daerah tidak terhubung sederhana karena setiap kurva tertutup yang terletak dalam A tidak dapat disusutkan menjadi satu titik tanpa meninggalkan A (Wrede dan Spiegel, 2007).

Berikut adalah contoh daerah yang tidak terhubung sederhana.



Gambar 10. Contoh daerah yang tidak terhubung sederhana

2.4 Fungsi Konveks

Adapun definisi dan contoh dari fungsi konveks adalah sebagai berikut :

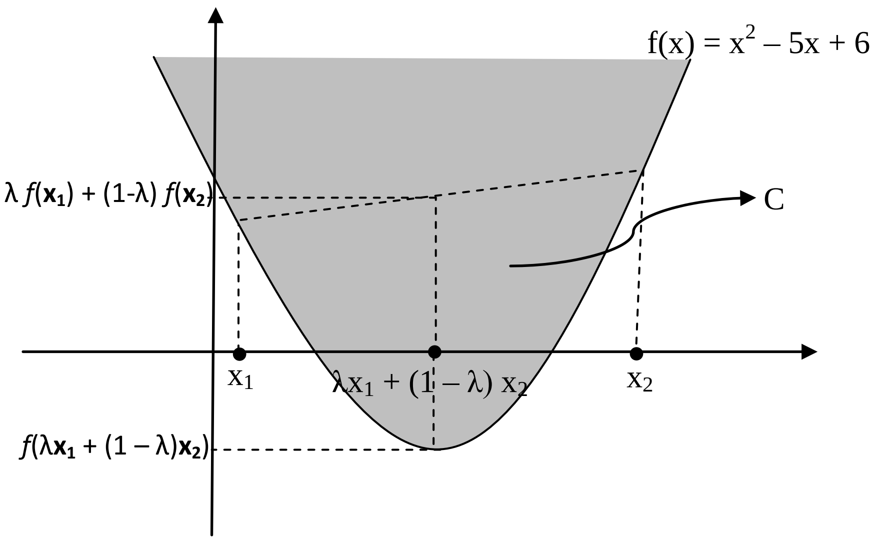
Definisi 2.4.1. Fungsi *f* didefinisikan dalam himpunan konveks C disebut konveks jika untuk setiap $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in C$ dan $0 \leq \lambda \leq 1$, maka

$f(\lambda \mathbf{x_1} + (1 - \lambda)\mathbf{x_2}) \leq \lambda f(\mathbf{x_1}) + (1-\lambda) f(\mathbf{x_2})$.

Jika $0 < \lambda < 1$ dan $\mathbf{x_1} \neq \mathbf{x_2}$, $f(\lambda \mathbf{x_1} + (1 - \lambda)\mathbf{x_2}) < \lambda f(\mathbf{x_1}) + (1-\lambda) f(\mathbf{x_2})$ maka *f* disebut *strictly convex* (Luenberger, 2007).

Contoh:

$f(x) = x^2 - 5x + 6$ adalah fungsi konveks.



Gambar 11. Contoh fungsi konveks

Pada Gambar 11 daerah yang diarsir merupakan daerah himpunan konveks C, sehingga untuk setiap $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in C$ dengan $0 \leq \lambda \leq 1$ berlaku $f(\lambda \mathbf{x_1} + (1 - \lambda)\mathbf{x_2}) \leq \lambda f(\mathbf{x_1}) + (1-\lambda) f(\mathbf{x_2})$, sehingga $f(x) = x^2 - 5x + 6$ adalah fungsi konveks.