PENERAPAN HIMPUNAN *ROUGH* PADA STRUKTUR SEMIGRUP MENGGUNAKAN KONSEP PRABA

Skripsi

Oleh

BIDARI TASYA SALSABILA
2017031013

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

ABSTRAK

APPLICATION OF ROUGH SETS TO SEMIGROUP STRUCTURE USING THE CONCEPT OF PRABA

By

Bidari Tasya Salsabila

An information system is formed based on the universal set U and the attributes A, which are expressed with the notation (U, A) and the membership value of the set. The fuzzy and form equivalence classes are based on $IND(P)$. If given set $X \subseteq U$, the set of ordered pairs of upper approximations of $\overline{Apr}(X)$ and the lower approximation of $\underline{Apr}(X)$ is called a rough set if $\overline{Apr}(X) - \underline{Apr}(X) \neq \emptyset$, then given the set of all defined rough sets $T = \{RS(X)|X \subseteq U\}$. In this study, rough semigroups were constructed using the Praba concept with operations $\triangle$ and $\triangledown$ and provided construction examples of rough semigroups and their properties using the Praba concept, as well as a program to prove rough semigroups with operations $\triangle$ and $\triangledown$ using the Praba concept.

Keywords: *Indiscernibility relation, Approximation space, Rough set, Rough semigroup, Praba concept*

ABSTRAK

PENERAPAN HIMPUNAN *ROUGH* PADA STRUKTUR SEMIGRUP MENGGUNAKAN KONSEP PRABA

Oleh

Bidari Tasya Salsabila

Suatu sistem informasi dibentuk berdasarkan himpunan semesta U dan atribut A yang dinyatakan dengan notasi (U, A) dengan nilai keanggotaan himpunan *fuzzy* membentuk kelas-kelas ekuivalensi berdasarkan $IND(P)$, jika diberikan himpunan $X \subseteq U$, maka himpunan pasangan berurut aproksimasi atas $\overline{Apr}(X)$ dan aproksimasi bawah $\underline{Apr}(X)$ disebut himpunan *rough* jika $\overline{Apr}(X) - \underline{Apr}(X) \neq \emptyset$, selanjutnya diberikan himpunan dari semua himpunan *rough* yang didefinisikan $T = \{RS(X)|X \subseteq U\}$. Pada penelitian ini dikontruksi semigrup *rough* menggunakan konsep Praba dengan operasi $\triangle$ dan $\triangledown$ serta diberikan contoh kontruksi semigrup *rough*. Selain itu, diberikan sifat-sifat semigrup *rough* menggunakan konsep Praba, serta dibuat program untuk menentukan semigrup *rough* dengan operasi $\triangle$ dan $\triangledown$ menggunakan konsep Praba.

Kata-kata kunci: *Relasi indiscernibility, ruang aproksimasi, himpunan rough, semigrup rough, konsep praba*

PENERAPAN HIMPUNAN *ROUGH* PADA STRUKTUR SEMIGRUP MENGGUNAKAN KONSEP PRABA

BIDARI TASYA SALSABILA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

Judul Skripsi : **PENERAPAN HIMPUNAN *ROUGH* PADA STRUKTUR SEMIGRUP MENGGUNAKAN KONSEP PRABA**

Nama Mahasiswa : **Bidari Tasya Salsabila**

Nomor Pokok Mahasiswa : **2017031013**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**
NIP 198406272006042001	NIP 198002062003121003

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim penguji

Ketua	:	**Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**	....
Sekretaris	:	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Prof. Dra. Wamiliana, MA.,Ph.D.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **23 Januari 2024**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Bidari Tasya Salsabila**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2017031013**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Penerapan Himpunan *Rough* Pada Struktur Semigrup Menggunakan Konsep Praba**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 23 Januari 2024

Penulis,

Bidari Tasya Salsabila

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Bidari Tasya Salsabila yang lahir di Palebang pada tanggal 29 Juni 2002. Penulis merupakan anak pertama dari dua bersaudara yang terlahir dari pasangan Badriyadi dan Marina Suhairi.

Penulis menempuh awal pendidikan di TK Kuntum Mekar pada tahun 2007 sampai dengan tahun 2008. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan Sekolah Dasar di SD Negeri 3 Labuhan Dalam pada tahun 2008 sampai tahun 2014. Kemudian, penulis melanjutkan Pendidikan Sekolah Menengah Pertama di SMP Negeri 19 Bandar Lampung pada tahun 2014 sampai tahun 2017. Penulis melanjutkan Sekolah Menengah Atas di SMA Negeri 5 Bandar Lampung.

Pada tahun 2020, penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa S1 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung (Unila) melalui jalur SNMPTN. Selama menjadi mahasiswa, pada tahun 2020 penulis merupakan anggota Bidang Keilmuan Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) FMIPA Unila.

Pada bulan Januari sampai Februari 2023, sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu kepada masyarakat, penulis melaksanakan kegiatan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Sripurnomo, Kecamatan Kalirejo, Kabupaten Lampung Tengah. Pada bulan Juni sampai Agustus penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Dinas Bina Marga dan Bina Kontruksi Provinsi Lampung.

KATA INSPIRASI

”Aku menyerahkan urusanku kepada Allah. Sungguh, Allah Maha Melihat akan hamba-hambanya”

(Q.S Al-Ghafir: 44)

”Tidak ada kekuatan kecuali dengan (pertolongan) Allah”

(Q.S. Al-Kahf: 39)

”Belajarlah mengucap syukur dari hal-hal baik dihidupmu dan belajarlah menjadi kuat dari hal-hal buruk dihidupmu”

(B.J. Habibie)

”Ada dua jenis orang di dunia ini: mereka yang ingin menyelesaikan sesuatu dan mereka yang tidak ingin melakukan kesalahan”

(John C.Maxwell)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin,

Puji dan syukur kehadirat Allah Subhanahu Wata'ala atas limpahan nikmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad Shallallahu 'Alaihi Wasallam.

Dengan penuh syukur, kupersembahkan karya ini kepada:

Keluarga Tercinta

Terimakasih kepada keluargaku untuk semua do'a, kasih sayang, serta nasehat yang diberikan. Terimakasih seluruh keluargaku karena sudah mendukungku dalam segala hal dan selalu memberikan semangat.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat berjasa dalam membantu, memberikan masukan, arahan, serta ilmu yang berharga.

Sahabat – Sahabatku

Terimakasih kepada sahabat – sahabatku atas semua do'a, dukungan, semangat, serta canda tawa keceriaan selama masa perkuliahan ini.

Almamater Tercinta Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul ”Penerapan Himpunan *Rough* Pada Struktur Semigrup Menggunakan Konsep Praba” dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing I sekaligus pembimbing akademik atas kesediaan waktu dalam memberikan arahan, motivasi, bimbingan, serta saran kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikanskripsi ini.

2. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan, serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyeesaikan skripsi ini.

3. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi yang membangun kepada penulis selama proses penyusunan skripsi ini.

4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

5. Bapak Amanto, S.Si., M.Si. (Alm.) dan Ibu Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si. selaku dosen pembimbing akademik.

6. Seluruh dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Papa, mama, adek Berly dan keluarga besar yang selalu memotivasi, memberikan dukungan dan do’a kepada penulis.
8. Terimakasih kepada diriku sendiri karena sudah berjuang dan bertahan sejauh ini.
9. Untuk Lisa , Aira, Anisa (Aem), Fegy, Yulian, Adel, Chintya, dan Catherine terimakasih untuk semua motivasi, dukungan, semangat, kebersamaan serta kenangan yang indah dalam menjalani perkuliahan dan selama proses penyusunan skripsi ini.
10. Teman – teman keluarga beringin, terimakasih atas segala pengalaman dan kebersamaan selama ini.
11. Teman – teman KKN Sri Purnomo, untuk segala kebersamaan dan dukungan selama ini.
12. Teman – teman satu bimbingan, Lisa, Aira, Sandi, dan Anggita yang telah memberikan semangat, motivasi maupun saran kepada penulis.
13. Teman – teman Jurusan Matematika angkatan 2020 yang sudah banyak membantu selama masa perkuliahan.
14. Semua pihak yang membantu dalam proses penyusunan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebut satu persatu.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung,

Bidari Tasya Salsabila

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Himpunan *Rough* pertama kali dikembangkan oleh Zdzislaw Pawlak ilmuwan asal Polandia pada tahun 1982. Teori ini membantu mengklasifikasikan dan menganalisis suatu data yang memiliki informasi yang tidak pasti dan tidak lengkap. Konsep himpunan *rough* mencakup dua bagian yaitu aproksimasi atas (*upper approximation*) dan aproksimasi bawah (*lower approximation*) yang dapat membantu mengidentifikasi informasi yang sudah diketahui dan informasi yang masih tidak pasti pada suatu data.

Suatu aproksimasi dibentuk berdasarkan relasi ekuivalen yang merupakan suatu relasi yang memenuhi sifat refleksi, sifat simetris, dan sifat transitif. Pasangan berurut himpunan semesta U dan relasi ekuivalen A yang dinyatakan dengan notasi (U, A) disebut sebagai ruang aproksimasi. Jika terdapat himpunan $X \subseteq U$, aproksimasi atas dari X pada suatu ruang aproksimasi (U, A) dinyatakan dengan notasi $\overline{Apr}(X)$, dan aproksimasi bawah dari X pada suatu ruang aproksimasi (U, A) dinyatakan dengan notasi $\underline{Apr}(X)$. Selanjutnya himpunan pasangan berurut aproksimasi atas dan aproksimasi bawah yang dinotasikan dengan $Apr(X)$ merupakan himpunan *rough* jika $\overline{Apr}(X) - \underline{Apr}(X) \neq \varnothing$.

Himpunan *rough* sebelumnya telah dibahas oleh beberapa peneliti diantara lain, Praba dkk. pada tahun 2013 pertama kali mengembangkan konsep himpunan *rough lattice* (Praba dkk., 2013), kemudian pada tahun yang sama Praba dkk. juga mengkaji mengenai penerapan himpunan *rough* pada monoid regular komutatif (Praba dkk., 2013). Sinha dan Prakas pada tahun 2015 membahas mengenai modul proyektif *rough* (Sinha dan Prakash, 2015). Penelitian dikembangkan kembali oleh Praba dkk. pada tahun 2015 dengan mengkaji tentang penerapan himpunan *rough* pada semiring (Praba dkk., 2015). Pada tahun 2016 Praba dkk. mengkaji mengenai graf total dan graf komplemen dari *rough* semiring (Praba dkk., 2016). Penelitian selanjutnya dilakukan oleh Wang dan Zhan pada tahun 2016 yang membahas mengenai *rough* semigrup dan *rough fuzzy* berdasarkan ideal *fuzzy* (Wang dan Zhan, 2016), kemudian pada tahun 2017 Jesmalar mengkaji homomorfisma dan isomorfisma dari *rough* grup (Jesmalar, 2017). Selanjutnya penelitian terbaru oleh Nugraha dkk. pada tahun 2022 membahas mengenai penerapan konsep himpunan kesat (*rough* set) pada stuktur grup (Nugraha dkk., 2022), Hafifullah dkk. pada tahun 2022 membahas mengenai sifat-sifat barisan V-Koeksak *rough* dalam grup *rough* (Hafifullah dkk., 2022), dan pada tahun 2023 Yanti membahas mengenai penerapan konsep himpunan *rough* pada struktur modul proyektif (Yanti dkk., 2023).

Berdasarkan perkembangan penelitian yang telah diuraikan sebelumnya, pada penelitian ini akan dibahas mengenai penerapan himpunan *rough* pada struktur semigrup, serta menyelidiki sifat-sifat semigrup menggunakan konsep Praba serta membuat program *python* untuk menentukan suatu himpunan *rough* merupakan semigrup *rough*.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah:

1. mengkontruksi semigrup *rough* menggunakan konsep Praba dengan operasi $\triangle$ dan $\triangledown$ serta menyelidiki sifat-sifatnya;
2. membuat program untuk menentukan semigrup *rough* pada himpunan berhingga.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah:

1. menambah pengetahuan yang berkaitan dengan struktur aljabar terutama pada himpunan *rough*;

2. mengembangkan pengetahuan tentang penerapan himpunan *rough* dalam semigrup menggunakan konsep Praba serta sebagai referensi untuk penelitian lebih lanjut.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai definisi himpunan, semigrup, himpunan *fuzzy*, ruang aproksimasi, himpunan *Rough* (*Rough set*), semigrup *Rough* (*Rough* semigroup), dan konsep Praba (Praba *concept*).

2.1 Himpunan

Himpunan merupakan kumpulan objek-objek sebarang yang memiliki karakteristik berbeda. Konsep himpunan dikembangkan pertama kali oleh matematikawan asal Jerman yaitu Georg Cantor. Penggunaan himpunan dalam matematika yaitu untuk menganalisis dan mengelompokkan suatu data berdasarkan sifat atau aturan tertentu.

Definisi 2.1.1 Himpunan (*set*) adalah koleksi atau kumpulan objek-objek yang berbeda. Objek-objek yang terdapat dalam himpunan disebut elemen, unsur, atau anggota (Munir, 2012).

Definisi 2.1.2 Individu dari sebuah himpunan A dinamakan anggota dari A. Jika x adalah anggota dari himpunan A, maka ditulis $x \in A$ dan jika x bukan angota dari himpunan A, maka ditulis $x \notin A$ (Pinontoan dan Titaley, 2019).

Didefinisikan operasi – operasi pada himpunan sebagai berikut:

1. Selisih dari sebarang dua himpunan A dan B di lambangkan dengan $A - B$. Dalam bentuk simbol : $A - B = \{x|x \in A$ dan $x \notin B\}$.
2. Gabungan dari sebarang dua himpunan A dan B di lambangkan dengan $A \cup B$. Dalam bentuk simbol : $A \cup B = \{x|x \in A$ atau $x \in B\}$.

3. Irisan dari sebarang dua himpunan A dan B dilambangkan dengan $A \cup B$. Dalam bentuk simbol : $A \cap B = \{x|x \in A$ dan $x \in B\}$ (Usman, 2022).

Contoh 2.1.3 Berikut diberikan contoh himpunan dan operasi- operasi pada himpunan.

1. Himpunan A yang berisi bilangan prima antara 1 sampai 50 adalah

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}.$$

2. Himpunan A dan B menyatakan mata pelajaran sekolah, jika himpunan $A = \{$ Biologi, Kimia, Fisika, Matematika$\}$ dan himpunan $B = \{$ Sosiologi, Geografi, Ekonomi, Matematika$\}$ maka $A \cup B = \{$Biologi, Kimia, Fisika, Matematika, Sosiologi, Geografi, Ekonomi$\}$, sedangkan $A \cap B = \{$ Matematika$\}$ dan $A - B = \{$Biologi, Kimia, Fisika$\}$.

Selain menjelaskan definisi himpunan, akan dijelaskan pula mengenai kardinalitas dari suatu himpunan. Selain menjelaskan definisi dari himpunan, akan dijelaskan pula mengenai kardinalitas dari suatu himpunan.

Definisi 2.1.4 Sebuah himpunan dikatakan berhingga (*finite set*) jika terdapat n - elemen berbeda (*distinct*) yang dalam hal ini n adalah bilangan bulat tak-negatif. Sebaliknya himpunan tersebut dinamakan tak-berhingga (*infinite set*). Misalkan A merupakan himpunan berhingga, maka jumlah elemen berbeda di dalam A disebut kardinal dari himpunan A, yang dinotasikan dengan $n(A)$ atau $|A|$ (Munir, 2012).

Contoh 2.1.5 Berikut ini contoh kardinalitas dari suatu himpunan. Jika terdapat himpunan $A = \{$Biologi, Kimia, Fisika, Matematika, Sosiologi, Geografi, Ekonomi$\}$, maka $n(A) = 7$.

Setelah mengetahui definisi kardinalitas dari suatu himpunan, selanjutnya akan - diberikan definisi mengenai himpunan kosong (*empty set*), himpunan kuasa (*power set*), himpunan bagian (*subset*), perkalian kartesian (*cartesian product*), relasi, dan relasi ekuivalensi.

Definisi 2.1.6 Himpunan dengan kardinal $|A| = 0$ atau $n(A) = 0$ disebut dengan himpunan kosong (*empty set*), yang dinotasikan dengan $\emptyset, \{\}$(Wibisono, 2008).

Contoh 2.1.7 Diberikan himpunan A, jika himpunan A menyatakan himpunan-bilangan asli yang kurang dari 1 yang dinotasikan dengan $A = \{x|x < 1, x \in N\}$. Karena tidak ada bilangan asli yang kurang dari 1, maka $n(A) = 0$ sehingga himpunan A merupakan himpunan kosong.

Definisi 2.1.8 Untuk sebarang himpunan A, himpunan dari semua kemungkinan himpunan bagian dari A dinamakan himpunan kuasa dari A. Himpunan kuasa A dilambangkan dengan $P(A)$. Jika A mempunyai n unsur berbeda, maka $P(A)$ mempunyai 2^n unsur (Usman, 2022).

Contoh 2.1.9 Diberikan himpunan $A = \{\text{i,e,o}\}$, terdapat 3 unsur yang berbeda pada himpunan A sehingga diperoleh $n = 3$. Oleh karena itu, banyaknya unsur himpunan kuasa dari A adalah $P(A) = 2^3 = 8$. Himpunan kuasa dari A sebagai berikut:

$$P(A) = \{\emptyset, \{\text{i}\}, \{\text{e}\}, \{\text{o}\}, \{\text{i,e}\}, \{\text{i,o}\}, \{\text{e,o}\}, A\}.$$

Definisi 2.1.10 Himpunan A dikatakan himpunan bagian (*subset*) dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen dari B yang dinotasikan dengan $A \subseteq B$. Dalam hal ini, B dikatakan *superset* dari A (Munir, 2012).

Contoh 2.1.11 Diberikan himpunan $A = \{x|x \text{ bilangan komposit} < 15\}$ dan himpunan $B = \{x|x \text{ bilangan asli} < 20\}$. Diperoleh $A \subseteq B$ karena himpunan $A = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14\}$ dengan setiap elemen himpunan A merupakan elemen dari himpunan B.

Definisi 2.1.12 Perkalian kartesian dari himpunan A dan B adalah himpunan yang elemennya semua pasangan berurut (*ordered pairs*) yang dibentuk dari komponen pertama dari himpunan A dan komponen kedua dari himpunan B yang dinotasikan dengan:

$$A \times B = \{(a, b)|a \in A \text{ dan } b \in B\}$$

(Munir, 2012).

Contoh 2.1.13 Diberikan himpunan $A = \{x|x$ bilangan komposit $< 10\}$ dan himpunan $B = \{$i, e, o$\}$, perkalian kartesian A dan B adalah sebagai berikut:
$A \times B = \{(1, i), (4, i), (6, i), (8, i), (9, i), (1, e), (4, e), (6, e), (8, e), (9, e), (1, o), (4, o), (6, o), (8, o), (9, o)\}$.

Definisi 2.1.14 Diberikan himpunan A dan B. Suatu relasi dari A ke B adalah himpunan bagian dari $A \times B$. Jika $(a, b) \in R$, maka dikatakan bahwa a adalah R relasi terhadap b dan dinotasikan dengan aRb. Jika $(a, b) \notin R$, maka a tidak berelasi R terhadap b (Usman, 2022).

Contoh 2.1.15 Berdasakan Contoh 2.1.13, diperoleh contoh relasi sebagai berikut:
$R_1 = \{(1, i), (4, i), (6, i), (8, i)\} \subset A \times B$ adalah relasi dari A ke B.
$R_2 = \{(i, 1), (i, 4), (e, 6), (o, 9)\} \subset B \times A$ adalah relasi dari B ke A.

Definisi 2.1.16 Suatu relasi R dari A ke A dikatakan relasi ekuivalen jika dan hanya jika memenuhi sifat sifat berikut:

1. $(a, a) \in R$ untuk setiap $a \in A$. Ini dinamakan sifat refleksi R.

2. jika $(a, b) \in R$, maka $(b, a) \in R$. Ini dinamakan sifat simetris dari R.

3. jika $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$, maka $(a, c) \in R$. Ini dinamakan sifat transitif R.

Syarat tersebut juga dapat dinyatakan dengan R bersifat refleksi jika aRa untuk setiap $a \in A$, R bersifat simetris jika aRb maka bRa, dan R bersifat transitif jika dan hanya jika aRb dan bRc maka aRc (Usman, 2022).

Contoh 2.1.17 Diberikan himpunan $U = \mathbb{Z}_9 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}\}$. Didefinisikan relasi R dari $\mathbb{Z}_9$ ke $\mathbb{Z}_9$ yaitu aRb dengan $a, b \in \mathbb{Z}_9$ jika dan hanya jika $a + 3b = 2n$, dengan $n \in \mathbb{Z}$. Akan dibuktikan bahwa R merupakan relasi ekuivalensi.

1. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_9$, berlaku aRa karena $a + 3a = 4a = 2(2a)$ dengan $2a \in \mathbb{Z}_9$. Oleh karena itu, relasi R bersifat refleksif.

2. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_9$, jika aRb maka $a+3b = 2n$ untuk $n \in \mathbb{Z}$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
a + 3b &= 2n \\
3b + a &= 2n \\
9b + 3a &= 6n \\
8b + b + 3a &= 6n \\
b + 3a &= 6n - 8b \\
b + 3a &= 2(3n - 4b),
\end{aligned}$$

dengan $(3n - 4b) \in \mathbb{Z}$. Jadi bRa, sehingga relasi R bersifat simetris.

3. Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_9$, jika aRb dan bRc maka $a+3b = 2n$ dan $b+3c = 2m$ untuk $n, m \in \mathbb{Z}$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
(a + 3b) + (b + 3c) &= 2n + 2m \\
a + 4b + 3c &= 2n + 2m \\
a + 3c &= 2n + 2m - 4b \\
a + 3c &= 2(n + m - 2b),
\end{aligned}$$

dengan $(n + m - 2b) \in \mathbb{Z}$. Jadi aRc, sehingga relasi R bersifat transitif.

Dari (1), (2), dan (3) maka terbukti bahwa relasi R merupakan relasi ekuivalensi.

2.2 Semigrup

Sebelum mendefinisikan semigrup, penting untuk memahami beberapa konsep dasar dalam matematika yang akan terkait dengan definisi semigrup, konsep dasar itu termasuk himpunan, operasi biner, dan grup. Pada Definisi 2.1.1 telah dijelaskan mengenai definisi himpunan, selanjutnya akan didefinisikan mengenai operasi biner dan grup.

Definisi 2.2.1 Suatu operasi biner $*$ pada himpunan tak kosong S adalah pemetaan yang mengasosiasikan setiap pasangan terurut (a, b) dari elemen S yang terdefinisi secara unik $a * b$ dari S. Singkatnya, operasi biner pada himpunan S adalah pemetaan $S \times S$ ke S (Ayres & Jaisingh, 2004).

Contoh 2.2.2 Berikut diberikan contoh operasi biner.

1. Diberikan himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Didefinisikan $* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $*(a, b) = a * b = 1 + 2ab$, untuk setiap $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
   Diberikan sebarang $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ dengan $(a, b) = (c, d)$. Oleh karena itu,
   $$*(a, b) = a * b = 1 + 2ab = 1 + 2cd = c * d = *(c, d).$$
   Jadi $*$ merupakan operasi biner.

2. Diberikan himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$. Operasi pembagian pada himpunan bilangan real bukan merupakan operasi biner, karena $\frac{a}{b}$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ tidak terdefinisi jika $b = 0$.

Selanjutnya akan didefinisikan mengenai grup.

Definisi 2.2.3 Grup adalah himpunan S dengan operasi biner $* : S \times S \to S$ yang memenuhi syarat-syarat berikut:

1. $a * (b * c) = (a * b) * c$ untuk setiap $a, b, c \in S$ (bersifat asosiatif);

2. terdapat suatu elemen $e \in S$ sehingga $a * e = e * a = a$ untuk setiap $a \in S$ (adanya suatu elemen identitas);

3. untuk setiap $a \in S$ terdapat $a, b \in S$ sehingga $a * b = b * a = e$ (adanya invers untuk setiap $a \in S$) (Adkins dan Weintraub, 1999).

Contoh 2.2.4 Diberikan himpunan bilangan bulat $3\mathbb{Z} = \{3n | n \in \mathbb{Z}\}$ terhadap - operasi biner $*$, yang didefinisikan $a * b = a + b$ untuk setiap $a, b \in 3\mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan $(3\mathbb{Z}, *)$ merupakan grup.

1. Diberikan sebarang $a, b, c \in 3\mathbb{Z}$, dengan $a = 3x, b = 3y$, dan $c = 3z$, untuk suatu bilangan bulat x, y, dan z. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= (a + b) + c \\ &= (3x + 3y) + 3z \\ &= 3x + (3y + 3z) \\ &= a + (b + c) \\ &= a * (b * c).\end{aligned}$$

   Terbukti bahwa $*$ pada himpunan $3\mathbb{Z}$ bersifat asosiatif.

2. Diberikan sebarang $a \in 3\mathbb{Z}$, dengan $a = 3x$, untuk suatu bilangan bulat x. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}a * 0 &= a + 0 \\ &= 3x + 0 \\ &= 3x \\ &= a.\end{aligned} \qquad \begin{aligned}0 * a &= 0 + a \\ &= 0 + 3x \\ &= 3x \\ &= a.\end{aligned}$$

   Terbukti bahwa terdapat elemen identitas yaitu $0 \in 3\mathbb{Z}$.

3. Diberikan sebarang $a \in 3\mathbb{Z}$, dengan $a = 3x$, untuk suatu bilangan bulat x. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}a * (-a) &= a + (-a) \\ &= 3x + (-3x) \\ &= 0.\end{aligned} \qquad \begin{aligned}(-a) * a &= (-a) + a \\ &= (-3x) + 3x \\ &= 0.\end{aligned}$$

   Terbukti bahwa setiap $a \in 3\mathbb{Z}$ memiliki invers.

Dari (1), (2), dan (3) terbukti bahwa $(3\mathbb{Z}, *)$ merupakan grup.

Seteleh mengetahui definisi dari konsep dasar semigrup, selanjutnya akan diberikan definisi tentang semigrup.

Definisi 2.2.5 Suatu operasi biner $*$ pada himpunan tak kosong S didefinisikan $*: S \times S \to S$ operasi ini bersifat asosiatif jika $a(bc) = (ab)c$ untuk setiap $a, b, c \in S$. Semigrup merupakan himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner yang bersifat asosiatif (Cain, 2014).

Contoh 2.2.6 Diberikan himpunan $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} | a, b, c \in \mathbb{Q} \text{ dan } ac = 1 \right\}$ dengan operasi perkalian matriks $\times$. Akan ditunjukkan bahwa $(M, \times)$ merupakan semigrup.

1. Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \in M$ dengan $a_1c_1 = 1$ dan $a_2c_2 = 1$. Oleh karena itu,

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 + b_1c_2 \\ 0 & c_1c_2 \end{bmatrix}.$$

   Karena $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$, maka $a_1a_2, a_1b_2 + b_1c_2, c_1c_2 \in \mathbb{Q}$ dan $(a_1a_2).(c_1c_2) = (a_1c_1).(a_2c_2) = 1.1 = 1$.
   Terbukti operasi perkalian matriks $\times$ bersifat tertutup.

2. Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & c_3 \end{bmatrix} \in M$ dengan $a_1c_1 =$

$1, a_2c_2 = 1$, dan $a_3c_3 = 1$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & c_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 + b_1c_2 \\ 0 & c_1c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & c_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1a_2a_3 & a_1a_2b_3 + a_1b_2c_3 + b_1c_2c_3 \\ 0 & c_1c_2c_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2a_3 & a_2b_3 + b_2c_3 \\ 0 & c_2c_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & c_3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Karena $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & c_3 \end{bmatrix}$ dan $(a_1a_2a_3).(c_1c_2c_3) = (a_1c_1).(a_2c_2).(a_3c_3) = 1.1 = 1.$

Terbukti operasi perkalian matriks $\times$ bersifat asosiatif.

Dari (1) dan (2) terbukti bahwa $(M, \times)$ merupakan semigrup.

Selanjutnya, akan didefinisikan elemen identitas suatu semigrup dan monoid.

Definisi 2.2.7 Misalkan $e \in S$. Jika $ex = x$ untuk setiap $x \in S$, maka e adalah identitas kiri. Jika $xe = x$ untuk setiap $x \in S$, maka e adalah identitas kanan. Jika $ex = xe = x$ untuk setiap $x \in S$, maka e adalah identitas dua sisi. Semigrup yang terdapat elemen identitas disebut monoid (Cain, 2014).

Contoh 2.2.8 Berdasarkan Contoh 2.8.11 telah dibuktikan bahwa himpunan M bersama operasi perkalian matriks $\times$ merupakan semigrup. Akan ditunjukkan bahwa $(M, \times)$ merupakan monoid. Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in M$ dengan $ac = 1$. Oleh karena itu,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}.$$

Terbukti bahwa terdapat elemen identitas yaitu $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M.$

Jadi, $(M, \times)$ merupakan monoid.

Setelah mengetahui definisi semigrup dan monoid, akan didefinisikan mengenai elemen *idempotent* dan *band*.

Definisi 2.2.9 Diberikan semigrup S dan $a \in S$. Jika $a = a^2 = aa$, maka a disebut elemen *idempotent* (Clifford, 1954).

Definisi 2.2.10 Suatu semigrup S yang setiap elemennya merupakan elemen *idempotent* disebut *band* (Clifford, 1954).

Contoh 2.2.11 Diberikan himpunan tak kosong $X = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{9}, \overline{16}\} \subseteq \mathbb{Z}_{24}$ terhadap operasi biner $\cdot_{24}$. Akan ditunjukkan himpunan X merupakan *band*. Setiap elemen himpunan X terhadap operasi biner $\cdot_{24}$ merupakan elemen *idempotent* dinyatakan dalam tabel *Cayley* berikut.

Tabel 2.1 Tabel *Cayley* perkalian *idempotent*

$\cdot_{24}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{9}$	$\overline{16}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{9}$	$\overline{16}$
$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$
$\overline{16}$	$\bar{0}$	$\overline{16}$	$\bar{0}$	$\overline{16}$

Berdasarkan Tabel 2.1 telah ditunjukkan bahwa untuk setiap $a, b, c \in X$, berlaku $a \cdot_{24} b \in X$, dan memenuhi sifat asosiatif untuk setiap $a, b, c \in X$ berlaku $a \cdot_{24} (b \cdot_{24} c) = (a \cdot_{24} b) \cdot_{24} c$, serta setiap elemen dari himpunan X merupakan elemen *idempotent*. Jadi, terbukti bahwa himpunan X merupakan *band*.

2.3 Himpunan *fuzzy*

Himpunan *fuzzy* pertama kali dikembangkan oleh Lotfi A. Zadeh, ilmuwan asal Amerika Serikat pada tahun 1965. Pada bagian ini akan didefinisikan himpunan *fuzzy*.

Definisi 2.3.1 Diberikan himpunan F dari domain X. Fungsi keanggotaan $\mu_F(x)$ dari himpunan F adalah sebuah fungsi yang menempatkan nilai atau derajat keanggotaan ke setiap $x \in F, \mu : X \rightarrow [0,1]$. Himpunan F disebut sebuah himpunan *fuzzy* (Muis, 2018).

Definisi 2.3.2 Keanggotaan suatu elemen di dalam himpunanf *fuzzy* dinyatakan dengan derajat keanggotaan yang nilainya terletak di dalam selang $[0,1]$.

$$\mu_F : X \rightarrow [0,1].$$

Arti derajat keanggotaan adalah sebagai berikut:

1. jika $\mu_F(x) = 1$, maka x adalah anggota penuh dari himpunan A;
2. jika $\mu_F(x) = 0$, maka x adalah bukan anggota himpunan A;
3. jika $\mu_F(x) = \mu$, dengan $0 < \mu < 1$, maka x adalah anggota himpunan A derajat keanggotaan sebesar μ (Munir, 2012).

Contoh 2.3.3 Diberikan himpunan $S = \{1,2,3,4,5\}$ dan $F \subset S$ jika $\mu_F(x) = \frac{30-2x}{40}$, dengan $x \in S$. Akan ditentukan himpunan *fuzzy* F. Didefinisikan derajat keanggotaan sebagai berikut:

$$\mu_F(1) = 0,7;$$

$$\mu_F(2) = 0,65;$$

$$\mu_F(3) = 0,6;$$

$$\mu_F(4) = 0,55;$$

$$\mu_F(5) = 0,5.$$

Oleh karena itu, diperoleh himpunan *fuzzy* F

$$F = \{(1|0,7); (2|0,65); (3|0,6); (4|0,55); (5|0,5)\}.$$

Diberikan himpunan $S = \{$sakit mata, sariawan, migrain, maag, anemia$\}$ dan himpunan $A =$ himpunan penyakit yang menunjukkan gejala awal pusing dan sakit perut. Didefinisikan bahwa

$x_1 =$ sakit mata, $\mu_F(x_1) = 0,3;$

$x_2 =$ sariawan, $\mu_F(x_2) = 0;$

$x_3 =$ migrain, $\mu_F(x_3) = 0,8;$

$x_4 =$ maag, $\mu_F(x_4) = 0,4;$

$x_5 =$ anemia, $\mu_F(x_5) = 0,3.$

Diperoleh dalam himpunan *fuzzy* F.

$$F = \{(\text{sakit mata}|0,3), (\text{sariawan}|0), (\text{migrain}|0,8), (\text{maag}|0,4), (\text{anemia}|0,3)\}.$$

2.4 Relasi *Indicernibility*

Setelah memahami definisi himpunan *fuzzy*, selanjutnya pada bagian ini akan didefinisikan relasi *indiscernibility*.

Definisi 2.4.1 Misalkan himpunan $P \subseteq R$, terdapat kelas ekuilvalen $IND(P)$ $IND(P) = \{(x,y) \in U^2 | \forall a \in P, a(x) = a(y)\}$. $IND(P)$ atau relasi *indiscernibility* ini berhubungan dengan kelas ekuivalensi yang mana dua objek ekuilvalen jika dan hanya jika keduanya memiliki kesamaan vektor nilai atribut untuk atribut di P. Partisi U yang ditentukan oleh $IND(P)$ dilambangkan dengan $U/IND(P)$ atau U/P yang merupakan himpunan kelas ekuivalensi yang dihasilkan oleh $IND(P)$.

$$U/IND(P) = \otimes\{U/IND(\{a\})|a \in P\},$$

dengan,

$$A \otimes B = \{X \cap Y | \forall X \in A, \forall Y \in B, X \cap Y \neq \emptyset\}.$$

Jika $(x, y) \in IND(P)$, maka x dan y adalah *indiscernibility* dari atribut P. Kelas ekuivalensi dari relasi *indiscernibility* terhadap P dilambangkan dengan $[x]_p, x \in U$ (Jensen dkk., 2014).

Contoh 2.4.2 Diberikan himpunan $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ dan $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ merupakan himpunan *fuzzy* yang nilai keanggotaannya dinyatakan dengan bilangan antara 0 dan 1 seperti pada tabel berikut:

Tabel 2.2 Tabel nilai keanggotaan himpunan *fuzzy*

A/U	a_1	a_2	a_3
x_1	$0,2$	$0,1$	$0,8$
x_2	$0,7$	$0,2$	$0,6$
x_3	$0,2$	$0,1$	$0,8$

Kelas ekuivalensi berdasarkan definisi $IND(P)$ diberikan sebagai berikut:

$$[x_1]_P = \{x_1, x_3\}$$
$$[x_2]_P = \{x_2\}.$$

2.5 Ruang Aproksimasi

Ruang aproksimasi merupakan salah satu suatu konsep matematis yang strukturnya terdiri atas himpunan dan sebuah konsep yang menghubungkan elemen elemen dalam himpunan tersebut. Pada bagian ini akan diberikan definisi mengenai ruang aproksimasi.

Definisi 2.5.1 Diberikan $U \neq \emptyset$ dan R adalah kelas ekuivalensi pada U. Pasangan (U, R) disebut ruang aproksimasi, yang dinotasikan dengan $K = (U, R)$ (Miao dkk., 2005).

Definisi 2.5.2 Misalkan $S = (U, R)$ menyatakan ruang aproksimasi dan $X \subseteq S$. Aproksimasi bawah dari X didefinisikan sebagai berikut:

$$\underline{Apr}(X) = \{a \in U | [a] \subseteq X\}.$$

Aproksimasi atas dari X didefinisikan sebagai berikut:

$$\overline{Apr}(X) = \{a \in U | [a] \cap X \neq \emptyset\},$$

dengan $[a]$ menunjukkan kelas ekuivalensi yang terdapat di a (Kumar dan Yadav, 2015).

Contoh 2.5.3 Berdasarkan Contoh 4.1.2 diketahui kelas ekuivalensi sebagai berikut:

$$[x_1]_P = \{x_1, x_3\}$$
$$[x_2]_P = \{x_2\}.$$

Selanjutnya, diberikan himpunan $X = \{x_1, x_2\} \subseteq U$. Oleh karena itu, aproksimasi bawah dari X sebagai berikut:

$$\underline{Apr}(X) = \{x_2\}.$$

Aproksimasi atas dari X sebagai berikut:

$$\overline{Apr}(X) = \{x_1, x_2, x_3\}.$$

2.6 Himpunan *Rough*

Himpunan *Rough* pertama kali dikembangkan oleh Zdzislaw Pawlak ilmuwan asal Polandia pada tahun 1982. Setelah mengetahui definisi himpunan dan ruang aproksimasi, selanjutnya pada bagian ini akan didefinisikan himpunan *rough*.

Definisi 2.6.1 Diberikan ruang aproksimasi (U, R). Jika himpunan bagian $X \subseteq U$ dan $\overline{Apr}(X) - \underline{Apr}(X) \neq \emptyset$, maka X disebut himpunan *rough* (Pawlak, 1982).

Contoh 2.6.2 Berdasarkan Contoh 2.5.3 telah ditentukan aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari himpunan bagian $X \subseteq U$. Pasangan berurut dari aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari X disebut sebagai himpunan *rough*.

$$Apr(X) = (\{x_2\}, \{x_1, x_2, x_3\}).$$

2.7 Semigrup *Rough*

Setelah mengetahui definisi himpunan *rough*, pada bagian ini akan didefinisikan semigrup *rough*.

Definisi 2.7.1 Diberikan ruang aproksimasi (U, R) dan operasi biner $*$ pada himpunan semesta U. Himpunan bagian X dari U dikatakan semigrup *rough* pada ruang aproksimasi jika memenuhi aksioma berikut:

1. untuk setiap $a, b \in X, a * b \in \overline{Apr}(X)$;
2. untuk setiap $a, b, c \in X, (a * b) * c = a * (b * c) \in \overline{Apr}(X)$

(Bagirmaz dan Ozcan, 2015).

Contoh 2.7.2 Berdasarkan Contoh 2.1.17 terdapat relasi ekuivalen R pada himpunan U. Oleh karena itu, dibentuk suatu ruang aproksimasi (U, R) sehingga menghasilkan kelas ekuivalensi sebagai berikut:

$$E_1 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\};$$
$$E_2 = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}.$$

Diberikan himpunan tak kosong $X = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{5}, \bar{8}\}$ dengan operasi biner $+_9$ dan $X \subseteq U$. Selanjutnya, akan ditentukan aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari himpunan bagian X sebagai berikut:

$$\underline{Apr}(X) = \{x | [x]_p \subseteq X\} = \emptyset;$$
$$\overline{Apr}(X) = \{x | [x]_p \cap X \neq \emptyset\} = E_1 \cup E_2 = U.$$

Berikut diberikan tabel *Cayley* dari himpunan X terhadap operasi biner $+_9$. Kemudian akan ditunjukkan bahwa $(\overline{Apr}(X), +_9)$ merupakan semigrup *rough*.

Tabel 2.3 Tabel *Cayley* operasi $+_9$ pada X

$+_9$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\bar{1}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$

Berdasarkan Tabel 2.3 terbukti bahwa:

(1) Untuk setiap $a, b \in X$ berlaku $a +_9 b \in \overline{Apr}(X)$.

(2) Untuk setiap $a, b, c \in X$ berlaku sifat asosiatif yaitu $(a +_9 b) +_9 c = a +_9 (b +_9 c)$. Karena operasi penjumlahan modulo 10 bersifat komutatif, dapat diperoleh bahwa $+_9$ bersifat asosiatif di $\overline{Apr}(X)$.

Dari (1) dan (2) terbukti bahwa $(\overline{Apr}(X), +_9)$ merupakan semigrup *rough*.

Selanjutnya akan didefinisikan mengenai monoid *rough*.

Definisi 2.7.3 Diberikan ruang aproksimasi (U, R) dan $X \subseteq U$ merupakan semigrup *rough* dengan operasi biner $*$ pada U. Elemen $a \in \overline{Apr}(X)$ disebut identitas kiri dari X, jika untuk setiap $b \in X$ berlaku $ab = b$, sedangkan a disebut identitas kanan dari X, jika untuk setiap $b \in X$ berlaku $ba = b$. Jika a merupakan identitas kiri dan identitas kanan dari X, maka a disebut elemen identitas *rough*. Semigrup *rough* merupakan monoid *rough*, jika memiliki identitas *rough* (Bagirmaz dan Ozcan, 2015).

Contoh 2.7.4 Berdasarkan Contoh 2.7.2 telah dibuktikan bahwa $(\overline{Apr}(X), +_9)$ merupakan semigrup *rough*. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $(\overline{Apr}(X), +_9)$ merupakan monoid *rough*.Diberikan sebarang $a \in \overline{Apr}(X)$. Oleh karena itu, $a +_9 \bar{0} = a$ dan $\bar{0} +_9 a = a$. Oleh karena itu, terdapat elemen identitas yaitu $\bar{0} \in \overline{Apr}(X)$. Jadi, terbukti bahwa $(\overline{Apr}(X), +_9)$ merupakan monoid *rough*.

2.8 Konsep Praba

Pada bagian ini akan didefinisikan mengenai *indiscernibility weight*, Praba $\triangle$, operasi biner Praba $\triangle$, elemen pivot, Praba $\triangledown$, operasi biner Praba $\triangledown$ dan order dari semiring *rough*.

Definisi 2.8.1 Jika $X \subseteq U$, maka banyaknya kelas ekuivalensi (berdasarkan $IND(P)$) pada X disebut *Indiscernibility weight* dari X. Dinotasikan dengan $IW(X)$ (Praba dkk., 2013).

Definisi 2.8.2 Misalkan $X, Y \subseteq U$, Praba $\triangle$ didefinisikan sebagai berikut:

1. jika $IW(X \cup Y) = IW(X) + IW(Y) - IW(X \cap Y)$, maka $X \triangle Y = X \cup Y$;
2. jika $IW(X \cup Y) > IW(X) + IW(Y) - IW(X \cap Y)$, maka identifikasi kelas ekuivalensi yang diperoleh dari $X \cup Y$, kemudian hapus elemen-elemen dari kelas tersebut yang termasuk dalam Y. Didapatkan himpunan baru Y, sehingga diperoleh $X \triangle Y$. Ulangi proses hingga $IW(X \cup Y) = IW(X) + IW(Y) - IW(X \cap Y)$

(Praba dkk, 2013).

Contoh 2.8.3 Berdasarkan Contoh 4.1.2, diberikan himpunan $U = \{x_1, x_2, x_3\}$, dengan kelas ekuivalensi berdasarkan definisi $IND(P)$ sebagai berikut:

$$[x_1]_P = \{x_1, x_3\}$$
$$[x_2]_P = \{x_2\}.$$

Diberikan himpunan $X = \{x_2\}, Y = \{x_1, x_3\} \subseteq U$, sehingga diperoleh:

$$IW(X) = 1; IW(Y) = 1; IW(X \cup Y) = 2; IW(X \cap Y) = 0.$$

Karena $IW(X \cup Y) = IW(X) + IW(Y) - IW(X \cap Y)$, diperoleh, $X \triangle Y = X \cup Y = \{x_1, x_2, x_3\}$.

Selanjutnya didefinisikan operasi biner Praba $\triangle$.

Definisi 2.8.4 Diberikan himpunan $T = \{RS(X)|X \subseteq U\}$ dan $RS(X)$ merupakan *Rough Set* dari X dengan $\triangle$: $T \times T \to T$, sehingga:

$$\triangle\ (RS(X), RS(Y)) = RS(X \vartriangle Y)$$

(Praba dkk., 2013).

Setelah mengetahui definisi *indiscernibility weight*, Praba $\triangle$, operasi biner Praba $\triangle$, pada bagian ini akan didefinisikan Praba $\triangledown$, operasi biner Praba $\triangledown$.

Definisi 2.8.5 Diberikan himpunan $X, Y \subseteq U$. Elemen $x \in U$ disebut elemen pivot, jika $[x]_p \nsubseteq X \cap Y$, tetapi $[x]_P \cap X \neq \emptyset$ dan $[x]_P \cap Y \neq \emptyset$ (Praba dkk., 2013).

Definisi 2.8.6 Diberikan himpunan $X, Y \subseteq U$. Himpunan elemen pivot X dan Y disebut himpunan pivot dari X dan Y yang dinotasikan dengan $P_{X \cap Y}$ (Praba dkk., 2013).

Definisi 2.8.7 Praba $\triangledown$ dari X dan Y dinotasikan dengan $X \triangledown Y$ dan didefinisikan sebagai berikut:

$$X \triangledown Y = \{x|[x]_p \subseteq X \cap Y\} \cup P_{X \cap Y}, \text{ dengan } X, Y \subseteq U$$

(Praba dkk., 2013).

Contoh 2.8.8 Berdasarkan Contoh 4.1.2, diberikan himpunan $U = \{x_1, x_2, x_3\}$, dengan kelas ekuivalensi berdasarkan definisi $IND(P)$ sebagai berikut:

$$[x_1]_P = \{x_1, x_3\}$$
$$[x_2]_P = \{x_2\}.$$

Diberikan himpunan $X = \{x_1, x_2\}, Y = \{x_2, x_3\} \subseteq U$, sehingga diperoleh:

$$X \cap Y = \{x_2\}.$$

Karena $[x_1]_P \nsubseteq X \cap Y, [x_1]_P \cap X \notin \emptyset$, dan $[x_1]_P \cap Y \notin \emptyset$, diperoleh x_1, x_3 merupakan elemen pivot, sehingga $P_{X \cap Y} = \{x_1, x_3\}$.Oleh karena itu,

$$X \triangledown Y = (X \cap Y) \cup P_{X \cap Y} = \{x_1, x_2, x_3\}.$$

Selanjutnya didefinisikan operasi biner Praba $\triangledown$.

Definisi 2.8.9 Diberikan himpunan $T = \{RS(X)|X \subseteq U\}$ dan $RS(X)$ merupakan *Rough Set* dari X dengan $\triangledown : T \times T \to T$, sehingga.

$$\triangledown(RS(X), RS(Y)) = RS(X \triangledown Y)$$

(Manimaran dkk., 2014)

Pada bagian ini diberikan lemma mengenai order dari semiring *rough*.

Lemma 2.8.10 Misalkan X adalah himpunan kelas ekuivalensi dan $P_x$merupakan himpunan perwakilan kelas ekuivalensi yang kardinalitasnya lebih besar dari 1dan misalkan $|X| = n$ dan $|P_x| = m$ dengan $1 \leq m \leq n$, sehingga order dari semiring *rough* adalah $2^{n-m}3^m$ (Manimaran dkk., 2017).

Bukti.

$$\begin{aligned}
|T| &= \binom{m}{0}2^n + \binom{m}{1}(2^n - 2^{n-1}) + \binom{m}{2}(2^n - (2^2-1)2^{n-2}) + \dots \\
&+ \binom{m}{m}(2^n - (2^m-1)2^{n-m}) + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\{2^n - (2^{k-1}-1)2^{n-k}\} \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}2^{n-k} \\
&= 2^n\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}2^{-k} \\
&= 2^{n-m}3^m
\end{aligned}$$

(Manimaran dkk., 2017).

Selanjutnya akan diberikan teorema semigrup *rough* dan monoid *rough* menggunakan konsep Praba dengan operasi $\triangle$ dan $\triangledown$.

Teorema 2.8.11 Diberikan sistem informasi $I = (U, A)$ dengan U merupakan himpunan semesta dan A atribut dari himpunan fuzzy. Jika T merupakan himpunan dari semua himpunan *rough*, maka $(T, \triangle)$ merupakan monoid *rough*(Manimaran dkk, 2013).

Bukti.

(1) Akan ditunjukkan T tertutup terhadap operasi $\triangle$. Diberikan $X_1, X_2 \in U$, jika $X_1 \triangle X_2 = X_3 \subseteq U$. Oleh karena itu,$RS(X_1 \triangle X_2) = RS(X_3) \in T$. Terbukti bahwa $\triangle$ tertutup.

(2) Diberikan $X_1, X_2, X_3 \subseteq U$ dan $RS(X_1), RS(X_2), RS(X_3) \in T$. Akan ditunjukkan bahwa, $RS(X_1 \triangle (X_2 \triangle X_3)) = RS((X_1 \triangle X_2) \triangle X_3)$.
Dengan kata lain, akan ditunjukkan.

(a) $\underline{RS}(X_1 \triangle (X_2 \triangle X_3)) = \underline{RS}((X_1 \triangle X_2) \triangle X_3)$.

(b) $\overline{RS}(X_1 \triangle (X_2 \triangle X_3)) = \overline{RS}((X_1 \triangle X_2) \triangle X_3)$.

Oleh karena itu,

(a) Diberikan $x \in \underline{RS}(X_1 \triangle (X_2 \triangle X_3))$. Berdasarkan Definisi 2.5.2,

$$\begin{aligned} x \in \underline{RS}(X_1 \triangle (X_2 \triangle X_3)) &= \{x \in U | [x_1]_p \subseteq X_1 \triangle (X_2 \triangle X_3)\} \\ &= [x_1]_p \subseteq X_1 \text{atau} [x_1]_p \subseteq (X_2 \triangle X_3) \\ &= [x_1]_p \subseteq X_1 \text{atau} [x_1]_p \subseteq X_2 \text{atau} [x_1]_p \subseteq X_3 \\ &= [x_1]_p \subseteq X_1 \triangle X_2 \text{atau} [x_1]_p \subseteq X_3 \\ &= [x_1]_p \subseteq (X_1 \triangle X_2) \triangle X_3 \\ &= x \in \underline{RS}((X_1 \triangle X_2) \triangle X_3). \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \underline{RS}(X_1 \triangle (X_2 \triangle X_3)) \subseteq \underline{RS}((X_1 \triangle X_2) \triangle X_3). \qquad (2.1)$$

Diberikan $x \in \underline{RS}((X_1 \vartriangle X_2) \vartriangle X_3)$. Berdasarkan Definisi 2.5.2

$$\begin{aligned} x \in \underline{RS}((X_1 \vartriangle X_2) \vartriangle X_3) &= \{x \in U | [x_1]_p \subseteq (X_1 \vartriangle X_2 \vartriangle X_3\} \\ &= [x_1]_p \subseteq (X_1 \vartriangle X_2) \text{atau} [x_1]_p \subseteq X_3 \\ &= [x_1]_p \subseteq X_1 \text{atau} [x_1]_p \subseteq X_2 \text{atau} [x_1]_p \subseteq X_3 \\ &= [x_1]_p \subseteq X_1 \text{atau} [x_1]_p \subseteq (X_2 \vartriangle X_3) \\ &= [x_1]_p \subseteq X_1 \vartriangle (X_2 \vartriangle X_3)) \\ &= x \in \underline{RS}(X_1 \vartriangle (X_2 \vartriangle X_3)). \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \underline{RS}((X_1 \vartriangle X_2) \vartriangle X_3) \subseteq \underline{RS}(X_1 \vartriangle (X_2 \vartriangle X_3)). \tag{2.2}$$

Dari Persamaan (2.1) dan (2.2) terbukti bahwa:

$$\underline{RS}(X_1 \vartriangle (X_2 \vartriangle X_3)) = \underline{RS}((X_1 \vartriangle X_2) \vartriangle X_3).$$

(b) Diberikan $x \in \overline{RS}(X_1 \vartriangle (X_2 \vartriangle X_3))$, berdasarkan Definisi 2.5.2

$$\begin{aligned} x \in \overline{RS}(X_1 \vartriangle (X_2 \vartriangle X_3)) &= \{x \in U | [x_1]_p \subseteq X_1 \vartriangle (X_2 \vartriangle X_3)\} \\ &= [x_1]_p \subseteq X_1 \text{atau} [x_1]_p \subseteq (X_2 \vartriangle X_3) \\ &= [x_1]_p \subseteq X_1 \text{atau} [x_1]_p \subseteq X_2 \text{atau} [x_1]_p \subseteq X_3 \\ &= [x_1]_p \subseteq X_1 \vartriangle X_2 \text{atau} [x_1]_p \subseteq X_3 \\ &= [x_1]_p \subseteq (X_1 \vartriangle X_2) \vartriangle X_3 \\ &= x \in \overline{RS}((X_1 \vartriangle X_2) \vartriangle X_3). \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \overline{RS}(X_1 \vartriangle (X_2 \vartriangle X_3)) \subseteq \overline{RS}((X_1 \vartriangle X_2) \vartriangle X_3). \tag{2.3}$$

Diberikan $x \in \overline{RS}((X_1 \triangle X_2) \triangle X_3)$. Berdasarkan Definisi 2.5.2

$$\begin{aligned} x \in \overline{RS}((X_1 \triangle X_2) \triangle X_3) &= \{x \in U | [x_1]_p \subseteq (X_1 \triangle X_2 \triangle X_3\} \\ &= [x_1]_p \subseteq (X_1 \triangle X_2) \text{atau} [x_1]_p \subseteq X_3 \\ &= [x_1]_p \subseteq X_1 \text{atau} [x_1]_p \subseteq X_2 \text{atau} [x_1]_p \subseteq X_3 \\ &= [x_1]_p \subseteq X_1 \text{atau} [x_1]_p \subseteq (X_2 \triangle X_3) \\ &= [x_1]_p \subseteq X_1 \triangle (X_2 \triangle X_3)) \\ &= x \in \overline{RS}(X_1 \triangle (X_2 \triangle X_3)). \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \overline{RS}((X_1 \triangle X_2) \triangle X_3) \subseteq \overline{RS}(X_1 \triangle (X_2 \triangle X_3)). \qquad (2.4)$$

Dari Persamaan (2.3) dan (2.4) terbukti bahwa:

$$\overline{RS}(X_1 \triangle (X_2 \triangle X_3)) = \overline{RS}((X_1 \triangle X_2) \triangle X_3).$$

Oleh karena itu, dari (a) dan (b) terbukti bahwa:

$$RS(X_1 \triangle (X_2 \triangle X_3)) = RS((X_1 \triangle X_2) \triangle X_3).$$

Jadi, $\triangle$ bersifat asosiatif.

Berdasarkan (1) dan (2) terbukti bahwa $(T, \triangle)$ semigrup, karena T himpunan dari semua himpunan *rough*. Oleh karena itu, $(T, \triangle)$ merupakan semigrup *rough*. Selanjutnya, semigrup *rough* yang memiliki elemen identitas disebut sebagai monoid *rough*.

1. Diberikan $RS(X_1) \in T$, oleh karena itu.

$$\begin{aligned} RS(X_1) \triangle RS(\emptyset) &= RS(X_1 \triangle \emptyset) \\ &= RS(X_1). \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
RS(X_1 \vartriangle \emptyset) &= RS(X_1) \vartriangle RS(\emptyset) \\
&= RS(X_1).
\end{aligned}
$$

Jadi elemen identitas terhadap $\vartriangle$ ada;ah $RS(\emptyset) \in T$.

Oleh karena itu, terbukti bahwa $(T, \vartriangle)$ merupakan monoid *rough* (Praba dkk., 2013).

Teorema 2.8.12 Diberikan sistem informasi $I = (U, A)$ dengan U merupakan himpunan semesta dan A atribut dari himpunan *fuzzy*. Jika T merupakan himpunan dari semua himpunan *rough*, maka $(T, \triangledown)$ merupakan monoid (Manimaran dkk, 2013).
Bukti.

1. Akan ditunjukkan T tertutup terhadap operasi $\triangledown$. Diberikan $X_1, X_2 \in U$, jika $X_1 \triangledown X_2 = X_3 \subseteq U$. Oleh karena itu, $RS(X_1 \triangledown X_2) = RS(X_3) \in T$. Terbukti bahwa $\triangledown$ tertutup.

2. Diberikan $X_1, X_2, X_3 \subseteq U$ dan $RS(X_1), RS(X_2), RS(X_3) \in T$. Akan ditunjukkan bahwa $RS(X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3)) = RS((X_1 \triangledown X_2) \triangledown X_3)$.

   (a) $\underline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3)) = \underline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \triangledown X_3)$.

   (b) $\overline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3)) = \overline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \triangledown X_3)$.

   Jadi,

   (a) Diberikan $x \in \underline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3))$, berdasarkan Definisi 2.5.2

$$
\begin{aligned}
x \in \underline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3)) &= \{x \in U | [x_1]_p \subseteq X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3)\} \\
&= [x_1]_p \subseteq (X_1 \cap (X_2 \triangledown X_3)) \cup P_{X_1 \cap (X_2 \triangledown X_3)} \\
&= [x_1]_p \subseteq X_1 \text{dan} [x_1]_p \subseteq X_2 \triangledown X_3 \text{atau} [x_1]_p \subseteq P_{X_1 \cap (X_2 \triangledown X_3)} \\
&= [x_1]_p \subseteq X_1 \text{dan} [x_1]_p \subseteq (X_2 \cap X_3) \cup [x_1]_p \subseteq P_{X_2 \cap X_3} \\
&= [x_1]_p \subseteq X_1 \text{dan} [x_1]_p \subseteq X_2 \cap X_3 \text{atau} [x_1]_p \subseteq P_{X_2 \cap X_3}
\end{aligned}
$$

$$= [x_1]_p \subseteq X_1 \text{dan} [x_1]_p \subseteq X_2 \text{dan} [x_1]_p \subseteq X_3$$
$$= [x_1]_p \subseteq X_1 \cap X_2 \text{dan} [x_1]_p \subseteq X_3$$
$$= [x_1]_p \subseteq (X_1 \triangledown X_2) \triangledown X_3$$
$$= x \in \underline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \triangledown X_3)$$

Jadi, $\underline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3)) \subseteq \underline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \triangledown X_3)$.

Dengan pembuktian serupa, diperoleh bahwa:

$$\underline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \triangledown X_3) \subseteq \underline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3)).$$

oleh karena itu, $\underline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3)) = \underline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \triangledown X_3)$.

(b) Diberikan $x \in \overline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3))$, berdasarkan Definisi 2.5.2

$$x \in U | [x_1]_p \cap (X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3)) \neq \emptyset$$

Kasus 1 : $[x_1]_p \cap (X \cap (X_2 \triangledown X_3)) \cup P_{X \cap (X_2 \triangle X_3)} \neq \emptyset$,
diperoleh:

$\Rightarrow [x_1]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap (X_2 \cap X_3) \cup P_{X_2 \cap X_3} \neq \emptyset$
$\Rightarrow [x_1]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap (X_2 \cap X_3)$ atau $[x_1]_p \cap P_{X_2 \cap X_3} \neq \emptyset$

Kasus 1.1 : $[x_1]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap X_2 \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap X_3 \neq \emptyset$

$\Rightarrow [x_1]_p \cap X \cap X_2 \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap X_3 \neq \emptyset$
Jadi, $[x_1]_p \cap ((X \triangledown X_2) \triangledown X_3) \neq \emptyset$
oleh karena itu, $\overline{RS}(X \triangledown (X_2 \triangledown X_3)) \subseteq \overline{RS}((X \triangledown X_2) \triangledown X_3)$

Kasus 1.2 : $[x_1]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap P_{X_2 \cap X_3} \neq \emptyset$

$\Rightarrow [x_1]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x_1]_1 p \cap X_2 \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap X_3 \neq \emptyset$

$\Rightarrow [x_1]_p \cap (X \cap X_2) \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap X_3 \neq \emptyset$

Jadi, $[x_1]_p \cap ((X \triangledown X_2) \triangledown X_3) \neq \emptyset$. Diperoleh,

$\overline{RS}(X \triangledown (X_2 \triangledown X_3)) \subseteq \overline{RS}((X \triangledown X_2) \triangledown X_3)$

Kasus 2 : $[x_1]p \cap (X \cap (X_2 \triangledown X_3)) \neq \triangledown$atau$[x_1]p \cap P_{X \cap (X_2 \triangledown X_3)} \neq \emptyset$

. Diperoleh,

$[x_1]_p \cap X \neq \emptyset$dan$[x_1]_p \cap (X_2 \triangledown X_3) \neq \emptyset$

Jadi, $[x_1]_p \cap ((X \triangledown X_2) \triangledown X_3) \neq \emptyset$

oleh karena itu, $\overline{RS}(X \triangledown (X_2 \triangledown X_3)) \subseteq \overline{RS}((X \triangledown X_2) \triangledown X_3)$.

Dengan pembuktian serupa, diperoleh bahwa

$$\overline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \triangledown X_3) \subseteq \overline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3)),$$

Jadi, $\overline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3)) = \overline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \triangledown X_3)$.

Dari (a) dan (b) terbukti bahwa:

$$RS(X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3)) = RS((X_1 \triangledown X_2) \triangledown X_3).$$

Jadi$\triangledown$ bersifat asosiatif.

Berdasarkan (1) dan (2) terbukti bahwa $(T, \triangledown)$ semigrup, karena T himpunan dari semua himpunan *rough*. Oleh karena itu $(T, \triangledown)$ merupakan semigrup. Selanjutnya, semigrup *rough* yang memiliki elemen identitas disebut sebagai monoid.

3. Diberikan $RS(X_1) \in T$, oleh karena itu.

$$\begin{aligned} RS(X_1) \triangledown RS(U) &= RS(X_1 \triangledown U) \\ &= RS(X_1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} RS(X_1 \triangledown U) &= RS(X_1) \triangledown RS(U) \\ &= RS(X_1). \end{aligned}$$

Terbukti terdapat elemen identitas $RS(U) \in T$.

Oleh karena itu, terbukti bahwa $(T, \triangledown)$ merupakan monoid *rough* (Manimaran dkk., 2014).

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Waktu pelaksanaan penelitian ini pada Semster Ganjil Tahun Ajaran 2023/2024 bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan penulis adalah studi literatur, dengan mengumpulkan dan mengolah bahan penelitian berdasarkan referensi terkait seperti jurnal dan buku. Secara umum langkah-langkah penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mempelajari materi terkait yaitu himpunan *fuzzy*, relasi *indiscernibility*, himpunan *rough*, semigrup *rough*, dan konsep Praba.
2. Mengkonstruksi semigrup *rough* dan monoid *rough* menggunakan konsep Praba.
3. Menyelidiki sifat-sifat semigrup *rough* dan monoid *roigh* menggunakan konsep Praba.
4. Membuat program untuk menentukan suatu himpunan *rough* merupakan semigrup *rough*.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang telah dibahas sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa suatu sistem informasi (U, A) dengan nilai derajat keanggotaan himpunan *fuzzy* dan akan terdapat himpunan T yang merupakan himpunan dari semua himpunan *rough*, kemudian himpunan T dengan operasi $\triangle$ akan membentuk semigrup yang memenuhi aksioma yaitu untuk setiap $X, Y \subseteq U$ dan $RS(X), RS(Y) \in T$ berlaku $RS(X \triangle Y) \in T$ dan $RS(X \triangle (Y \triangle Z)) = RS((X \triangle Y) \triangle Y)$. Jika himpunan T dioperasikan dengan operasi $\triangledown$ akan membentuk semigrup *rough* yang memenuhi aksioma yaitu untuk setiap $X, Y \subseteq U$ dan $RS(X), RS(Y) \in T$ berlaku $RS(X \triangledown Y) \in T$ dan $RS(X \triangledown (Y \triangledown Z)) = RS((X \triangledown Y) \triangledown Y)$.

Kemudian berdasarkan hasil yang diperoleh, himpunan T dengan operasi $\triangle$ atau $\triangledown$ akan membentuk monoid *rough* yang memenuhi aksioma yaitu untuk setiap $X \subseteq U$ dan $RS(X) \in T$ berlaku $(T, \triangle)$ merupakan semigrup dan $RS(X \triangle \varnothing) = RS(\varnothing \triangle X) = RS(X)$, untuk operasi $\triangledown$ berlaku $(T, \triangledown)$ dengan operasi $\triangledown$ merupakan semigrup *rough* dan$RS(X \triangledown U) = RS(U \triangledown X) = RS(X)$.

Berdasarkan hasil terdapat teorema pembuktikan himpunan T dengan operasi $\triangle$ atau operasi $\triangledown$ yang akan membentuk *band rough* jika memenuhi aksioma yaitu untuk setiap $X \subseteq U$ dan $RS(X) \in T$ berlaku $(T, \triangle)$ merupakan semigrup *rough* dan $RS(X) \triangle RS(X) = RS(X \triangle X) = RS(X)$, untuk operasi $\triangledown$ berlaku $(T, \triangledown)$ merupakan semigrup dan $RS(X) \triangledown RS(X) = RS(X \triangledown X) = RS(X)$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil dan penelitian, dalam mengkonstruksikan semigrup menggunakan konsep Praba masih sedikit ditemukan sifat-sifatnya, tidak menutup kemungkinan masih terdapat sifat-sifat lain dari semigrup *rough* yang dapat diterapkan menggunakan konsep Praba. Selain itu, dalam mengkonstruksi semigrup *rough* menggunakan konsep Praba ke dalam contoh-contoh dapat menggunakan himpunan universal dan atribut lain selain yang terdapat pada penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Adkins, W. A. dan Weintraub, S. H. 1992. *Algebra "An Approach via Module Theory"*, Springer-Verlag, New York, Inc., USA.

Ayres, F., dan Jaisingh, L., 2004, *Theory and Problems of Abstract Algebra (2nd ed.)*. McGraw-Hill Publishing Company.

Bagirmaz, N., dan Ozcan, A. F. 2015. Rough semigroups on approximation spaces.*International Journal of Algebra*, 9(7), 339–350.

Cain, A. J. 2014. *Nine Chapters on the art of semigroups*. AJC Porto dan Lisbon.

Clifford, A. H. 1954. *Bands of Semigroups*. Proceedings of the American Mathematical Society, 5(3), 499.

Hafifullah, D., Fitriani, F., dan Faisol, A. 2022. the Properties of Rough V-Coexact Sequence in Rough Group. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan*, 16(3), 1069–1078.

Jensen, R., Tuson, A., dan Shen, Q. 2014. Finding rough and fuzzy-rough set reducts with SAT. *Information Sciences, 255*, 100–120.

Jesmalar, L. 2017. Homomorphism and Isomorphism of Rough Group. *International Journal of Advance Research, Ideas and Innovations in Technology*, 3(3), 1382–1387.

Kumar, M., dan Yadav, N. 2015. Fuzzy Rough Sets and Its Application in Data Mining Field. *Advances in Computer Science and Information Technology*, 2(3), 237–240.

Manimaran, A., Praba, B., dan Chandrasekaran, V. M. 2014. Regular rough $\triangledown$ monoid of idempotents. *International Journal of Applied Engineering Research (IJAER)*, 9(16),3469–3479.

Manimaran, A., Praba, B., dan Chandrasekaran, V. M. 2017. Characterization of rough semiring. *Afrika Matematika*, 28(5–6), 945–956.

Miao, D., Han, S., Li, D., dan Sun, L. 2005. Rough Group , Rough Subgroup.*Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, 1, 104–105.

Muis, S. 2018. *Teori Fuzzy: Konsep dan Aplikasi*. Teknosain.

Munir, R. 2012. *Matematika Diskrit*(5th ed.). Informatika.

Nugraha, A. A., Fitriani, F., Ansori, M., dan Faisol, A. 2022. Implementation of Rough Set on A Group Structure. *Jurnal Matematika MANTIK*, 8(1), 45–52.

Pawlak, Z. 1982. Rough sets. *International Journal of Computer dan Information Sciences*, 11(5), 341–356.

Pinontoan, B., dan Titaley, J. 2019. *Matematika Diskrit I*. Patra Media Grafindo.

Praba, B., Chandrasekaran, V. M., dan Manimaran, A. 2013. A commutative regular monoid on rough sets. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 31, 307–318.

Praba, B., Chandrasekaran, V. M., dan Manimaran, A. 2015. Semiring on roughsets. *Indian Journal of Science and Technology*, 8(3), 280–286.

Praba, B., Manimaran, A., dan Chandrasekaran, V. M.2016. Total graph and complemented graph of a rough semiring. *Gazi University Journal of Science*, 29(2), 459–466.

Praba, B., Mohan, R., dan In, C. 2013. Rough Lattice. *International Journal of Fuzzy Mathematics and Systems*, 3(2), 135–151.

Sinha, A. K., dan Prakash, A. 2015. Rough Projective Module.*Advances in Applied Science and Environmental Engineering - ASEE 2014*, 35–38.

Usman, M. 2022. *Pengantar Topologi*. AURA.

Wang, Q., dan Zhan, J. 2016. Rough semigroups and rough fuzzy semigroups based on fuzzy ideals. *Open Mathematics*, 14(1), 1114–1121.

Wibisono, S. 2008. *Matematika Diskrit Edisi* 2 (2nd ed.). Graha Ilmu.

Yanti, G. A. D., Fitriani, F., dan Faisol, A. 2023. the Implementation of a Rough Set of Projective Module.*BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan*, 17(2), 0735–0744.