II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Ruang Metrik

Ruang metrik merupakan ruang abstrak, yaitu ruang yang dibangun oleh aksioma-aksioma tertentu. Ruang metrik merupakan hal yang fundamental dalam analisis fungsional, sebab memegang peranan yang sama dengan jarak pada *real line R*.

Definisi 2.1.1

Misal X adalah himpunan tak kosong, suatu metrik di X adalah suatu fungsi $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$, sehingga untuk setiap pasangan $(x, y) \in X \times X$ berlaku:

i. $d(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$

ii. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

iii. $d(x, y) = d(y, x)$ untuk setiap $x, y \in X$ (sifat simetri)

iv. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ untuk setiap $x, y, z \in X$ (ketidaksamaan segitiga)

Selanjutnya pasangan (X, d), dengan d adalah metrik pada X disebut ruang metrik. Setiap anggota X disebut titik dan nilai $d(x, y)$ disebut jarak (*distance*) dari titik x ke titik y atau jarak antara titik x dan y (Kreyszig, 1989).

Contoh:

Diberikan himpunan $X \neq \emptyset$ dan didefinisikan fungsi:

$$d: X \times X \to R$$

Dengan $d(x,y) = \begin{cases} 1, x \neq y \\ 0, x = y \end{cases}$

Pasangan (X,d) merupakan ruang metrik.

Definisi 2.1.2

Suatu barisan (x_n) dalam ruang metrik (X,d) dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $N = N(\epsilon)$ sehingga $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ untuk setiap $m, n > N$. Ruang *X* dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen (Kreyszig, 1989).

Definisi 2.1.3

Suatu ruang metrik (X,d) dikatakan lengkap jika dan hanya jika setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen. Dengan kata lain jika $d(x_m, x_n) \to 0$ $(m, n \to \infty)$ maka terdapat $x \in X$ sehingga $d(x_m, x) \to 0$ $(m \to \infty)$ (Maddox, 1970).

Definisi 2.1.4 (Kekonvergenan)

Misal (X,d) adalah suatu ruang metrik. Suatu barisan $(x_n) \in X$ dikatakan konvergen jika terdapat suatu titik $x \in X$ sehingga $d(x_n, x) \to 0$ untuk $n \to \infty$ (yaitu untuk setiap $\varepsilon > 0$, $d(x_n, x) < \varepsilon$). Titik *X* adalah unik, sebab jika $d(x_n, y) \to 0$ maka $0 \leq d(x,y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \to 0$ menunjukkan bahwa $x = y$. Dapat dikatakan x_n konvergen ke limit *x* (dalam *X*), sehingga dapat ditulis $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ (Berberian, 1996).

Contoh:

$d(x,y) = |x - y|$

Misalkan $d(x,y)$ memiliki limit yaitu $\lim_{n\to\infty}|x - y| = 0$ maka $|(x - y) - 0| < \varepsilon$. Diambil $\varepsilon > 0$, berarti *y* adalah limit dari $d(x,y) = |x - y|$, dengan $\lim_{n\to\infty} x = y$. Terlihat $|x - y| < \varepsilon, \varepsilon > 0$. Jadi, terbukti $d(x,y)$ konvergen.

Definisi 2.1.5

Barisan (X_n) dalam (X,d) dikatakan konvergen (ke *x*) jika dan hanya jika terdapat $x \in X$ sehingga $d(x_n, x) \to 0 (n \to \infty)$. Dapat ditulis $x = \lim x_n$ atau $x_n \to x$ dan *x* disebut limit dari barisan (x_n) (Maddox, 1970).

Definisi 2.1.6

a. Misalkan (X,d) ruang metrik. Himpunan $M \subset X$ dikatakan terbuka (*open*) jika setiap anggotanya (titiknya) merupakan titik dalam. Jadi, $M \subset X$ terbuka jika dan hanya jika untuk setiap $x \in M$ terdapat bilangan real $r > 0$ sehingga berlaku $B(x,r) \subset M$
b. Misalkan (X,d) ruang metrik. Himpunan $M \subset X$ dikatakan tertutup jika M^c terbuka (Kreyszig, 1989).

Contoh:

$C = [a,\infty)$ himpunan tertutup, sebab $C^c = [a,\infty)^c = (-\infty, a)$ terbuka.

Lemma 2.1.7 (Keterbatasan, Limit)

Jika $X = (X,d)$ adalah ruang metrik, maka:

i. Suatu barisan konvergen di *X* adalah terbatas dan limitnya adalah unik.

ii. Jika $x_n \to x$ dan $y_n \to y$ di X, maka $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ (Kreyszig, 1989).

Teorema 2.1.8

Setiap barisan konvergen di dalam ruang metrik merupakan barisan Cauchy (Kreyszig, 1989).

Bukti:

Jika $x_n \to x$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N = N(\varepsilon)$ sehingga $d(x_n, x) < {}^{\varepsilon}/_{2}$ untuk setiap $n > N$. Berdasarkan pertidaksamaan segitiga untuk $n, m > N$ $d(x_n, x_m) \le d(x_n, x) + d(x, x_m) < {}^{\varepsilon}/_{2} + {}^{\varepsilon}/_{2} = \varepsilon$. Hal ini menunjukkan bahwa (x_n) merupakan barisan Cauchy (Kreyszig, 1989).

Teorema 2.1.9

Setiap barisan Cauchy adalah terbatas (Parzynsky dan Zipse, 1987).

Bukti:

Jika $\{a_n\}$ barisan Cauchy maka untuk $\varepsilon = 1$ ada bilangan asli N sehingga $|a_m - a_n| < 1$ dimana $n, m > N$. Perhatikan bahwa untuk $n_0 > N$ maka $|a_n| = |a_n - a + a| \le |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$ untuk setiap $n > N$. Jika $M = maks(|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, 1 + |a|)$ jelas $|a_n| \le M$ untuk setiap bilangan asli N sehingga $\{a_n\}$ barisan terbatas.

2.2 Ruang Vektor

Definisi 2.2.1

Ruang vektor *V* adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan dua buah operasi, yaitu penjumlahan vektor dan perkalian dengan skalar real. Terhadap kedua operasi ini, *V* memenuhi semua sifat berikut:

i. $(V, +)$ merupakan grup komutatif

ii. $(V, .)$ memenuhi:

a. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

b. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

c. $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

d. $1.u = u$

Misalkan *X* suatu ruang vektor dan $\emptyset \neq Y \subset X$. Himpunan *Y* disebut subruang dari *X* jika untuk semua skalar α, β dan $y_1, y_2 \in Y$ berlaku $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$. Jelas bahwa untuk sebarang ruang vektor $X, Y = X$ dan $\{0\}$ keduanya juga merupakan subruang dari *X*. Kombinasi linier dari vektor-vektor $x_1, x_2, \dots, x_n$ di *X* adalah ekspresi $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ dengan $\alpha_i, i = 1,2, \dots, n$ merupakan skalar.

Untuk sebarang himpunan tak kosong $M \subset X$, himpunan semua kombinasi linier dari vektor-vektor di *M* membentuk subruang. Subruang ini dikatakan dibangun oleh *M*, dinotasikan *spanM* (Darmawijaya, 2007).

Teorema 2.2.2

Jika V suatu ruang vektor atas lapangan F, maka berlaku pernyataan-pernyataan berikut:

i. Untuk setiap $x, y \in V$ terdapat tepat satu $z \in V$ sehingga $x + z = y$

ii. Jika $z \in V$ dan $z + z = z$, maka $z = 0$ (0 vektor nol)

iii. $\alpha 0 = 0$ untuk setiap skalar α

iv. $0x = 0$ untuk setiap $x \in V$

v. $(-1)x = -x$ untuk setiap $x \in V$

vi. Jika α suatu skalar dan $x \in V$ sehingga $\alpha x = 0$, maka $\alpha = 0$ atau $x = 0$ (Darmawijaya, 2007).

2.3 Ruang Bernorma

Definisi 2.3.1

Misalkan X suatu ruang vektor atas R. Norm pada X didefinisikan sebagai fungsi $\|\cdot\|: X \to R$ yang memenuhi:

Suatu fungsi $x \in X \mapsto \| x \| \in R$ yang mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:

i. $\| x \| \geq 0$, untuk setiap $x \in X$

ii. $\| x \| = 0$, jika dan hanya jika $x = 0$, (0 vektor nol)

iii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \| x \|$ untuk setiap skalar $\alpha \in R$ dan $x \in X$

iv. $\|x + y\| \leq \| x \| + \| y \|$ untuk setiap $x, y \in X$

Disebut norma (norm) pada X dan bilangan nonnegatif $\| x \|$ disebut norma vektor x atau jarak antara vektor x dengan vektor nol. Selanjutnya, suatu ruang vektor X yang dilengkapi dengan suatu norma $|| \cdot ||$ disebut ruang bernorma (*norm space*) dan dituliskan singkat dengan $(X, ||\cdot||)$ atau *X* saja asalkan normanya telah diketahui (Darmawijaya, 2007).

Teorema 2.3.2

Ruang linier bernorm *X* dikatakan lengkap jika dan hanya jika setiap deret konvergen mutlak di *X* adalah konvergen (Maddox, 1970).

Lemma 2.3.3

Dalam ruang linier bernorm *X*, berlaku $\| x \| - \| y \| \leq \| x - y \|$ untuk setiap $x, y \in X$ (Maddox, 1970).

Bukti:

Untuk setiap $x, y \in X$, diperoleh:

$\| x \| - \| y \| = \| x - y + y \| - \| y \| \leq \| x - y \| + \| y \| - \| y \| = \| x - y \|$.

Contoh:

Misalkan $X = R^n = \{f = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) | \alpha_i \in R\}$ dan di definisikan fungsi $||\cdot||: X \rightarrow R$ dengan $\| f \| = (\sum_1^n \alpha_1{}^2)$. Dapat diperiksa bahwa $||\cdot||$ memenuhi sifat-sifat norm dan norm ini dikenal sebagai norm Euclid. Lebih lanjut, besaran $\| f \|$ dapat dimaknai sebagai panjang vektor *f*.

2.4 Kekonvergenan dan Kelengkapan

Definisi 2.4.1

Misalkan $(X, ||\cdot||)$ suatu ruang norm

i. Barisan (x_n) di *X* dikatakan konvergen jika terdapat $x \in X$ sehingga $\lim_{n\to\infty} || x_n - x || = 0$

ii. Barisan (x_n) di X dikatakan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat N sehingga untuk semua $m, n > N$ berlaku $||x_m - x_n|| < \varepsilon$

Jika setiap barisan Cauchy di X adalah konvergen maka X dikatakan sebagai ruang bernorm lengkap atau ruang Banach. Ruang-ruang R^n, ℓ^∞, ℓ^p masing-masing adalah lengkap. Tentu saja dalam suatu ruang vektor berdimensi hingga berlaku sifat bahwa semua norm adalah ekuivalen yang dinyatakan dalam teorema (ekuivalensi norm). Misalkan $\| x ||_\alpha$ dan $\| x ||_\beta$ masing-masing adalah norm di ruang berdimensi hingga V. Maka terdapat konstanta C_m dan C_n sehingga berlaku $C_m || x ||_\beta \leq || x ||_\alpha \leq C_n || x ||_\beta$. Konsekuensi penting dari teorema ini adalah bahwa setiap barisan Cauchy di ruang berdimensi hingga adalah konvergen. Dengan demikian diperoleh suatu fakta bahwa ruang bernorm berdimensi hingga adalah suatu ruang Banach (Darmawijaya, 2007).

Teorema 2.4.2

Suatu subruang Y dari ruang Banach X adalah lengkap jika dan hanya jika Y bersifat tutup di X (Darmawijaya, 2007).

Bukti:

(→) Misalkan Y suatu subruang lengkap di ruang Banach X, dan (x_n) suatu barisan di Y yang konvergen ke suatu elemen x. Jelas bahwa (x_n) suatu barisan Cauchy, karena Y lengkap maka haruslah $x \in Y$. Jadi Y tutup.

(←) Misalkan (x_n) suatu barisan Cauchy di Y karena X lengkap maka (x_n) konvergen ke suatu elemen $x \in X$. Karena Y tutup maka haruslah $x \in Y$.

2.5 Ruang Banach

Definisi 2.5.1

Ruang Banach (*Banach space*) adalah ruang bernorma yang lengkap (sebagai ruang metrik yang lengkap) jika dalam suatu ruang bernorm X berlaku kondisi bahwa setiap barisan Cauchy di X adalah konvergen (Darmawijaya, 2007).

Contoh:

Ruang Banach serta normnya $R^n = \{f = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) | \alpha_i \in R$ dengan $\| f \|$ $= (\sum_1^n \alpha_i{}^2)$.

Definisi 2.5.2

Diberikan ruang Banach j dan $X_n \in X$ untuk setiap $n \in N$.

i. Deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika jumlah parsial $s_{N=\sum_{n=1}^{N} x_n}$ konvergen ke x, yaitu untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N_0 \in N$, untuk setiap $N \in N, N \geq N_0$, berlaku

$\|x - S_N|| = ||x - \sum_{n=1}^{N} X_n|| < \epsilon$

ii. Deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ dikatakan Cauchy jika barisan $\{S_N\}$ merupakan barisan Cauchy di X, yaitu untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N_0 \in N$, untuk setiap $N, M \in N, N > M \geq N_0$, berlaku

$\|S_M - S_N|| = || \sum_{n=M+1}^{N} X_n|| < \epsilon$ (Belton, 2006).

2.6 Operator Linier

Definisi 2.6.1

Suatu pemetaan pada ruang vektor khususnya ruang bernorm disebut operator (Kreyszig, 1989).

Definisi 2.6.2

Misalkan *X* dan *Y* masing-masing adalah ruang bernorm. Suatu pemetaan T yang mengaitkan setiap unsur di domain $D(T) \in X$ dengan unsur tunggal $y \in Y$ disebut operator. Suatu operator *T* dikatakan linier jika memenuhi:

i. $D(T) \subseteq X$ suatu subruang

ii. Untuk semua $x, y \in D(T)$ dan skalar α berlaku

a. $T(x + y) = T(x) + T(y)$ (aditif)

b. $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ (homogenitas)

Suatu operator *T* dikatakan terbatas jika terdapat suatu konstanta *M* sehingga berlaku $\|T_x|| \leq M\| x \|$ $x \in X$ dan norm operator tersebut didefinisikan sebagai $\| T \| = \text{Sup}_{x \neq 0} \frac{||T_x||}{||x||}$ yang tidak lain merupakan bilangan *M* terkecil yang memenuhi $\| T_x \| \leq M\| x \|, x \in X$ (Daners, 2006).

Definisi 2.6.3

T operator linier jika dan hanya jika $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ (Kreyszig, 1989).

Teorema 2.6.4

Jika *T* suatu operator linier yang kontinu di suatu titik $x \in X$ maka *T* terbatas dan kontinu di setiap titik (Kreyszig,1989).

2.7 Pemetaan Buka

Definisi 2.7.1 (Pemetaan buka)

Misalkan *X* dan *Y* ruang metrik. Pemetaan $T: M \to Y$ dengan $M \subset X$ disebut pemetaan buka jika $U \subset M$ adalah himpunan buka, maka $T(U) \subset Y$ dengan kata lain *T* diambil dari himpunan buka ke himpunan buka (Rudin, 1973).

Teorema 2.7.2

Misalkan *X* dan *Y* ruang Banach. Pemetaan $T: X \to Y$ adalah kontinu jika dan hanya jika $U \subset Y$ adalah himpunan buka sehingga
$T^{-1}(U) = \{x \in X | T(x) \in U\}$ (Rudin, 1973).

Teorema 2.7.3 (Pemetaan Buka)

Misalkan *X*, *Y* ruang Banach. Dan $T: X \to Y$ pemetaan linier surjektif, maka T disebut pemetaan buka (Rudin, 1973).

2.8 Teorema Grafik Tertutup

Definisi 2.8.1

Misalkan *X* dan *Y* adalah suatu ruang bernorm, $T: M \to Y$ adalah pemetaan linier dengan *M* subruang dari *X*. Maka notasi $G(T) = \{(x, T(x)) | x \in M\}$ disebut grafik dari *T*. Kemudian norm dari $G(T)$ didefinisikan sebagai berikut $\left||x, T(x)|\right| = \left||x|\right| + ||T(x)||$ (Rudin, 1973).

Definisi 2.8.2

Misalkan *X* dan *Y* adalah suatu ruang Banach, $T: M \to Y$ adalah pemetaan linier dengan *M* subruang dari *X*. *T* disebut tutup jika barisan $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ di *M* dengan $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ dan $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = y$, berlaku $x \in M$ dan $y = T(x)$ (Rudin, 1973).

Definisi 2.8.3

Misalkan X dan Y adalah dua ruang bernorm. Pemetaan linier $T: X \to Y$ dikatakan terbatas jika T kontinu di X (Rudin, 1973).

Teorema 2.8.4 Grafik Tertutup (The Closed Graph Theorem)

Misalkan X dan Y adalah suatu ruang Banach dan M subruang dari X dan $T: M \to Y$ adalah pemetaan linier. Jika M dan $G(T)$ keduanya tutup maka T terbatas (Rudin, 1973).