ANALISIS RATA-RATA BILANGAN FIBONACCI

(Skripsi)

Oleh

INTAN CAROLINE

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

ABSTRAK

ANALISIS RATA – RATA BILANGAN FIBONACCI

Oleh

INTAN CAROLINE

Bilangan Fibonacci adalah barisan bilangan yang setiap suku-sukunya merupakan penjumlahan dari dua suku sebelumnya. Rata-rata hitung n bilangan Fibonacci pertama dapat berupa bilangan bulat ataupun tidak. Terdapat beberapa karakterisasi nilai n yang merupakan pembagi dari rata-rata hitung n bilangan Fibonacci pertama. Selanjutnya, jika beberapa nilai n sudah dikaji maka diperoleh rata-rata hitung $A_F(n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_i\right)_{n\geq 1}$ bukan bilangan bulat jika n adalah bilangan prima ganjil.

Kata kunci: bilangan bulat, bilangan prima, bilangan Fibonacci.

ABSTRACT

ANALYSIS OF AVERAGE OF THE FIBONACCI NUMBERS

by

INTAN CAROLINE

The Fibonacci numbers is an sequence of numbers whose terms are the sum of previous two terms. The arithmetic mean of the first n Fibonacci numbers results both integer and non integer. There are several characteristics of the value n which is a divisor of the sum of the first n Fibonacci numbers. Next, if several values of n have already been studied, then it is obtained the average of $A_F(n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_i\right)_{n\geq 1}$ is not an integer if n is an odd prime number.

Keywords: integers, prime numbers, Fibonacci numbers.

ANALISIS RATA – RATA BILANGAN FIBONACCI

Oleh

INTAN CAROLINE

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

Judul Skripsi : **ANALISIS RATA – RATA BILANGAN FIBONACCI**

Nama Mahasiswa : Intan Caroline

Nomor Pokok Mahasiswa : 1917031038

Program Studi : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI,

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.
NIP. 197604112000122001

Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si
NIP. 199306012019032021

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

   Ketua : **Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** ....

   Sekretaris : **Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si.** ....

   Penguji

   Bukan Pembimbing : **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **13 Oktober 2023**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: **Intan Caroline**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1917031038**
Jurusan	: **Matematika**
Judul	: **Analisis Rata – Rata Bilangan Fibonacci**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, 13 Oktober 2023

Penulis,

Intan Caroline

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Intan Caroline, yang merupakan anak kedua dari dua bersaudara yang dilahirkan di Bandar Lampung pada 19 September 2001 oleh pasangan Bapak Sugianto dan Ibu Yulita Sari.

Penulis menempuh pendidikan di TK Sandhy Putra Baturaja yang diselesaikan pada tahun 2007, kemudian melanjutkan sekolah di SDN 2 Rawa Laut yang diselesaikan pada tahun 2013, kemudian melanjutkan sekolah di SMP Negeri 23 Bandar Lampung selama satu tahun dan pindah sekolah ke SMP Negeri 14 Ambon yang diselesaikan pada tahun 2016, kemudian melanjutkan sekolah di SMA Negeri 10 Bandar Lampung yang diselesaikan pada tahun 2019.

Pada tahun 2019 penulis terdaftar sebagai Mahasiswa Program Studi S1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SNMPTN. Selama menjadi mahasiswa, penulis pernah aktif berorganisasi. Penulis pernah menjadi Anggota Bidang Kaderisasi dan Kepemimpinan Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) pada tahun 2020, penulis juga pernah aktif menjadi Koordinator Marketing DINAMIKA XXI 2020 dan Sekretaris Pelaksana DINAMIKA XXII 2021.

Pada bulan Januari 2022, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Dinas Tenaga Kerja (Disnaker) Kota Bandarlampung, kemudian pada pertengahan tahun 2022, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 40 hari di Desa Suka Bandung, Kecamatan Talang Padang, Kabupaten Tanggamus.

KATA INSPIRASI

"Dan barang-siapa yang bertakwa kepada Allah, niscaya Allah menjadikan baginya kemudahan dalam urusannya."
(Q.S At-Talaq: 4)

"Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya."
(Al-Baqarah: 286)

"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan."
(Q.S Al-Insyirah: 5-6)

"Ketetapan Allah pasti dating, maka janganlah kamu meminta agar dipercepat (datang)nya."
(Q.S An-Nahl: 1)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahi Rabbil ‘Alamin, dengan mengucap puji dan syukur kepada Allah SWT atas Segala limpah rahmat, hidayah dan karuniaNya, Saya persembahkan skripsi ini yang dibuat dengan kesabaran dan ketulusan hati kepada:

Kedua Orang Tua Tercinta

Terima kasih atas kasih sayang, dukungan, motivasi, nasihat dan doa yang tidak berhenti sampai saat ini, karena doa dan didikan kalianlah yang membawaku bertahan dan kuat sampai sejauh ini.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terima Kasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang telah memberikan ilmu, bimbingan, serta dukungan yang sangat membangun sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

Almamater Tercinta Universitas Lampung

SANWACANA

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT karena berkat kasih, dan rahmatNya yang telah diberikan kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul **“**Analisis Rata – Rata Bilangan Fibonacci**”**. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika (S.Mat.) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Dalam menyelesaikan skripsi ini, penulis mendapat dukungan, bimbingan, motivasi, saran dan bantuan dari beberapa pihak sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik. Oleh karena itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Alm. Bapak Amanto, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing I yang telah memberikan waktu, arahan, dan masukan kepada penulis selama proses penyelesaian penyusunan skripsi ini.
2. Ibu Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku penerus Pembimbing I yang telah banyak membantu mengajarkan serta mendampingi selama proses penyusunan proposal penelitian hingga skripsi.
3. Ibu Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si. selaku Pembimbing II yang telah memberikan waktu, arahan, dan masukan kepada penulis selama proses penyelesaian penyusunan skripsi.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Penguji yang telah memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan karya tulis yang lebih baik lagi.
5. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si., selaku dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing penulis sampai akhir perkuliahan.

6. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku Kepala Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Bapak Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Seluruh Dosen, Staf Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang telah memberikan ilmu, wawasan dan pengetahuan yang berharga bagi penulis selama proses perkuliahan berlangsung.
9. Kedua orang tua penulis bapak Sugianto dan ibu Yulita sari, Kakak tercinta Dewi Carolina, Papa Erpan, sepupuku Gita Ayu Puspita, dan seluruh keluarga tercinta yang telah memberikan kasih sayang, dukungan, dan doa kepada penulis.
10. Teman seperjuangan di Jurusan Matematika yang banyak membantu dan saling mengasihi disaat suka maupun duka pada masa perkuliahan, Ahmad Yusril Yusro, Surya Anugrah Pratama, Ardelia Maharani Sulandra, Azizah Rahmahtia Mattulada, Bintang Gitano Valentino, Yoga Gustama, Stevanus Kenny Sarumpaet, Eccha Nanda Putri, Poetri Hana Nurhandayani, serta teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2019.
11. Teman seperbimbingan, Audrey Verisca Renry, Dimiantika, dan Aulia Ayu Anisa yang saling menyemangati dan memberi dukungan dalam menyelesaikan skripsi ini.
12. Teman baikku Salsabila Oktariana, Kak Fadli, Kak Fando, Kak Alka, Kak Bangsawan, Sidra Alma Ariz, dan M. Dirga Putra Riady yang telah menyemangati dan menemani penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
13. Ryamizard Rizky Pranata yang juga sedang menyelesaikan tugas akhir tetapi tetap memberikan semangat.
14. Para kakak dan adik tingkat yang terlibat dalam penyusunan skripsi ini.
15. Kucing-kucingku Io, Alm. Inoy, Upin, Ipin, Acacia, Mika, Miki, Miko, Jennie, Jisoo, Lisa, Rosé.
16. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa terdapat banyak kekurangan dalam penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, kritik dan saran sangat diharapkan guna menyempurnakan skripsi ini.

Bandar Lampung, 13 Oktober 2023
Penulis

Intan Caroline

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Matematika adalah ilmu yang berfokus pada konsep kuantitas, bentuk, susunan, dan ukuran. Matematika memiliki aspek utama yang berkaitan dengan metode dan proses untuk memahami sifat dan relasi antara jumlah dan ukuran, baik dalam konteks abstrak seperti matematika murni, maupun dalam konteks penerapannya dalam matematika terapan. Matematika mencakup beragam teori, salah satunya adalah teori bilangan. Teori bilangan mempelajari karakteristik bilangan bulat dan sering kali melibatkan masalah yang menarik dan dapat dipahami bahkan oleh orang yang bukan ahli matematika.

Awal perkembangan teori bilangan modern diprakarsai oleh sejumlah matematikawan terkemuka, termasuk Pierre de Fermat (1601-1665), Leonhard Euler (1707-1783), J.L. Lagrange (1736-1813), A.M. Legendre (1752-1833), Dirichlet (1805-1859), Dedekind (1831-1916), Riemann (1826-1866), Giussepe Peano (1858-1932), Poisson (1866-1962), dan Hadamard (1865-1963). Carl Friedrich Gauss, yang dianggap sebagai salah satu pangeran matematika, sangat terpesona oleh keindahan dan keelokan teori bilangan. Ia bahkan menggambarkan teori bilangan sebagai *the Queen of Mathematics* untuk menggambarkan keunikan dan kehebatannya (Burton, 1980).

Salah satu aspek yang dibahas dalam teori bilangan adalah bilangan Fibonacci. Bilangan Fibonacci adalah bilangan yang setiap suku-sukunya merupakan hasil penjumlahan dari dua suku sebelumnya dimulai dengan nilai $F_0 = 0$ dan $F_1 = 1$

(Meinke, 2011). Matematikawan Italia bernama Leonardo da Pisa adalah orang pertama yang menemukan bilangan Fibonacci. Pada tahun 1225, Leonardo Da Pisa, menerbitkan bukunya yang berjudul "Liber Quadrotorum" tentang masalah persegi, di mana ia menghadirkan permasalahan tentang jumlah keturunan dari sepasang kelinci dalam bulan-bulan tertentu. Permasalahan ini menjadi dasar bagi pembentukan bilangan Fibonacci dan deret Fibonacci yang terkenal hingga saat ini.

Bilangan Fibonacci memiliki suku-suku yang tidak terbatas. Rata-rata hitung dari n bilangan Fibonacci pertama dapat berupa bilangan bulat ataupun tidak. Dalam penelitian ini, akan dikaji mengenai rata-rata hitung bilangan Fibonacci yang nilainya berbentuk bilangan bulat.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah menganalisis sifat-sifat dari rata-rata hitung bilangan Fibonacci yang nilainya berbentuk bilangan bulat.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Mengetahui karakteristik bilangan Fibonacci.
2. Menambah informasi tentang sifat rata-rata hitung bilangan Fibonacci yang berbentuk bilangan bulat.
3. Meningkatkan pemahaman dan pengetahuan dalam bidang matematika, terutama mengenai bilangan Fibonacci.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Himpunan

Tahun 1845-1918 seorang ilmuwan bekembangsaan Jerman George cantor mengembangkan Himpunan. Konsep mendasar dalam semua cabang matematika adalah konsep himpunan, yang direpresentasikan dengan cara mencantumkan semua anggotanya di dalam tanda kurung kurawal dan dinotasikan sebagai $\{\}$. Di bawah ini adalah definisi himpunan dan sifat-sifatnya menurut Wibisono (2008).

Definisi 2.1.1

Kumpulan objek-objek yang berbeda disebut himpunan *(set)*. Objek-objek yang terdapat dalam himpunan disebut elemen, unsur, atau anggota. Himpunan dinotasikan dengan huruf kapital seperti $(P, Q, R, \ldots)$ dan anggota himpunan dinotasikan dengan huruf kecil seperti $(p, q, r, \ldots)$.

Berikut ini akan diberikan beberapa operasi terhadap himpunan:

Diberikan sebarang himpunan P dan Q.

1. Gabungan dari dua himpunan P dan Q, dinotasikan dengan $P \cup Q$ adalah $P \cup Q = \{x | x \in P \text{ atau } x \in Q\}$.
2. Irisan dari dua himpunan P dan Q, dinotasikan dengan $P \cap Q$ adalah $P \cap Q = \{x | x \in P \text{ dan } x \in Q\}$.
3. Selisih dari dua himpunan P dan Q, dinotasikan dengan $P - Q$ adalah $P - Q = \{x | x \in P, x \notin Q\}$.

Contoh 2.1

Misalkan P adalah himpunan bilangan prima kurang dari 8. Himpunan P dapat ditulis $P = \{p \mid p < 8,\ p \in$ bilangan prima$\}$ atau $P = \{2, 3, 5, 7\}$. $P = \{p \mid p < 8,\ p \in$ bilangan prima$\}$ merupakan cara penulisan notasi pembentuk himpunan yang dimana himpunan dinyatakan dengan menulis syarat yang harus dipenuhi oleh anggotanya. Sedangkan $P = \{2, 3, 5, 7\}$ merupakan cara penulisan notasi secara numerasi.

Definisi 2.1.2

Banyaknya jumlah elemen di dalam suatu himpunan A disebut kardinalitas dan dinotasikan dengan $n(A)$ atau $|A|$.

Contoh 2.2

1. Jika himpunan $N = \{n \mid n < 12,\ n \in$ bilangan prima$\}$ atau $N = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ maka kardinalitas dari himpunan N adalah 5, atau $|N| = 5$.
2. Jika Q = {Hijau, Biru, Kuning, Hitam} maka kardinalitas dari himpunan Q adalah 4 atau $|Q| = 4$.
3. Jika himpunan X merupakan himpunan bilangan genap maka $X = \{2, 4, 6, 8, ...\}$. Himpunan X memiliki jumlah anggota yang tidak berhingga sehingga kardinalitas dari x adalah tak berhingga atau $|X| = \infty$

Definisi 2.1.3

Suatu himpunan yang tidak memiliki elemen di dalamnya atau dengan kardinalitas 0 disebut dengan himpunan kosong (*null set*) dan dinotasikan dengan Ø atau {}.

Contoh 2.3

1. Himpunan P dengan P merupakan himpunan bilangan prima yang kurang dari 2. Karena P memiliki kardinalitas 0 maka P merupakan himpunan kosong atau $P = \emptyset$.
2. Himpunan Z dengan Z merupakan himpunan bilangan ganjil yang habis dibagi dua. Karena Z memiliki kardinalitas 0 maka Z merupakan himpunan kosong atau $Z = \emptyset$.

3. Himpunan A dengan A merupakan himpunan bilangan prima yang memiliki 1 faktor. Karena A memiliki kardinalitas 0 maka A merupakan himpunan kosong atau $A = \emptyset$.

Definisi 2.1.4

Himpunan semesta (*universal set)* adalah semua himpunan yang ditinjau adalah sub-himpunan dari sebuah himpunan tertentu. Dengan kata lain himpunan semesta adalah himpunan dari semua objek-objek yang berbeda dan dinotasikan dengan S atau U.

Contoh 2.4

1. Himpunan semesta dari bilangan irasional dan bilangan rasional adalah bilangan riil.
2. Jika terdapat himpunan huruf vokal dan himpunan huruf konsonan, maka himpunan semestanya adalah himpunan seluruh huruf alfabet.
3. Jika S merupakan himpunan warna pelangi, maka S = {merah, jingga, kuning, hijau, biru, nila, ungu}.

Definisi 2.1.5

Suatu himpunan A dikatakan himpunan bagian (*subset*) dari himpunan B jika dan hanya jika setiap anggota di A merupakan anggota himpunan B. Himpunan bagian A dari himpunan B dinotasikan dengan $A \subseteq B$.

Contoh 2.5

1. Jika himpunan $X = \{0\}$ dan himpunan Y merupakan himpunan bilangan cacah maka $X \subseteq Y$.
2. Misal terdapat himpunan $M = \{2, 4, 8\}$ dan himpunan $N = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ karena himpunan M merupakan bagian dari himpunan N maka $M \subseteq B$.
3. Jika himpunan A merupakan himpunan bilangan genap dan himpunan $B = \{12, 16, 20, 24\}$, maka B dikatakan himpunan bagian dari A atau $B \subseteq A$.

Definisi 2.1.6

Himpunan dari semua himpunan bagian (*subset*) yang dapat dibuat dari sebuah himpunan disebut himpunan kuasa (*power set*). Banyaknya himpunan bagian dari sebuah himpunan A dinotasikan dengan $P(A)$. Apabila himpunan A terdiri dari n anggota, maka banyaknya anggota dari himpunan kuasa dari himpunan A adalah 2^n.

Contoh 2.6

Diberikan himpunan $K = \{3, 6, 9, 12\}$, diperoleh $|K| = 4$. Oleh karena itu, $P(K) = 2^4 = 16$. Sehingga, himpunan kuasa dari himpunan K yaitu $P(K) = \{\emptyset, \{3\}, \{6\}, \{9\}, \{12\}, \{3, 6\}, \{3, 9\}, \{3, 12\}, \{6, 9\}, \{6, 12\}, \{9, 12\}, \{3, 6, 9\}, \{3, 6, 12\}, \{3, 9, 12\}, \{6, 9, 12\}, \{3, 6, 9, 12\}\}$.

2.2 Keterbagian

Definisi 2.2.1

Bilangan bulat a membagi habis bilangan bulat b (dinotasikan $a|b$) jika dan hanya jika terdapat bilangan bulat k sehingga $b = a \cdot k$. Jika a tidak membagi habis b maka dinotasikan $a \nmid b$ (Burton, 1980).

Istilah lain untuk $a|b$ adalah a merupakan faktor dari b, a adalah pembagi dari b, atau b adalah kelipatan dari a. Jika a adalah pembagi dari b, maka $-a$ juga merupakan pembagi dari b, sehingga setiap pembagi dari suatu bilangan selalu memiliki pasangan. Oleh karena itu, ketika menentukan semua faktor dari suatu bilangan bulat, hanya perlu mempertimbangkan faktor-faktor positifnya saja. Dengan menggunakan Definisi 2.2.1, dapat disimpulkan bahwa $a|0, 1|a$, dan $a|a$ untuk $a \neq 0$.

0 selalu habis dibagi oleh bilangan apapun sehingga $a|0$. Selain itu, 1 selalu menjadi faktor atau pembagi dari setiap bilangan, termasuk bilangan 0. Oleh karena itu, $1|a$ berlaku untuk semua bilangan. Selain itu, $a|a$ menyiratkan bahwa bilangan yang

tidak sama dengan nol selalu habis membagi dirinya sendiri dengan hasil baginya adalah 1.

Teorema 2.2.1 (Sukirman, 1997)

Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku pernyataan berikut:

1. $a|1$ jika dan hanya jika $a = 1$ atau $a = -1$.
2. Jika $a|b$ dan $c|d$ maka $ac|bd$.
3. Jika $a|b$ dan $b|c$ maka $a|c$.
4. $a|b$ dan $b|a$ jika dan hanya jika $a = b$ atau $a = -b$.
5. Jika $a|b$ dan $b \neq 0$, maka $|a| < |b|$.
6. Jika $a|b$ dan $a|c$, maka $a|(bx + cy)$ untuk sebarang bilangan bulat *x* dan *y*.

Bukti.

1. Jika $a = 1$ atau $a = -1$, maka jelas bahwa $a|1$, sesuai penjelasan sebelumnya. Sebaliknya, diketahui $a|1$ berarti ada $k \in \mathbb{Z}$ sehingga $1 = ka$. Persamaan ini hanya dipenuhi oleh dua kemungkinan berikut: $k = 1$, $a = 1$ atau $k = -1, a = -1$. Jadi berlaku jika $a|1$ maka $a = 1$ atau $a = -1$. Jadi terbukti $a|1$ jika hanya jika $a = 1$ atau $a = -1$,
2. Diketahui $a|b$ dan $c|d$ yaitu ada $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ sehingga $b = k_1 a$ dan $d = k_2 c$. Dengan mengalikan kedua persamaan tersebut diperoleh :
$$bd = (k_1 k_2)ac \tag{2.1}$$
Karena $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ maka $k_1 k_2 \in \mathbb{Z}$. Sehingga terbukti $ac|bd$.
3. Diketahui $a|b$ dan $b|c$, maka terdapat $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ sehingga
$$b = k_1 a \tag{2.2}$$
dan
$$c = k_2 b \tag{2.3}$$
Persamaan (2.2) disubstitusikan ke Persamaan (2.3), sehingga diperoleh
$$c = k_2 b = k_2(k_1 a) = (k_1 k_2)a = ka. \tag{2.4}$$
Karena $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ maka $k_1 k_2 \in \mathbb{Z}$. Sehingga terbukti $a|c$.
4. Diketahui
$$a = k_1 b \tag{2.5}$$

dan

$$b = k_2 a \quad (2.6)$$

Persamaan (2.5) dikalikan dengan Persamaan (2.6), diperoleh $ab = (k_1 k_2)(ab)$. Diperoleh $k_1 k_2 = 1$, yakni $k_1 = k_2 = 1$ atau $k_1 = k_2 = -1$. Jadi, terbukti $a = b$ atau $a = -b$.

5. Diberikan $b = ac$ untuk suatu $c \in \mathbb{Z}$.
   Diambil nilai mutlaknya $|b| = |ac| = |a||c|$. Karena $b \neq 0$ maka $|c| \geq 1$.
   Sehingga diperoleh $|b| = |a||c| \geq |a|$
6. Diketahui $a|b$ dan $a|c$, maka terdapat $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $b = k_1 a$ dan $c = k_2 a$. Untuk sebarang $x, y \in \mathbb{Z}$ berlaku

$$bx + cy = k_1 ax + k_2 ay = (k_1 x + k_2 y)a \quad (2.7)$$

Karena $k_1, k_2, x, y \in \mathbb{Z}$ maka $k_1 x + k_2 y \in \mathbb{Z}$. Sehingga $a|bx + cy$

■

Pernyataan terakhir teorema ini berlaku juga untuk berhingga banyak bilangan yang dibagi oleh a, yaitu $a|b_k, k = 1, \cdots, n$ yaitu:

$$a|(b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n) \quad (2.8)$$

untuk setiap bilangan bulat $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

2.3 Modulo

Modulo adalah suatu metode dalam ilmu matematika yang menyatakan suatu sisa hasil dari pembagian suatu bilangan bulat dengan bilangan bulat yang lainnya.

Definisi 2.3.1

Misalkan a adalah bilangan bulat dan m adalah bilangan bulat > 0. Operasi a mod m (dibaca "a modulo m") memberikan sisa hasil pembagian a dengan m (Grillet, 2007). Bilangan m disebut modulus atau modulo, dan hasil aritmatika modulo m terletak di dalam himpunan $\{0, 1, 2, \ldots, m - 1\}$.

Contoh 2.7

1. $21 \bmod 7 = 0$, hal ini berarti $21 = 7 \times 3 + 0$.
2. $13 \bmod 9 = 4$, hal ini berarti $13 = 9 \times 1 + 4$.
3. $38 \bmod 3 = 2$, hal ini berarti $38 = 3 \times 12 + 2$.

2.4 Relasi Kongruensi

Definisi 2.4.1

Misalkan a dan b adalah bilangan bulat dan m bilangan bulat dengan $m > 0, a$ kongruen dengan b mod m, dituliskan dengan $a \equiv b \pmod{m}$ jika m habis membagi $a - b$. Jika a tidak kongruen dengan b dalam modulus m, maka dapat ditulis $a \not\equiv b$ (mod m). Kekongruenan $a \equiv b \pmod{m}$ dapat pula dituliskan dalam hubungan $a = b + km$, dengan ini k adalah bilangan bulat (Grillet, 2007).

Contoh 2.8

1. $21 \equiv 3 \pmod{3}$ karena $21 - 3 = 18$ terbagi oleh 3.
2. $10 \equiv 4 \pmod{2}$ karena $10 - 4 = 6$ terbagi oleh 2.
3. $12 \not\equiv 2 \pmod{7}$ karena $12 - 2 = 10$ tidak terbagi oleh 7.
4. $7 \not\equiv 4 \pmod{5}$ karena $7 - 4 = 3$ tidak terbagi oleh 5.

Teorema 2.4.1 (Grillet, 2007)

Misalkan *m* adalah bilangan bulat positif.

Kongruensi modulo m memenuhi sifat-sifat berikut:

1. Refleksif

   Jika a adalah suatu bilangan bulat, maka $a \equiv a \pmod{m}$.
2. Simetris

   a dan b adalah bilangan-bilangan bulat sedemikian sehingga jika $a \equiv b \pmod{m}$ maka $b \equiv a \pmod{m}$.

3. Transitif

   Jika a, b, dan c adalah bilangan-bilangan bulat sedemikian sehingga $a \equiv b$ (mod m) dan $b \equiv c$ (mod m) maka $a \equiv c$ (mod m).

   Bukti.

1. Diketahui bahwa $m|0$ atau $m|a - a$ maka $a \equiv a$ (mod m). Sehingga terbukti $a \equiv a$ (mod m).
2. Jika $a \equiv b$ (mod m) maka $m|a - b$, berdasarkan Definisi 2.2.1 terdapat $k \in \mathbb{Z}$ sehingga $a - b = km$ atau $b - a = (-k)m$, berarti $m|b - a$. Dengan demikian terbukti $b \equiv a$ (mod m).
3. $a \equiv b$ (mod m) dengan didefinisikan $m|a - b$

   $m|a - b$, berarti terdapat $k_1 \in \mathbb{Z}$ dengan $a - b = k_1 m$

   $$a = b + k_1 m \quad (2.9)$$

   $b \equiv c$ (mod m) dengan didefinisikan $m|b - c$

   $m|b - c$, berarti terdapat $k_2 \in \mathbb{Z}$ dengan $b - c = k_2 m$

   $$b = c + k_2 m \quad (2.10)$$

   Persamaan (2.10) disubstitusikan ke dalam Persamaan (2.9) diperoleh:

   $a = b + k_1 m$

   $a = (c + k_2 m) + k_1 m$

   $a = c + (k_2 m + k_1 m)$

   $a = c + m(k_2 + k_1)$

   $a - c = m(k_2 + k_1)$

   Karena terdapat $(k_1 + k_2) \in \mathbb{Z}$ dengan $a - c = m(k_2 + k_1)$ ini berarti $m|a - c$ maka terbukti $a \equiv c$ (mod m).

■

Teorema 2.4.2 (Grillet, 2007)

Diberikan bilangan bulat c, maka

i. Jika $a \equiv b$ (mod m) maka $a + c \equiv b + c$ (mod m).

ii. Jika $a \equiv b$ (mod m) maka $ac \equiv bc$ (mod m).

Bukti.

i. Jika $a \equiv b \pmod m$ ini berarti $a = km + b$ dengan $k \in \mathbb{Z}$. Kemudian kedua ruas ditambahkan bilangan bulat c, maka diperoleh

$a + c = km + b + c$

$(a + c) - (b + c) = km$

Karena terdapat $k \in \mathbb{Z}$ dengan $(a + c) - (b + c) = km$ ini berarti $m|(a + c) - (b + c)$ maka terbukti Jika $a \equiv b\ (mod\ m)$ maka $a + c \equiv b + c\ (mod\ m)$.

ii. Jika $a \equiv b\ (mod\ m)$ ini berarti $a - b = km$ dengan $k \in \mathbb{Z}$. Kemudian kedua ruas dikalikan dengan bilangan bulat c, maka diperoleh

$(a - b)c = kmc$

$ac - bc = kmc$

$ac - bc = m(kc)$

Karena terdapat $(kc) \in \mathbb{Z}$ dengan $ac - bc = m(kc)$ ini berarti $m|ac - bc$ maka terbukti $ac \equiv bc\ (mod\ m)$.

■

2.5 Bilangan Prima

Definisi 2.5.1

Bilangan bulat $p > 1$ dikatakan disebut bilangan prima jika satu-satunya pembagi yang dimilikinya adalah 1 dan p itu sendiri. Dengan kata lain, bilangan prima tidak memiliki pembagi selain dari 1 dan bilangan itu sendiri (Burton, 1980).

Berdasarkan Definisi 2.5.1, 1 bukanlah bilangan prima. Bilangan prima terkecil adalah 2 yang merupakan satu-satunya bilangan prima yang merupakan bilangan genap. Sedangkan bilangan prima lainnya, seperti $(3, 5, 7, 11, \ldots)$ semuanya bilangan ganjil. Tetapi tidak semua bilangan ganjil merupakan bilangan prima; misalnya 15 ganjil tapi bukan prima. Bilangan bukan prima seperti $(4, 6, 8, 9, \ldots)$ disebut bilangan komposit. Bila n komposit maka ia dapat dinyatakan sebagai $n = ab$ dimana $a, b \in \mathbb{Z}, 1 < a < n, 1 < b < n$.

Teorema 2.5.1 (Sukirman, 1997)

Setiap bilangan bulat n, dengan $n > 1$ dapat dinyatakan sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima (mungkin hanya memiliki satu faktor).

2.6 Bilangan Fibonacci

Definisi 2.6.1

Bilangan Fibonacci F_n adalah suku-suku barisan $\{0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots\}$ dimana setiap sukunya adalah penjumlahan dua suku sebelumnya, dimulai dengan nilai $F_1 = 1$ dan $F_2 = 1$, meskipun terkadang dapat definisikan $F_0 = 0$ (Meinke, 2011).

Bilangan Fibonacci diperoleh dengan rumus:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2 \tag{2.11}$$

Berdasarkan (2.11), akan diperoleh barisan bilangan berikut:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, \dots$$

Teorema 2.6.2 (Koshy, 2001)

$$F_{m+n+1} = F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n \tag{2.12}$$

$$F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1} \tag{2.13}$$

$$F_{m+n} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n \tag{2.14}$$

$$F_{m+n-1} = F_mF_n + F_{m-1}F_{n-1} \tag{2.15}$$

Bukti.

Diketahui $\boldsymbol{Q}^m\boldsymbol{Q}^n = \boldsymbol{Q}^{m+n}$ dimana $\boldsymbol{Q}$ merupakan matriks.

Sehingga diperoleh,

$$\begin{bmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n & F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1} \\ F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n & F_mF_n + F_{m-1}F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{bmatrix}$$

■

2.7 Bilangan Lucas

Pada abad ke-19 nama barisan Fibonacci diperkenalkan oleh matematikawan asal Perancis yang bernama Lucas. Lucas mengembangkan suatu barisan bilangan yang mempunyai sifat seperti barisan bilangan Fibonacci yang selanjutnya disebut barisan Lucas. Sifat dasar barisan bilangan Lucas sama dengan barisan bilangan Fibonacci, yang membedakan adalah suku keduanya.

Berbeda dengan barisan bilangan Fibonacci F_n yang dimulai dengan $F_0 = 0$, barisan bilangan Lucas L_n dimulai dengan $L_0 = 2$ dan $L_1 = 1$. Barisan Lucas yaitu $(2, 1, 3, 4, 7, 11, \dots)$ (Avila dan Khoyanova, 2014).

Bilangan Lucas diperoleh dengan rumus:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \text{ Untuk } n \geq 2 \tag{2.16}$$

Hubungan antara bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas dapat dilihat pada teorema berikut:

Teorema 2.7.1 (Koshy, 2001)

$$F_{m+n} + F_{m-n} = \begin{cases} F_n L_m, & \text{Untuk } n \text{ ganjil} \\ F_m L_{n,} & \text{Untuk } n \text{ genap} \end{cases} \tag{2.17}$$

$$F_{m+n} - F_{m-n} = \begin{cases} F_m L_n, & \text{Untuk } n \text{ ganjil} \\ F_n L_{m,} & \text{Untuk } n \text{ genap} \end{cases} \tag{2.18}$$

$$F_{k+1} + F_{k-1} = L_k \tag{2.19}$$

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Waktu dan tempat penelitian ini dilakukan di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung pada semester genap Tahun Akademik 2022/2023.

3.2 Metode Penelitian

Metode penelitian yang dilakukan adalah studi literatur dengan literatur utama adalah *Average of the Fibonacci Numbers* oleh Amirali Fatehizadeh dan Daniel Yaqubi. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian adalah sebagai berikut:

1. Mengkaji mengenai bilangan Fibonacci, Keterbagian, modulo, kaitan keterbagian dan modulo terhadap bilangan Fibonacci.
2. Menjabarkan definisi, lemma, dan teorema terkait pembuktian dari rata-rata hitung bilangan Fibonacci.
3. Menarik kesimpulan terhadap barisan bilangan Fibonacci yang telah dikaji.

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan didapat kesimpulan bahwa terdapat beberapa karakterisasi nilai n yang merupakan pembagi dari rata-rata hitung n bilangan Fibonacci pertama. Selanjutnya, rata-rata hitung $A_F(n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_i\right)_{n\geq 1}$ bukan bilangan bulat jika n adalah bilangan prima ganjil.

5.2 Saran

Terdapat karakterisasi nilai n berupa bilangan bulat ganjil dan bilangan positif yang juga dapat membagi rata-rata hitung n bilangan Fibonacci pertama yang dapat dijadikan sebagai penelitian lanjutan.

DAFTAR PUSTAKA

Avila, B. & Khovanova, T. 2014. Free Fibonacci Sequences. *Journal of Integer Sequences*, Vol. 17. Article 14.8.5.

Burton, D.M. 1980. *Elementary Number Theory*. University of New Hampshire. United Stated of Afrika.

Fatehizadeh, A. & Yaqubi, D. 2022. Average of the Fibonacci Numbers. *Journal of Integer Sequences*, Vol. 25. Article 22.2.6.

Fulton, J. & Morris, W. 1969. On Arithmetical Functions Related to the Fibonacci Numbers, *Acta Arith*. **16**, 105–110.

Grillet, P.A. 2007. *Graduate Text in Mathematics*, 2^{nd} *Edition*. Springer, New York.

Koshy, T. 2001. *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. John Wiley and Sons, Canada.

Lengyel, T. 1993. The order of the Fibonacci and Lucas Numbers. *Fibonacci Quart* **33**(3).

Meinke, A.M. 2011. *Fibonacci Numbers and Associated Matrices*. Kent State University, Kent.

Robinson, D.W. 1963. The Fibonacci Matrix Modulo m. *Fibonacci Quart*. **1**: 29-36.

Sukirman, M.P. 1997. *Ilmu Bilangan*. Universitas Terbuka, Jakarta.

Suryanti, Sri. 2017. *Teori Grup (Struktur Aljabar 1)*. Gresik: UMG Press.

Wibisono, Samuel. 2008. *Matematika Diskrit (Edisi Kedua)*. Yogyakarta: Graha Ilmu.