BILANGAN KROMATIK LOKASI AMALGAMASI GRAF LENGKAP DAN BARBELNYA

(Tesis)

Oleh

AMANAH YULIANTI
2127031008

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

ABSTRAK

BILANGAN KROMATIK LOKASI AMALGAMASI GRAF LENGKAP DAN BARBELNYA

Oleh

AMANAH YULIANTI

Amalgamasi dari $a \geq 2$ buah graf lengkap (K_n, $n \geq 3$) dinotasikan dengan aK_n diperoleh dengan cara menyatukan satu titik dari setiap graf lengkap K_n. Graf barbel dari amalgamasi graf lengkap adalah graf sederhana yang dibentuk dengan menghubungkan dua tiruan amalgamasi graf lengkap (aK_n) oleh suatu sisi, dinotasikan dengan $B(aK_n)$. Pada penelitian ini dibahas tentang bilangan kromatik lokasi amalgamasi graf lengkap dan barbelnya untuk $2 \leq a \leq 6$, $n \geq 3$.

Kata kunci: bilangan kromatik lokasi, amalgamasi graf lengkap, graf barbel

ABSTRACT

THE LOCATING CHROMATIC NUMBER OF AMALGAMATION OF COMPLETE GRAPHS AND ITS BARBELL

By

AMANAH YULIANTI

The amalgamation of $a \geq 2$ complete graphs (K_n, $n \geq 3$) denoted by aK_n is obtained by identifying one vertex from each complete graph. A barbell graph for amalgamation of complete graph is a simple graph formed by connecting two copies of the amalgamation of complete graph with an edge, denoted by $B(aK_n)$. In this research, we discuss the locating chromatic number of amalgamation of complete graph and its barbell for $2 \leq a \leq 6$ and $n \geq 3$.

Key words: locating chromatic number, the amalgamation of complete graph, barbell graph

BILANGAN KROMATIK LOKASI AMALAGAMASI GRAF LENGKAP DAN BARBELNYA

Oleh

AMANAH YULIANTI

Tesis

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar MAGISTER MATEMATIKA

Pada

Program Studi Magister Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

Judul Tesis	: **BILANGAN KROMATIK LOKASI AMALGAMASI GRAF LENGKAP DAN BARBELNYA**
Nama Mahasiswa	: **Amanah Yulianti**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **2127031008**
Program Studi	: **Magister Matematika**
Jurusan	: **Matematika**
Fakultas	: **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.	**Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.**
NIP. 19760411 200012 2 001	NIP. 19731109 200012 2 001

2. Ketua Program Studi Magister Matematika

Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.
NIP. 19760411 200012 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.**	....
Sekretaris	: **Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **1. Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.**	....
	2. Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 19711001 200501 1 002

3. Direktur Program Pascasarjana

Prof. Dr. Ir. Murhadi, M.Si.
NIP. 19640326 198902 1 001

4. Tanggal Lulus Ujian Tesis: **20 Oktober 2023**

PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama Mahasiswa	: Amanah Yulianti
Nomor Pokok Mahasiswa	: 2127031008
Program Studi	: Magister Matematika
Jurusan	: Matematika

Dengan ini menyatakan bahwa tesis saya yang berjudul, **"BILANGAN KROMATIK LOKASI AMALAGAMASI GRAF LENGKAP DAN BARBELNYA"** adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Semua tulisan yang tertuang dalam tesis ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa tesis ini merupakan salinan atau telah dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 23 Oktober 2023

Penulis,

AMANAH YULIANTI

NPM. 2127031008

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Amanah Yulianti lahir di Ogan komering Ulu Timur tepatnya di Bangun Sari pada tanggal 02 Juli 1987. Penulis merupakan anak pertama dari tiga bersaudara dari pasangan Almarhum Bapak Khotiman dan Ibu Suprihatin.

Penulis memulai pendidikan di Taman Kanak-Kanak (TK) Bunga Bangsa Sumber Agung Ogan Komering Ulu Timur pada tahun 1991 sampai dengan 1993. Kemudian menempuh pendidikan Sekolah Dasar (SD) di SD Negeri 1 Tanjung Mas Ogan Komering Ulu Timur pada tahun 1993 sampai dengan 1999. Kemudian melanjutkan ke Madrasah Tsanawiyah Negeri (MTsN) Denanyar Jombang Jawa Timur pada tahun 1999 sampai dengan 2002. Selanjutnya ke Madrasah Aliyah Negeri (MAN) Denanyar Jombang Jawa Timur pada tahun 2002 sampai dengan 2005. Pada tahun 2005, penulis melanjutkan pendidikan di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan lulus tahun 2010.

Pada tahun 2021 penulis terdaftar sebagai mahasiswa Program Studi Magister Matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

KATA INSPIRASI

"Awali setiap melakukan aktivitas dengan bismillah dan dengan penuh keikhlasan agar apa yang kita kerjakan menjadi berkah."

(Suprihatin)

"Sesungguhnya setiap langkah kita menuju sesuatu yang diharapkan dalam mewujudkan cita-cita dan impian tidaklah mudah, ada berbagai macam cobaan yang mendera, namun dengan rasa ***Syukur*** *semua itu akan terasa indah dan menyenangkan. Begitu juga dengan kehidupan yang terus berjalan, hadapi saja segala sesuatunya dengan kesabaran, keyakinan dan senyuman, Tuhan akan selalu menunjukkan jalannya selagi kita mau berusaha, karena sesuatu itu datangnya dari Tuhan dan akan kembali pula padaNya, seperti loop pada graf yang sisinya diibaratkan sebagai perjalanan hidup."*

(Amanah Yulianti)

"Dialah yang menghidupkan dan mematikan, maka apabila Dia menetapkan sesuatu urusan, Dia hanya bekata kepadanya: "Jadilah", maka jadilah ia."

(Q.S Ghafir: 68)

"Terus belajar dan memperbaiki diri."

(Motto hidup)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap Alhamdulilah dan syukur kepada Allah SWT atas nikmat serta hidayahnya sehingga tesis ini dapat terselesaikan dengan baik. Rasa syukur dan bahagia saya persembahkan karya ini kepada:

Ibu Suprihatin

Terima kasih atas segala pengorbanan, motivasi, do'a dan ridho serta dukungannya selama ini. Terima kasih telah memberikan pelajaran berharga tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa manjadi orang yang bermanfaat bagi semua orang dan menjadi berkah.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terima kasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Keluarga dan Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta do'a-doa'nya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Segala puji dan syukur penulis ucapkan kepada Allah SWT atas segala nikmat dan karunia-Nya yang tak terhingga sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul **"BILANGAN KROMATIK LOKASI AMALGAMASI GRAF LENGKAP DAN BARBELNYA"**. Dalam penulisan tesis ini tidak dapat terselesaikan tanpa adanya bimbingan, bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Sehingga, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing I, dosen pembimbing akademik, dan Ketua Program Studi Magister Matematika yang senantiasa membimbing, memberi masukan, saran serta mendukung penulis dalam menyelesaikan tesis ini.
2. Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, pengarahan, serta saran sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini.
3. Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku dosen pembahas 1 dan Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun sehingga tesis ini dapat terselesaikan.
4. Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku dosen pembahas 2 yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun sehingga tesis ini dapat terselesaikan.
5. Bapak Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Seluruh dosen dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.

7. Orang tua penulis, Ibu Suprihatin yang selalu mendukung, menemani, memberikan motivasi, mendoakan, serta memberikan semangat yang tak henti-hentinya sehingga menguatkan penulis dalam menjalani setiap proses meraih gelar magister.
8. Diri sendiri yang telah berjuang, berproses, dan bertahan hingga dapat menyelesaikan tesis ini.
9. Untuk keluarga besar penulis, Aryan, Ayyubi, dek Ami, dek Ari, dek Kifti, mas Ari, mama Siti Nasirotun, Ayah Rusdiansyah, Wulan, Dita, Robin, Fadhil yang selalu memberikan dukungan serta do'a-do'anya dengan tulus.
10. Keluarga besar MTs Ma'arif Bumi Baru terutama Bapak Tumpuk Prio Susanto, S.Pd. selaku Kepala Madrasah yang telah memberikan izin selama perkuliahan dan juga segenap Dewan Guru yang telah membantu mengkondisikan Kegiatan Belajar Mengajar di Madrasah agar tetap berjalan dengan lancar selama penulis menjalani masa perkuliahan, dan juga keluarga besar MI Ma'arif Bumi Baru terimakasih atas dukungan dan do'a-do'anya.
11. Wenty Okzarima, Desiana Putri, Wardhani Utami dewi, Indah Suciati, Dira Dini Dian Kemala, Saiful Rohman, Marchel Reniers, Miftahul Irfan, Juanda, Adji, Ari Rahayu, adekku Lidwina Amelia, mas Agus Budiono, rekan-rekan program magister matematika Angkatan 2022 atas canda dan tawa yang telah membuat hidup penulis lebih berwarna. Suatu kebahagiaan dapat menjalani program magister bersama rekan-rekan.
12. Sahabat-sahabatku Indah Resti Ayuni Suri dan keluarga, Arum Sekar Buana, Aditya Pradito, Tri Utomo, Novian Riskiana Dewi, M. Nafi' Jauhari Ulin Nuha. Semoga selalu sehat dan mendapatkan kebaikan atas ketulusan yang kalian berikan.
13. Orang-orang baik yang namanya tidak bisa saya sebutkan satu persatu yang telah menjadi bagian teman terbaik penulis yang selalu memberikan semangat, pengalaman dan banyak cerita selama masa perkuliahan.
14. Almamater tercinta Universitas Lampung.

Penulis menyadari bahwa masih banyak kekurangan dalam penulisan tesis ini. Oleh karena itu, penulis mengharapkan masukan serta saran untuk dijadikan pelajaran kedepannya. Semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi penulis khususnya dan bagi pembaca pada umumya. Terima kasih.

Bandar lampung, 23 Oktober 2023

Penulis

Amanah Yulianti
NPM. 2127031008

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR vii

I. PENDAHULUAN **1**

1.1 Latar Belakang Masalah 1
1.2 Tujuan Penelitian 4
1.3 Manfaat Penelitian 4

II. TINJAUAN PUSTAKA **5**

2.1 Konsep Dasar Graf 5
2.2 Graf Lengkap dan Graf Barbel 7
2.3 Amalgamasi Graf Lengkap 8
2.4 Bilangan Kromatik Lokasi Graf 9

III. METODOLOGI PENELITIAN **12**

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian 12
3.2 Metode Penelitian 12

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN **14**

4.1 Bilangan Kromatik Lokasi Amalgamasi Graf Lengkap 14
4.2 Bilangan Kromatik Lokasi Graf Barbel dari Amalgamasi
Graf Lengkap 38

V. KESIMPULAN DAN SARAN **81**

5.1 Kesimpulan 81
5.2 Saran 82

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

1. Representasi graf untuk masalah pada kasus jembatan Konigsberg 5
2. Contoh graf G dengan 6 titik dan 8 sisi 6
3. Graf lengkap K_4 dan K_5 7
4. Contoh graf barbel dari graf lengkap $B(K_4)$ 7
5. (a) Contoh amalgamasi graf lengkap $2K_4$, dan
   (b) Contoh amalgamasi graf lengkap $3K_3$.. 8
6. Contoh graf barbel dari amalgamasi graf lengkap $B(2K_4)$........................ 8
7. Pewarnaan lokasi minimum pada G dengan $\chi_L(G) = 4$ 10
8. Contoh pewarnaan lokasi minimum pada K_5 11
9. Amalgamasi graf lengkap $2K_3$ 12
10. Contoh pewarnaan lokasi minimum pada $2K_3$ 15
11. Amalgamasi graf lengkap $2K_4$ 16
12. Contoh pewarnaan lokasi minimum pada $2K_4$ 16
13. Amalgamasi graf lengkap $3K_3$ 17
14. Contoh pewarnaan lokasi minimum pada $3K_3$ 18
15. Amalgamasi graf lengkap $3K_5$ 18
16. Contoh pewarnaan lokasi minimum pada $3K_5$ 19
17. Amalgamasi graf lengkap $4K_4$ 21
18. Contoh pewarnaan lokasi minimum pada $4K_4$ 22
19. Amalgamasi graf lengkap $4K_5$ 23
20. Contoh pewarnaan lokasi minimum pada $4K_5$ 23
21. Amalgamasi graf lengkap $5K_5$ 26
22. Contoh pewarnaan lokasi minimum pada $5K_5$ 27
23. Contoh pewarnaan lokasi minimum pada $5K_3$ 30

24. Contoh pewarnaan lokasi minimum pada $5K_4$ 31
25. Amalgamasi graf lengkap $6K_6$ 31
26. Contoh pewarnaan lokasi minimum pada $6K_6$ 32
27. Contoh pewarnaan lokasi minimum pada $6K_4$ 37
28. Contoh pewarnaan lokasi minimum pada $6K_5$ 37
29. Amalgamasi graf lengkap $B(2K_3)$ 38
30. Contoh pewarnaan lokasi minimum pada$2K_3$ 38
31. Amalgamasi graf lengkap $B(2K_4)$ 39
32. Contoh pewarnaan lokasi minimum pada $B(2K_4)$ 39
33. Amalgamasi graf lengkap $B(2K_5)$ 41
34. Contoh pewarnaan lokasi minimum pada $B(2K_5)$ 41
35. Amalgamasi graf lengkap $B(3K_5)$ 44
36. Contoh pewarnaan lokasi minimum pada $B(3K_5)$ 44
37. Contoh pewarnaan lokasi minimum pada $B(3K_3)$ 48
38. Contoh pewarnaan lokasi minimum pada $B(3K_4)$ 48
39. Contoh pewarnaan lokasi minimum pada $B(4K_7)$ 54
40. Contoh pewarnaan lokasi minimum pada $B(6K_4)$ 80
41. Contoh pewarnaan lokasi minimum pada $B(6K_5)$ 80

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf merupakan pokok bahasan yang mendapat banyak perhatian karena model-modelnya sangat berguna untuk diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari seperti halnya digunakan dalam sistem keamanan informasi dan penjadwalan. Graf merupakan kumpulan objek terstruktur dimana beberapa pasangan objeknya memiliki hubungan atau keterkaitan tertentu. Seorang matematikawan asal Swiss bernama Leonhard Euler diperkirakan sebagai orang yang pertama kali menulis artikel ilmiah di bidang teori graf pada tahun 1736. Artikel berjudul "*Seven Bridge of Konigsberg*" yang ditulisnya membahas permasalahan ada atau tidaknya struktur (saat ini dikenal dengan sirkuit Euler) pada graf yang terbentuk dari keterhubungan daratan kota Konigsberg dan pulau kecil di tengah sungai Pregal yang dihubungkan oleh tujuh jembatan.

Salah satu konsep teori graf yang umum dikenal adalah konsep pewarnaan graf. Teori graf juga banyak dipakai pada bidang terapan seperti kajian mengenai bilangan kromatik lokasi dari suatu graf. Pembahasan mengenai bilangan kromatik lokasi merupakan salah satu topik yang menarik untuk dipelajari dalam teori graf. Munculnya konsep bilangan kromatik lokasi merupakan pengembangan dari konsep dimensi partisi dan pewarnaan titik. Dimensi partisi merupakan pengembangan dari dimensi metrik. Konsep dimensi metrik pertama kali dicetuskan oleh Slater pada tahun 1975 dan dikembangkan oleh Melter dan Harary pada tahun 1976. Dimensi metrik adalah banyak anggota minimum dari himpunan pembeda dari representasi suatu titik terhadap jarak-jaraknya (Chartrand, 1998).

Dimensi partisi untuk titik bertetangga dapat diwarnai dengan warna yang sama atau dapat dikelompokkan ke dalam partisi yang sama. Kemudian diberikan syarat dalam pewarnaan titik, yaitu untuk dua titik yang saling bertetangga (*adjacent*) tidak dapat diberikan warna yang sama. Oleh karena itu, konsep dimensi partisi dalam himpunan pembeda yang diberikan syarat pewarnaan titik pada graf akan menghasilkan konsep bilangan kromatik lokasi.

Konsep bilangan kromatik lokasi diperkenalkan oleh Chartrand dkk., pada tahun 2002. Bilangan kromatik lokasi ditentukan berdasarkan banyaknya minimum warna yang digunakan dalam perwarnaan lokasi dengan kode warna yang berbeda untuk setiap titik pada graf tersebut. Bilangan kromatik lokasi dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Chartrand dkk (2002) telah mendapatkan bilangan kromatik lokasi dari beberapa graf, diantaranya pada graf lintasan, graf lingkaran dan graf bintang ganda.

Pembahasan mengenai bilangan kromatik lokasi telah banyak dipelajari. Chartrand dkk. (2003), berhasil mengkonstruksi graf pohon berorde $n \geq 5$ dengan bilangan kromatik lokasi yang bervariasi dari 3 sampai (n-1). Pada tahun 2011, Asmiati dkk., telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi amalgamasi pada graf bintang seragam $S_{k,m}$ dan tak seragam $S_{k,(n_{1,\dots,}n_k)}$ untuk $k \geq 2$.

Penelitian terkait topik bilangan kromatik lokasi pada teori graf semakin berkembang, diantaranya pada tahun 2013, Sofyan dkk. menemukan bilangan kromatik lokasi graf lobster yang homogen, selanjutnya Welyyanti dkk. (2013) memperoleh bilangan kromatik lokasi untuk pohon n – arry lengkap, kemudian Baskoro dan Asmiati (2013) berhasil mengkarakterisasi semua pohon dengan bilangan kromatik lokasi gabungan litasan, lingkaran dan graf lengkap multipartite. Pada tahun 2014, Asmiati mendapatkan bilangan kromatik lokasi pada graf amalgamasi bintang tak homogen, dan Welyyanti dkk. (2014) menemukan bilangan kromatik lokasi dari hutan linier yang seragam, yang disebut *disjoint union* dari beberapa lintasan dengan Panjang yang sama. Pada tahun 2015, Wellyanti dkk. memberikan batas atas untuk bilangan kromatik lokasi graf terhubung dimana setiap komponen memuat satu titik dominan.

Pada tahun 2016, Asmiati dkk. berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi graf ulat dan graf kembang api, dan Bahtoei dkk. (2016) juga berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi hasil kali Cartesian dari lintasan dan graf lengkap. Pada tahun 2017, Asmiati berhasil mengkaji bilangan kromatik lokasi amalgamasi bintang tertentu $nS_{k,m}$ untuk $k, m \geq 2, k \leq m$ dengan n, k, m bilangan asli adalah $(m + 1)$ jika $1 \leq n \leq |\frac{m}{k-1}|$ dan $(m + 2)$ untuk $n \leq |\frac{m}{k-1}|$. Asmiati dkk. (2018), juga berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi graf barbel $B_{n,n}$ untuk $n \geq 3$, dimana graf barbel $B_{n,n}$ memuat dua graf isomorfik dari graf lengkap K_n. Kemudian Asmiati dkk. berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi *disjoint union* dari beberapa graf bintang ganda, pada tahun 2019.

Pada tahun 2021, Irawan dkk., berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi dari barbel graf origami untuk $n \geq 3$. Pada tahun yang sama, Damayanti dkk., berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi lintasan yang dimodifikasi dengan siklus, Prawinasti dkk. (2021) berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf split Siklus, serta Asmiati dkk. (2021) berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf *shadow path* dan graf barbel yang memuat graf *shadow path*.

Sejauh penelusuran literatur, belum ada kajian mengenai bilangan kromatik lokasi amalgamasi graf lengkap. Amalgamasi merupakan sebuah operasi graf dengan pasangan titik graf (G, u) dan (H, v) yang diperoleh dengan menggabungkan titik u dan v menjadi satu titik. Pada penelitian ini akan dikaji bilangan kromatik lokasi amalgamasi graf lengkap dan graf barbel dari graf tersebut.

1.2. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Menentukan bilangan kromatik lokasi amalgamasi graf lengkap;
2. Menentukan bilangan kromatik lokasi graf barbel dari amalgamasi graf lengkap.

1.3. Manfaat Penelitian

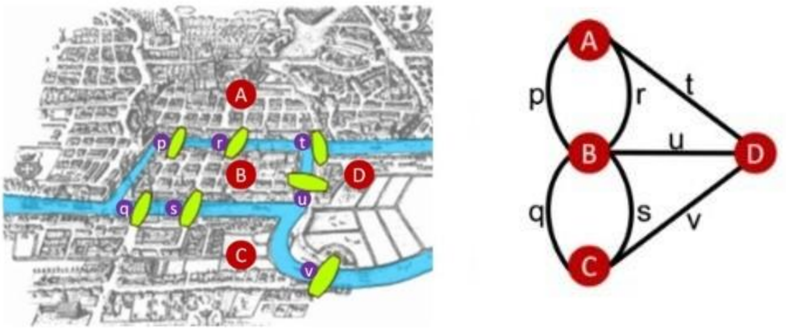
Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Memberi pemahaman dan wawasan tentang teori graf terutama tentang bilangan kromatik lokasi amalgamasi graf lengkap dan graf barbel dari amalgamasi graf lengkap;
2. Sebagai bahan referensi untuk penelitian selanjutnya mengenai bilangan kromatik lokasi dari suatu graf.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

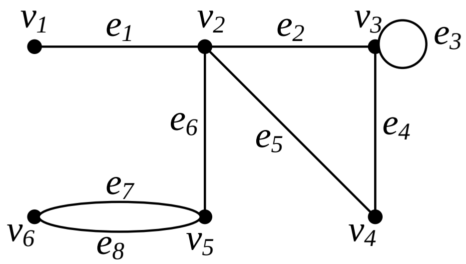
Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 untuk membuktikan bahwa tidak mungkin melintasi sebuah jembatan tepat satu kali di empat kota di Konisberg, Rusia, yang dihubungkan oleh tujuh jembatan di atas Sungai Pregel. Masalah ini disajikan dalam bentuk gambar yang dikenal sebagai representasi graf, dimana titik menyatakan suatu wilayah dan sisi menyatakan jembatan yang menghubungkan dua wilayah. Dalam bahasan ini, representasi graf Euler dapat digunakan untuk membuktikan bahwa tidak mungkin melintasi setiap jembatan tepat satu kali dan kembali ke posisi semula (Sugeng dkk., 2014).



Gambar 2.1 Representasi Graf untuk Masalah Perjalanan Melintasi Jembatan Konigsberg
(sumber: https://journal.unram.ac.id/index.php/pepadu/index)

Beberapa konsep dasar yang digunakan dalam penelitian ini diambil dari (Deo, 1989). Suatu graf adalah himpunan terurut $(V(G), E(G))$, dengan $V(G)$

menyatakan himpunan titik atau *vertex* $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ dari G dengan $V(G) \neq \emptyset$ dan $E(G)$ menyatakan himpunan sisi atau *edge* $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ adalah pasangan tak terurut dari titik-titik di $V(G)$. Banyaknya himpunan titik $V(G)$ disebut dengan orde dari graf. Jika titik v_1 dan v_2 dihubungkan oleh sisi e, maka v_1 dan v_2 dikatakan menempel (*incident*) pada sisi e, dan v_1 dikatakan bertetangga dengan v_2 (*adjacent*). Himpunan tetangga dari suatu titik v, dinotasikan dengan $N(v)$, adalah himpunan titik-titik yang bertetangga dengan v.



Gambar 2.2 Contoh graf G dengan 6 titik dan 8 sisi

Pada Gambar 2.2, merupakan graf $G(V, E)$ dengan himpunan titik $V(G) = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ dan himpunan sisi $E(G) = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8)$. Sedangkan v_1 dan v_2 menempel dengan e_1. Sebaliknya e_1 menempel pada titik v_1 dan titik v_2. Himpunan tetangga dari v_2 adalah $N(v_2) = (v_1, , v_3, v_4, v_5)$.

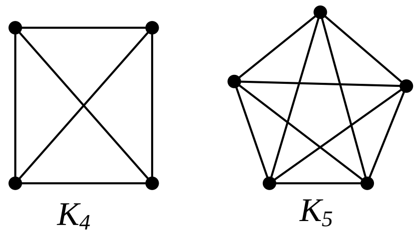
Derajat suatu titik v pada graf G adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik v, dinotasikan denga $d(v)$. Daun adalah titik yang berderajat satu. Derajat masing-masing titik pada Gambar 2.2 adalah $d(v_1) = 1, d(v_2) = 4, d(v_3) = 4, d(v_4) = 2, d(v_5) = 3, d(v_6) = 2$.

Loop adalah sisi yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama, sedangkan sisi paralel atau *multi edges* adalah beberapa sisi yang memiliki dua titik ujung yang sama. Graf yang tidak memiliki sisi paralel atau *loop* disebut graf sederhana. Pada Gambar 2.2 bukan merupakan graf sederhana karena memiliki *loop* yang terdapat pada titik v_3 yaitu e_3 dan sisi paralel yaitu e_7 dan e_8.

Jalan (*walk*) adalah barisan berhingga dari titik dan sisi yang dimulai dan diakhiri dengan titik sedemikian sehingga setiap sisi menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya. Contoh jalan berdasarkan Gambar 2.2 adalah $v_4 - e_4 - v_3 - e_3 - v_3 - e_2 - v_2 - e_1 - v_1$. Lintasan (*path*) adalah jalan yang melewati titik yang berbeda-beda dimana titik-titik yang dilewati tepat satu kali pada suatu graf. Contoh lintasan berdasarkan Gambar 2.2 adalah $v_1 - e_1 - v_2 - e_5 - v_4$.

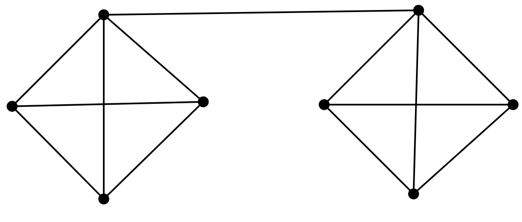
2.2 Graf Lengkap dan Graf Barbel

Graf lengkap adalah graf yang memiliki n titik yang mana setiap titiknya saling bertetangga. Graf lengkap dengan n titik dinotasikan dengan K_n. Setiap titik pada K_n berderajat $n - 1$.



Gambar 2.3 Graf lengkap K_4 dan K_5

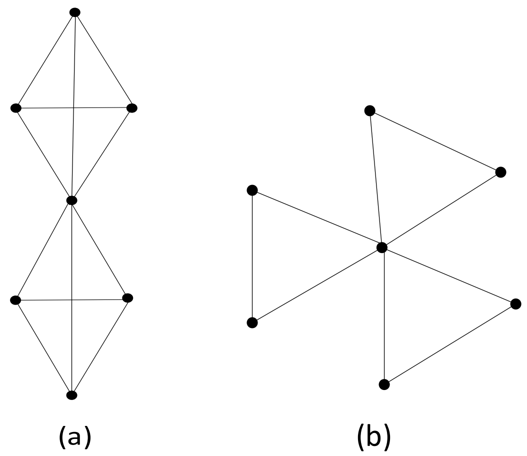
Graf barbel adalah graf sederhana yang dibentuk dengan menghubungkan dua tiruan atau jiplakan dari graf lengkap yang dihubungkan dengan sebuah sisi (Ihwan dkk., 2014). Graf barbel dari graf lengkap, dinotasikan dengan $B(K_n)$ adalah graf sederhana yang diperoleh dari dua graf lengkap yang dihubungkan oleh suatu jembatan.



Gambar 2.4 Contoh graf barbel dari graf lengkap $B(K_4)$

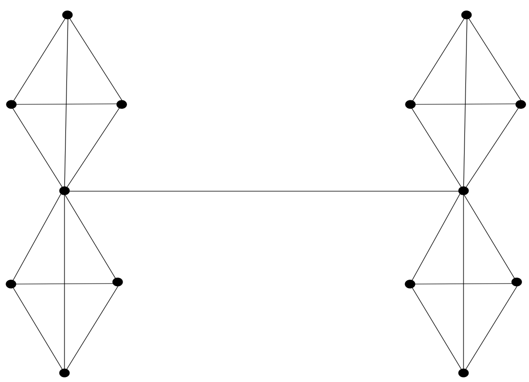
2.3 Amalgamasi Graf Lengkap

Amalgamasi dari $a \geq 2$ buah graf lengkap (K_n, $n \geq 3$) dinotasikan dengan aK_n diperoleh dengan cara menyatukan satu titik dari setiap graf lengkap K_n. Titik penyatuan tersebut disebut titik pusat dan dinotasikan dengan p.



Gambar 2.5 (a) Contoh amalgamasi graf lengkap $2K_4$ dan (b) Contoh amalgamasi graf lengkap $3K_5$

Graf barbel dari amalgamasi graf lengkap adalah graf sederhana yang dibentuk dengan menghubungkan dua tiruan amalgamasi graf lengkap (aK_n) oleh suatu sisi, dan dinotasikan dengan $B(aK_n)$.



Gambar 2.6. Contoh graf barbel dari amalgamasi graf lengkap $B(2K_4)$

2.4 Bilangan Kromatik Lokasi Graf

Definisi dari bilangan kromatik lokasi menurut Chatrand dkk., pada tahun 2002 yaitu misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dan c suatu pewarnaan di graf G dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk titik u dan v yang bertetangga di graf G. Misalkan C_i adalah himpunan titik-titik yang diberi warna i, yang selanjutnya disebut kelas warna, maka $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, \dots, C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari $V(G)$. Kode warna $c_\Pi(v)$ adalah k-pasang terurut $(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k))$ dengan $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) | x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G. Bilangan kromatik lokasi dari G, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$ adalah bilangan terkecil k sehingga G mempunyai pewarnaan k lokasi.

Berikut ini diberikan Teorema dasar tentang bilangan kromatik lokasi yang telah dibuktikan oleh Chartrand, dkk., (2002).

Teorema 2.1 (Chartrand dkk., 2002)

Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G. Jika titik u dan titik v adalah dua titik yang berbeda pada graf G sedemikian sehingga $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Dalam hal khusus, jika titik u dan titik v adalah titik-titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.

Bukti:

Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung dan misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, \dots, C_k\}$ adalah partisi dari titik – titik G ke dalam kelas warna C_i. Untuk semua $u, v \in V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama, misal C_i dari Π. Akibatnya, $d(u, C_i) = d(v, C_i) = 0$. Karena $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$ maka $d(u, C_j) \neq d(v, C_j)$ untuk setiap $j \neq i, 1 \leq i \leq k$. Akibatnya $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Jadi $c(u) \neq c(v)$. ∎

Akibat dari Teorema 2.1 didapatkan batas bawah dari bilangan kromatik lokasi untuk sebarang graf.

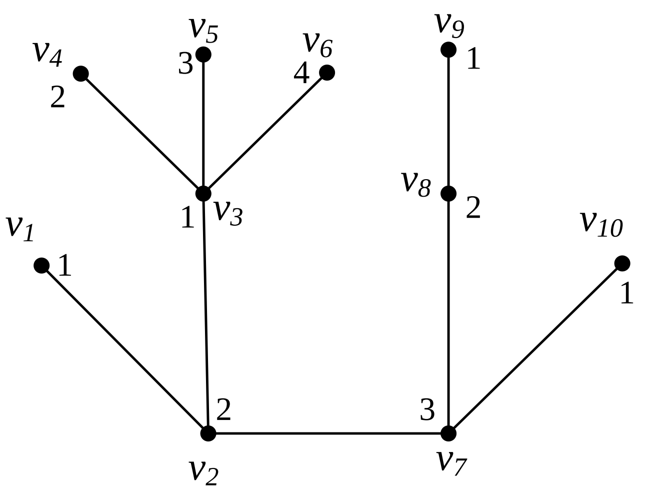
Akibat 2.2 (Chartrand dkk., 2002)

Jika G adalah graf terhubung dengan suatu titik yang bertetangga dengan k daun, maka $\chi_L(G) \geq k + 1$.

Bukti:

Misalkan v adalah suatu titik yang bertetangga dengan k daun, yaitu $x_1, x_2, \ldots, x_k$ di G. Berdasarkan Teorema 2.1, setiap pewarnaan lokasi dari G mempunyai warna yang berbeda untuk setiap x_i, dimana $i = 1,2,3, \ldots, k$. Karena v bertetangga dengan semua x_i , maka v harus mempunyai warna yang berbeda dengan semua daun x_i . Akibatnya $\chi_L(G) \geq k + 1$. ∎

Berikut ini diberikan graf G dan akan ditentukan bilangan kromatik lokasi dari graf G tersebut.



Gambar 2.7 Pewarnaan lokasi minimum pada G dengan $\chi_L(G) = 4$

Pada Gambar 2.7, akan ditentukan terlebih dahulu batas bawah bilangan kromatik lokasi graf G. Karena pada titik v_3 menempel tiga daun, maka berdasarkan Akibat 2.1, diperoleh $\chi_L(G) \geq 4$.

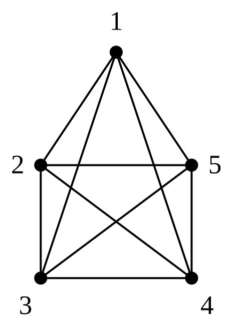
Misalkan c adalah pewarnaan titik menggunakan empat warna, pada graf G diberikan kelas warna sedemikian sehingga diperoleh $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ dengan $C_1 = \{v_1, v_3, v_9, v_{10}\}$, $C_2 = \{v_2, v_4, v_8\}$, $C_3 = \{v_5, v_7\}$ dan $C_4 = \{v_6\}$, oleh karena itu, diperoleh kode warna sebagai berikut: $c_\pi(v_1) = (0,1,2,3)$; $c_\pi(v_2) = (1,0,1,2)$; $c_\pi(v_3) = (0,1,1,1)$; $c_\pi(v_4) = (1,0,2,2)$; $c_\pi(v_5) = (1,2,0,2)$; $c_\pi(v_6) = (1,2,2,0)$; $c_\pi(v_7) = (1,1,0,3)$; $c_\pi(v_8) = (1,0,1,4)$; $c_\pi(v_9) = (0,1,2,5)$; $c_\pi(v_{10}) = (0,2,1,4)$. Karena setiap titik pada graf G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c adalah pewarnaan lokasi. Jadi, $\chi_L(G) \leq 4$. Akibatnya, $\chi_L(G) = 4$.

Teorema 2.2 (Chartrand,dkk., 2002)

Bilangan kromatik lokasi graf lengkap (K_n) adalah n untuk $n \geq 2$

Bukti:

Karena setiap titik pada graf saling bertetangga maka setiap titik diberi warna yang berbeda, jadi $\chi_L(K_n) = n$ untuk $n \geq 2$. ∎



Gambar 2.8 Contoh pewarnaan lokasi minimum pada K_5

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester genap tahun akademik 2022/2023 di Program Studi Magister Matematika Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Langkah – langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Metode untuk menentukan bilangan kromatik lokasi amalgamasi graf lengkap $n \geq 3$ sebagai berikut:
   a. Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi amalgamasi graf lengkap (aK_n) untuk $n \geq 3$. Karena amalgamasi graf lengkap memuat graf lengkap K_n, maka $\chi_L(aK_n) \geq n$.
   b. Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi amalgamasi graf lengkap (aK_n) dengan $n \geq 3$. Mengkonstruksi pewarnaan titik-titik dengan melihat struktur grafnya. Pewarnaan titik dimulai dengan label terkecil sedemikian sehingga diperoleh minimum pewarnaan titik yang memenuhi syarat pewarnaan lokasi.
   c. Jika batas bawah dan batas atas bilangan kromatik lokasi amalgamasi graf lengkap (aK_n) sama, misal x maka diperoleh bilangan kromatik lokasinya yaitu $\chi_L(aK_n) = x$.

d. Memformulasikan hasil-hasil yang diperoleh dalam suatu pernyataan matematika dan membuktikan hasil-hasil yang diperoleh.

2. Metode menentukan bilangan kromatik lokasi graf barbel dari amalgamasi graf lengkap untuk $n \geq 3$ sebagai berikut:
   a. Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf barbel dari amalgamasi graf lengkap $B(aK_n)$ untuk $n \geq 3$. Karena graf barbel dari amalgamasi graf lengkap $B(aK_n)$ untuk $n \geq 3$ memuat amalgamasi graf lengkap, maka $\chi_L(B(aK_n)) \geq \chi_L(aK_n)$.
   b. Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf barbel dari amalgamasi graf lengkap $B(aK_n)$ untuk $n \geq 3$. Mengkonstruksi pewarnaan titik-titik dengan melihat struktur grafnya. Pewarnaan titik dimulai dengan label terkecil sedemikian sehingga diperoleh minimum pewarnaan titik yang memenuhi syarat pewarnaan lokasi.
   c. Jika batas bawah dan batas atas bilangan kromatik lokasi graf barbel dari amalgamasi graf lengkap $B(aK_n)$ sama, misal x maka diperoleh bilangan kromatik lokasinya yaitu $\chi_L(B(aK_n)) = x$.
   d. Memformulasikan hasil-hasil yang diperoleh dalam suatu pernyataan matematika dan membuktikan hasil-hasil yang diperoleh.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Pada penelitian ini telah berhasil ditentukan dan dibuktikan bilangan kromatik lokasi amalgamasi graf lengkap (aK_n) dan $B(aK_n)$ untuk $n \geq 3$ adalah:

- $\chi_L(aK_n) = n + 1$, dan $a = 2,3$
- $\chi_L(4K_n)) = \begin{cases} n + 2; \text{jika } n = 3 \\ n + 1; \text{jika } n \geq 4 \end{cases}$
- $\chi_L(5K_n)) = \begin{cases} n + 2; \text{jika } n = 3,4 \\ n + 1; \text{jika } n \geq 5 \end{cases}$
- $\chi_L(6K_n)) = \begin{cases} n + 2; \text{jika } n = 3,4,5 \\ n + 1; \text{jika } n \geq 6 \end{cases}$
- $\chi_L\big(B(2K_n)\big) = n + 1$
- $\chi_L\big(B(3K_n)\big) = \begin{cases} n + 2; \text{jika } n = 3,4 \\ n + 1; \text{jika } n \geq 5 \end{cases}$
- $\chi_L\big(B(4K_n)\big) = \begin{cases} n + 2; \text{jika } n = 3,4,5,6 \\ n + 1; \text{jika } n \geq 7 \end{cases}$
- $\chi_L\big(B(5K_n)\big) = \begin{cases} n + 3; \text{jika } n = 3 \\ n + 2; \text{jika } n = 4,5,6,7,8 \\ n + 1; \text{jika } n \geq 9 \end{cases}$
- $\chi_L(B(6K_n)) = \begin{cases} n + 3; \text{jika } n = 3 \\ n + 2; \text{jika } n = 4,5,6,7,8,9,10 \\ n + 1; \text{jika } n \geq 11. \end{cases}$

Dari hasil yang diperoleh, maka yang tetap mempertahankan pola pewarnaannya adalah graf barbel dari graf $2K_n$, sehingga antara graf $2K_n$ dan $B(2K_n)$ memiliki bilangan kromatik lokasi yang sama.

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan bilangan kromatik lokasi amalgamasi pada graf lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Asmiati, Assiyatun, H., Baskoro, E.T. 2011. Locating-chromatic number of amalgamation of stars. ITB J.Sci. **43A**: 1 – 8.

Asmiati. 2014. The locating-chromatic number of non homogeneus amalgamation of stars. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. **93(1)**: 89 – 96.

Asmiati. 2016. On the locating-chromatic number of non homogeneus caterpillars and firecracker graphs. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. **100(8)**: 1305 – 1316.

Asmiati. 2017. Bilangan kromatik Lokasi *n* amalgamasi bintang yang dihubungkan oleh suatu lintasan. *Jurnal Matematika Integratif*. **13(2)**: 115 – 121.

Asmiati, Yanan I.K.S.G., dan Yulianti. 2018. On locating-chromatic number of certain barbel graphs. *Internasional Journal of Mathematical Sciences*. **100(8)**: 1-5.

Asmiati, Yulianti, L., Aldino, Aristoteles dan Junaidi, A. 2019. The locating chromatic number of a disjoint union of some double stars. *Journal of Physics*. **1338**: 1- 5.

Asmiati, Damayanti, M., dan Yulianti, L. 2021. On the locating chromatic number of barbell shadow path graphs. *Indonesian Journal of Combinatorics*. **5**(2): 82-93.

Baskoro, E. T., dan Asmiati. 2013. Characterizing all trees with locating-chromatic number 3. *Electronic Journal of graph Theory and Applications I*. **2**: 109-117.

Behtoei, A., Omoomi, B. 2016. On the locating-chromatic number of cartesian product of graphs. *Ars Combinatoria*.**126**: 221-235.

Chartrand, G., Salehi, E., Zhang, P. 1998. On the partition dimension of graph. *Congr*. *Numer*. **130**: 157 – 168.

Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M.A., Slater P. J., Zhang, P. 2002. The locating chromatic number of graphs. *Bull*. *Inst.Combin*. *Appl*. **36**: 89 – 101.

Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M.A., Slater P.J., Zhang, P. 2003. Graphs on order *n* with locating-chromatic number n-1. *Discrete Mathematics*. **269(1-3)**: 65 – 79.

Deo, N. 1989. *Graph theory with application to engineering and computer science*. Prentice Hall of India Private Limited, New Delhi.

Damayanti, M., Asmiati, Fitriani, Ansori, dan Faradila, A. 2021. The locating chromatic number of some modifed path with cycle having locating number four.

Ihwan, M. D, Rahmawati, A., dan Sumargono. 2014. Kajian bilangan clique graf gear G_n dan graf barbel B_n. *Jurnal Gagasan Matematika dan Informatika*. **5(1)**: 39-50.

Irawan, A., Asmiati, Zakaria, L., dan Muludi, K. 2021. The locating-chromatic number of origami graphs. *Indonesian Journal of Combinatorics*. **14(167)**: 1 – 15.

Prawinasti, K., Ansori, M., Asmiati, Notiragayu, dan Rofi, A. R. G. N. 2021. The locating chromatic number for split graph of cycle. *Journal of Physics: Conference Series*.

Sofyan, D. K., Baskoro, E. T., dan Assiyatun, H. 2013. On the locating chromatic number of homogeneous lobster. *AKCE Int. J. Graphs Comb*. **10(3)**: 245-252.

Sugeng, K. A., Slamet, S. dan Silaban, D. R. 2014. *Teori Graf dan Aplikasiya*. Departemen Matematika FMIPA UI, Depok.

Welyyanti, D., Baskoro, E. T., Simanjutak, R. dan Uttunggadewa, S. 2013. On the locating chromatic number of complete n-ary tree. *AKCE Int. J. Graph Comb*. **10(3)**: 309-315.

Welyyanti, D., Baskoro, E. T., Simanjutak, R. dan Uttunggadewa, S. 2014. The locating-chromatic number of disconnected graphs. *Far East J. of Mathematical Sciences* **94(2)**: 169-182.

Welyyanti, D., Baskoro, E. T., Simanjutak, R. dan Uttunggadewa, S. 2015. On locating chromatic number for graphs with dominant vertices. *Procedia Comput. Sci*. **74**: 89-92.