ANALISIS PERBANDINGAN UNTUK MASALAH PERHITUNGAN HARGA OPSI ASIA DENGAN METODE EULER IMPLISIT DAN CRANK-NICHOLSON

(Skripsi)

Oleh

GILANG SAPUTRA FAJAR

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

ABSTRACT

COMPARATIVE ANALYSIS FOR ASIAN OPTION PRICING CALCULATION PROBLEMS USING IMPLICIT EULER AND CRANK-NICHOLSON METHODS

By

Gilang Saputra Fajar

Asian options are options whose payoff depends on the average price of the underlying asset over a predetermined period. This average can be formed discretely. In Asian options there is no analytical solution in calculating option prices. However, there is an approximation formula that is used to find the price of this option. A numerical method is used with a certain approach to obtain a numerical solution. The finite difference method is a method that aims to approximate a differential equation. The method used in this research is implicit and Crank-Nicholson. This research aims to determine the results of a comparative analysis between the implicit finite difference method and Crank-Nicholson for the problem of calculating Asian option prices.

From the results of the research carried out, it can be seen that in this case the two implicit finite difference methods and the Crank-Nicholson method which is more effective and accurate in determining Asian option prices is the Crank-Nocholson finite difference method, because this method has a small error value of 0.0028 compared to the implicit finite difference method of 0.0719.

Kata kunci : Asian Option, Finite Difference, Implicit, Crank-Nicholson

ABSTRAK

ANALISIS PERBANDINGAN UNTUK MASALAH PERHITUNGAN HARGA OPSI ASIA DENGAN METODE EULER IMPLISIT DAN CRANK-NICHOLSON

Oleh

Gilang Saputra Fajar

Opsi asia adalah opsi yang *payoff*-nya tergantung pada rata-rata harga aset dasar selama periode yang telah ditentukan terlebih dahulu. Rata-rata ini dapat dibentuk secara diskrit. Pada opsi asia tidak terdapat solusi analitik dalam perhitungan harga opsi. Akan tetapi terdapat rumus pendekatan atau aproksimasi yang digunakan untuk mencari harga opsi ini digunakan suatu metode numerik dengan pendekatan tertentu sehingga didapat suatu solusi numeriknya.Metode beda hingga merupakan metode yang bertujuan untuk mengaproksimasi suatu persamaan diferensial. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah implisit dan Crank-Nicholson. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui hasil dari analisis perbandingan antara metode beda hingga implisit dan Crank-Nicholson untuk masalah perhitungan harga opsi Asia.

Dari hasil penelitian yang dilakukan, dapat diketahui bahwa dalam kasus ini kedua metode beda hingga implisit dan Crank-Nicholson yang lebih efektif dan akurat dalam menentukan harga opsi Asia adalah metode beda hingga Crank-Nocholson, karena metode ini memiliki nilai *error* atau galat yang kecil sebesar 0,0028 dibanding dengan metode beda hingga implisit sebesar 0,0719.

Kata kunci : Opsi Asia, Beda Hingga, Implisit, Crank-Nicholson

ANALISIS PERBANDINGAN UNTUK MASALAH PERHITUNGAN HARGA OPSI ASIA DENGAN METODE EULER IMPLISIT DAN CRANK-NICHOLSON

Oleh

Gilang Saputra Fajar

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

Judul Skripsi	:	**Analisis Perbandingan Untuk Masalah Perhitungan Harga Opsi Asia Dengan Metode Euler Implisit dan Crank-Nicholson.**
Nama Mahasiswa	:	**Gilang Saputra Fajar**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**1917031060**
Jurusan	:	**Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dorrah

Dra. Dorrah Aziz, M.Si.
NIP. 19610128 198811 2 001

Dr. Muslim Ansori, S.Si.,M.Si.
NIP. 19720227 199802 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim penguji

Ketua : **Dra. Dorrah Aziz, M.Si.** ....

Sekertaris : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Drs. Tiryono Rubi M.Sc. Ph.D.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 19711001 200501 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **22 Februari 2024**

PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: **Gilang Saputra Fajar**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1917031060**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **Analisis Perbandingan Untuk Masalah Perhitungan Harga Opsi Asia Dengan Metode Euler Implisit dan Crank-Nicholson.**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila di kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau di buat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 22 Februari 2024

METERAI TEMPEL

Gilang Saputra Fajar
NPM. 1917031060

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Gilang Saputra Fajar, lahir di Perumnas Way Kandis, Kecamatan Tanjung Senang, Kabupaten Bandar Lampung, Provinsi Lampung pada tanggal 11 Juli 2001. Penulis merupakan anak pertama dari dua bersaudara yang lahir dari pasangan Bapak dan Ibu

Penulis menyelesaikan pendidikan di TK Mutiara Islam pada tahun 2008. Kemudian menempuh pendidikan dasar di SD AL-Azhar 2 Bandar Lampung pada tahun 2008-2014, dan melanjutkan pendidikan di SMP Negri 19 Bandar Lampung pada tahun 2014-2017. Kemudian menempuh pendidikan di SMA Negeri 15 Bandar Lampung pada tahun 2017 dan lulus pada tahun 2019.

Pada tahun 2019 penulis di terima sebagai mahasiswa S1 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui penerimaan Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN). Selama menempuh pendidikan, penulis menyelesaikan Praktik Kerja Lapangan (PKL) di Dinas Bina Marga dan Bina Kontruksi (BMBK) Provinsi lampung. Tidak hanya itu, sebagai bentuk pengabdian dan penerapan ilmu pengetahuan yang di dapatkan dalam dunia perkuliahan, penulis melaksanakan program Kuliah Kerja Nyata (KKN) Universitas Lampung tahun 2022 di Desa Way Dadi, Kec. Sukarame, Kota Bandar Lampung. Dalam bidang organisasi penulis terdaftar sebagai Anggota Pemain Bulu Tangkis Periode 2014/2015 dan Anggota Siswa Pecinta Alam Periode 2016/2017.

KATA INSPIRASI

"(Yaitu) Jalan Allah yang kepunyaan-Nya segala apa yang ada di langit dan apa yang ada di bumi. Ingatlah, bahwa kepada Allah-lah Kembali semua urusan."
(Q.S. Asy-syura: 42-53)

"Cukuplah rasa takut kepada Allah itu menjadi bukti dari ilmu dan cukuplah sikap lancang kepada Allah menjadi bukti dari kebodohan."
(Imam Ibnu Rajab)

"Kesempatan tidak datang dua kali tapi kesempatan datang pada siapa yang tak pernah berhenti untuk mencoba."
(Dzawin Nur)

"The more you practice the more you get lucky."
(Efren Reyes)

PERSEMBAHAN

Dengan Penuh Rasa Syukur Kepada Allah Subhanahu Wa Ta' ala,
Ku Persembahkan Karya Sederhana Ini Kepada:

Ayah, Ibu, dan Adik Tercinta

Yang telah mencurahkan semua pengorbanan, doa, kasih sayang, dan dukungan tiada henti. Terimakasih sudah menjadi rumah dan tempat berpulang dari segala keluh kesah akan hal-hal pelik yang datang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Yang senantiasa telah meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan dan ilmu yang berharga kepada penulis.

Sahabat sahabatku

Yang selalu memberikan semangat, dukungan, dan doa serta selalu membantu penulis selama masa perkuliahan.

Almamater Tercinta Universitas Lampung.

SANWACANA

Alhamdulillah puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulisan skripsi dengan judul **“Analisis Perbandingan Untuk Masalah Perhitungan Harga Opsi Asia Dengan Metode Euler Implisit dan Crank-Nicholson”** dapat terselesaikan dengan baik.sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana Matematika di Universitas lampung.

Penulisan skripsi ini tidak lepas dari dukungan, bimbingan, saran, serta doa dari berbagai pihak. Oleh karena itu dalam kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si. selaku Dosen Pembimbing I yang telah membimbing penulis, menyumbangkan ilmu, memberikan motivasi dan arahan, serta kesediaan waktu yang telah di berikan.
2. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing II yang telah membimbing penulis, memberikan motivasi dan arahan, serta kesediaan waktu yang telah di berikan.
3. Bapak Drs. Tiryono Ruby M.Sc. Ph.D. selaku Dosen Pembahas yang telah mengoreksi kekurangan, memberikan saran dan masukan yang membangun dalam proses penyelesaian skripsi ini.
4. Bapak Ir. Warsono, M.S., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan arahan serta bimbingan dari awal perkuliahan sampai penyelesaian tugas akhir.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

6. Bapak Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Seluruh dosen, staf, dan karyawan Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmu dan bantuan yang bermanfaat bagi penulis.
8. Orang tua, adik, dan seluruh keluarga yang selalu menjadi penyemangat bagi penulis, dan tiada henti memberikan dukungan, kasih sayang, motivasi, serta doa kepada penulis.
9. Teman seperjuangan KKN dan KP Mas'ud, Rizka, Fhira, Fira, Nadhila, Ine, Diar, Sidiq.
10. Teman seperjuangan Aldi, Fitdes, Wiranto, Lathoif, Wahyuni, Clara, Melisa, Widya, Yusril dan juga sahabat masa kecil Faizil, Nuriel, Dani, Firhan, Alfi yang siap mendengarkan keluh kesah, memberi semangat dan keceriaan serta membantu penulis dalam banyak hal.
11. Teman teman Jurusan Matematika angkatan 2019 atas kebersamaannya.
12. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih terdapat kekurangan baik isi maupun susunannya. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun agar dapat di jadikan bahan perbaikan untuk kedepannya.

Bandar Lampung, 22 Februari 2024
Penulis,

Gilang Saputra Fajar

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu pengetahuan yang eksak dan terorganisasi secara sistematik (Sujono, 1988). Dalam cabang ilmu matematika terdapat suatu metode numerik. Metode ini merupakan metode yang digunakan untuk mengaproksimasi solusi analitik pada suatu persamaan diferensial. Persamaan diferensial merupakan suatu persamaan yang mengandung turunan fungsi. Berdasarkan variabel bebas; persamaan diferensial dibagi menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial,

Pada umumnya metode numerik tidak mengutamakan diperolehnya jawaban yang eksak, tetapi mengusahakan perumusan metode yang menghasilkan jawaban pendekatan yang berbeda dari jawaban yang eksak sebesar suatu nilai yang dapat diterima berdasarkan pertimbangan praktis, tetapi cukup dapat memberikan penghayatan persoalan yang dihadapi (Mutholi'ah, 2008). Metode penyelesaian numerik juga tidak ada batasan mengenai bentuk persamaan diferensial. Penyelesaian diperoleh berupa iterasi nemerik dari fungsi untuk berbagai variabel bebas. Penyelesaian suatu persamaan diferensial dilakukan pada titik-titik yang ditentukan berurutan. Untuk mendapatkan hasil yang lebih teliti, maka interval antara titik-titik yang berurutan dibuat semakin kecil.

Sasaran akhir dari analisis numerik yang dilakukan dalam metode numerik adalah diperolehnya metode yang terbaik untuk memperoleh jawaban yang berguna dari berbagai jawaban yang dapat diperoleh yang tidak dinyatakan dalam bentuk aljabar, persamaan diferensial biasa atau parsial, persamaan integral, atau kumpulan dari persamaan tersebut (Brewer, 2012).

Masalah nilai awal adalah persamaan diferensial yang dilengkapi dengan serangkaian kendala yang disebut dengan kondisi awal atau syarat awal yang diberikan dalam suatu masalah diferensial, dan solusi untuk masalah nilai awal adalah suatu nilai atau fungsi yang juga memenuhi kondisi awal (Boyce, 2012). Kondisi awal adalah turunan fungsi solusi di batas-batas titik ujung kedua interval. Untuk mendapatkan solusi dan sistem persamaan diferensial ada beberapa metode yang digunakan, yaitu dengan metode Euler Imsplisit dan Crank-Nicholson.

Pada tahun 1970-an, Fisher Black, Myron Sholes, dan Robert Merton menentukan solusi analitik untuk harga opsi saham dari solusi analitik tersebut dikembangkan sehingga didapatkan suatu persamaan yang dikenal model *Black-Scholes*. Model ini digunakan untuk menentukan harga opsi *call* dan *put* Eropa pada saham *non-dividen*.

Opsi asia adalah opsi yang *payoff*-nya tergantung pada rata-rata harga aset dasar selama periode yang telah ditentukan terlebih dahulu. Rata-rata ini dapat dibentuk secara diskrit. Pada opsi asia tidak terdapat solusi analitik dalam perhitungan harga opsi. Akan tetapi terdapat rumus pendekatan atau aproksimasi yang digunakan untuk mencari harga opsi ini digunakan suatu metode numerik dengan pendekatan tertentu sehingga didapat suatu solusi numeriknya.

Berdasarkan latar belakang di atas, penulis tertarik untuk mengambil judul *"Analisis Perbandingan Untuk Masalah Perhitungan Harga Opsi Asia Dengan Metode Beda Hingga Implisit dan Crank-Nicholson".*

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah.

1. Mengetahui hasil analisis dari metode Beda Hingga Implisit dan Crank-Nicholson Pada masalah Harga Opsi Asia.
2. Mengetahui perbandingan efektifitas antara metode Beda Hingga Implisit dan Crank-Nicholson pada masalah Harga Opsi Asia.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang dapat diambil dalam penelitian ini adalah.

1. Menambah wawasan dan pengetahuan mengenai analisis perbandingan metode Beda Hingga Implisit dan Crank-Nicholson untuk masalah Harga Opsi Asia.
2. Dapat mengetahui keakuratan dan efektifitas dalam menyelesaikan perhitungan harga opsi Asia menggunakan Metode Beda Hingga Imsplisit dan Crank-Nicholson.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Sistem Persamaan Diferensial

Suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat (*dependent variabel*) terhadap satu atau lebih variabel bebas (*independent variabel*) disebut persamaan diferensial. Jika suatu fungsi diketahui diferensiabel maka turunan parsialnya selalu ada. Apabila terdapat beberapa persamaan diferensial maka akan membentuk sistem persamaan diferensial. Diberikan sistem persamaan diferensial:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Dengan f_i adalah fungsi kontinu pada $[a, b]$ dari $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ untuk $i = 1,2, \dots, n$.

2.2 Persamaan Diferensial Biasa (PDB)

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang hanya mempunyai satu peubah bebas. Peubah bebas biasanya disimbolkan dengan *x*. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial di mana fungsi yang tidak diketahui (variabel terikat) adalah fungsi dari variabel bebas tunggal. Dalam bentuk paling sederhana fungsi yang tidak diketahui ini adalah fungsi riil atau fungsi kompleks, tetapi secara umum bisa juga berupa fungsi vektor maupun matriks. Berikut contoh persamaan diferensial biasa (PDB) (Yeremia Wijaya, 2017):

$$\frac{dy}{dx} + xy = 0 \tag{2.2}$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - xy = 0 \tag{2.3}$$

$$xy'' + x^2y' + 6y = e^x \tag{2.4}$$

$$y' + xy^2 = 1 \tag{2.5}$$

Contoh tersebut merupakan persamaan diferensial biasa, karena variabel tak bebas y hanya bergantung pada variabel bebas x. Suatu persamaan diferensial biasa orde-n adalah suatu persamaan yang dapat ditulis dalam bentuk:

$$F[x, u(x), u'(x), u''(x), \dots., u^n(x)] = 0 \tag{2.6}$$

Persamaan di atas menyatakan hubungan antara peubah x, fungsi u dan turunannya

$u', u'', u''', \dots, u^n$. Untuk selanjutnya akan digunakan variabel y sebagai $u(x), u'(x), u''(x), \dots, u^n(x)$. sehingga dapat ditulis dalam bentuk:

$$F(x, y', y'', \dots, y^n) = 0$$

Solusi persamaan diferensial biasa (PDB) terbagi dalam dua jenis solusi yaitu:

1. Solusi umum (penyelesaian umum) merupakan solusi PDB yang masih mengandung konstanta sebarang misalnya c.
2. Solusi khusus/partikular (penyelesaian khusus/partikular) merupakan solusi yang tidak mengandung konstanta variabel karena terdapat syarat awal pada suatu persamaan diferensial biasa.

Contoh:

Persamaan diferensial: $y'' - y' - 2y = 0$

Penyelesaian umum persamaan diferensial (PUPD): $y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$

Jika c_1 dan c_2 masing-masing diberi harga $c_1 = 2$ dan $c_2 = 1$, maka penyelesaian khusus/ partikular persamaan diferensial (PKPD): $y = 2e^{-x} + e^{2x}$.

2.3 Persamaan Diferensial Parsial (PDP)

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang mempunyai lebih dari satu peubah bebas. Turunan fungsi terhadap setiap peubah bebas dilakukan secara parsial. Berikut contoh persamaan diferensial parsial (PDP):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6xye^{x+y} \qquad , u = g(x, y) \qquad (2.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3sin\,(x + t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad , u = g(x, y, t) \quad (2.8)$$

Peubah bebas untuk contoh 1 adalah *x* dan *y*, sedangkan peubah terikatnya adalah u, yang merupakan fungsi dari *x* dan *y*, atau ditulis sebagai *u =g(x,y)*. Sedangkan peubah bebas untuk contoh 2 adalah *x*, *y*, dan *t*, sedangkan peubah terikatnya adalah *u*, yang merupakan fungsi dari *x*, *y*, dan *t*, atau ditulis sebagai *u = g(x, y, t)* (Bekir, 2019).

2.4 Deret Taylor

Deret Taylor dalam matematika adalah representasi fungsi matematika sebagai jumlahan tak hingga dari suku-suku yang nilainya dihitung dari turunan fungsi tersebut di suatu titik. Deret ini dapat dianggap sebagai limit polynomial Taylor. Deret Taylor mendapat nama dari matematikawan Inggris Brook Taylor. Bila deret tersebut terpusat di titik nol, deret tersebut dinamakan sebagai deret *Maclaurin*, dari nama matematikawan Skotlandia Colin Maclaurin.
(Munir, 2010) menyatakan bahwa deret Taylor dari sebuah fungsi riil atau fungsi kompleks $f(x)$ yang terdiferensialkan tak hingga dalam sebuah pemetaan sebuah bilangan riil atau kompleks a adalah deret pangkat.

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \cdots. \quad (2.9)$$

yang dalam bentuk lebih ringkas dapat dituliskan sebagai.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n \qquad (2.10)$$

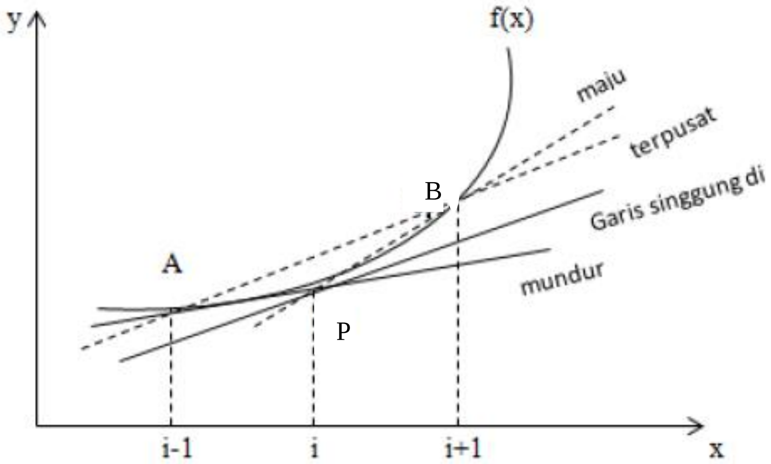
dengan $n!$ melambangkan faktorial n dan $f^{(n)}(a)$ melambangkan nilai dari turunan ke-n dari f pada titik a. Turunan ke nol dari f didefinisikan sebagai f itu sendiri, dan $(x-a)^0$ dan 0! didefinisikan sebagai 1 (Nugroho, 2009).

2.5 Metode Beda Hingga

(Kwok, 1998) menyatakan bahwa metode beda hingga merupakan salah satu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial parsial. Salah satu contoh persamaan diferensial parsial, yaitu.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\Delta S} = rf \qquad (2.11)$$

Pengertian penyelesaian dengan metode beda hingga dapat dijelaskan dengan meninjau suatu luasan yang merupakan hasil dari persamaan diferensial parsial yang mempunyai sutu variabel tak bebas c dan dua variabel bebas x dan t. Setiap persamaan diferensial yang berlaku pada luasan tersebut menyatakan keadaan suatu titik pias yang cukup kecil di luasan tersebut.



Gambar (2.1). Garis singgung sejajar bidang

Untuk mendapatkan turunan di titik $P(i,l)$ dibuat potongan sejajar $c-x$. Harga $\frac{\partial c}{\partial t}$ di titik P menyatakan sudut tangensial dan garis singgung pada Gambar (2.1). Sudut tersebut dapat didekati dengan beberapa cara yaitu (Wignyosukarto, 1986).

1. Sudut dari garis singgung AP di titik P disebut pendekatan diferensi mundur.

$$\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_i^l \approx \frac{c_i^l - c_{i-1}^l}{\Delta x} \quad (2.12)$$

2. Sudut dari garis singgung BP di titik P disebut pendekatan diferensi maju.

$$\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_i^l \approx \frac{c_{i+1}^l - c_i^l}{\Delta x} \quad (2.13)$$

3. Sudut dari garis singgung AP dan BP di titik P disebut pendekatan diferensi tengah.

$$\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_i^l \approx \frac{c_{i+1}^l - c_{i-1}^l}{\Delta x} \quad (2.14)$$

2.5.1 Metode Beda Hingga Implisit (Beda Mundur)

(Hull, 2002) menyatakan bahwa untuk mengaproksimasi turunan parsial $\frac{\partial f}{\partial S}$ pada persamaan (2.11) dengan indeks (i, j) dapat menggunakan persamaan berikut.

$$\frac{\partial f}{\partial S} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta S} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial f}{\partial S} \approx \frac{f_{i,j} - f_{i,j+1}}{\Delta S} \quad (2.16)$$

Persamaan (2.15) adalah aproksimasi beda maju dan persamaan (2.16) merupakan aproksimasi beda mundur. Untuk mengaproksimasi beda pusat menggunakan persamaan berikut.

$$\frac{\partial f}{\partial S} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S} \quad (2.17)$$

Sedangkan untuk mengaproksimasi $\frac{\partial f}{\partial t}$ menggunakan aproksimasi beda maju, yaitu.

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} \quad (2.18)$$

Untuk mengaproksimasi persamaan $\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$ menggunakan persamaan berikut.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \approx \frac{f_{i,j+1}+f_{i,j-1}-2f_{i,j}}{\Delta S^2} \tag{2.19}$$

Kemudian persamaan (2.17), (2.18), dan (2.19) disubsitusikan ke dalam persamaan (2.11) serta untuk $S = j\Delta S$, sehingga diperoleh persamaan.

$$\frac{f_{i+1,j}-f_{i,j}}{\Delta t} + rj\Delta S\,\frac{f_{i,j+1}-f_{i,j-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta S^2\,\frac{f_{i,j+1}+f_{i,j-1}-2f_{i,j}}{\Delta S^2} = rfi, \tag{2.20}$$

Untuk $j = 1,2,\dots,M-1$ dan $i = 0,1,2,\dots,N-1$. Persamaan (2.20) dapat disederhanakan menjadi.

$$a_j f_{i,j-1} + b_j f_{i,j} + c f_{i,j+1} = f_{i+1,j} \tag{2.21}$$

Dengan,

$$a_j = \frac{1}{2}rj\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t, \quad b_j = 1 + \sigma^2 j^2 \Delta t + rj\Delta t, \quad c_j = -\frac{1}{2}rj\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t$$

Persamaan (2.21) merupakan solusi numerik denggan menggunakan metode beda hingga Implisit.

2.5.2 Metode Beda Hingga Eksplisit (Beda Maju)

(Hull, 2002) menyatakan bahwa untuk mengaproksimasi turunan parsial $\frac{\partial f}{\partial S}$ dan $\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$ dengan metode beda hingga eksplisit menggunakan langkah seperti metode beda hingga implisit. Perbedaannya hanya pada indeksnya yaitu $(i+1, j)$.

$$\frac{\partial f}{\partial S} \approx \frac{f_{i+1,j+1}-f_{i+1,j-1}}{\Delta S} \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \approx \frac{f_{i+1,j+1}+f_{i+1,j-1}-2f_{i,j}}{\Delta S^2} \tag{2.23}$$

Dengan cara yang sama pada metode beda hingga implisit, maka diperoleh solusi numerik metode beda hingga eksplisit.

$$\frac{f_{i+1,j}-f_{i,j}}{\Delta t} + rj\Delta S\,\frac{f_{i+1,j+1}-f_{i+1,j-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta S^2\,\frac{f_{i+1,j+1}+f_{i+1,j-1}-2f_{i+1,j}}{2\Delta S^2} = rfi,j \tag{2.24}$$

Atau

$$f_{i,j} = a_j^* f_{i+1,j-1} + b_j^* f_{i+1,j} + c_j^* f_{i+1,j+1} \tag{2.25}$$

Dengan,

$$a_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t}\left(-\frac{1}{2}rj\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t\right),\quad b_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t}(1-\sigma^2 j^2 \Delta t),$$

$$c_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t}\left(\frac{1}{2}rj\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t\right)$$

2.5.3 Metode Beda Hingga Crank-Nicholson

(Hull, 2002) menyatakan bahwa metode beda hingga Crank-Nicholson merupakan rata-rata dari metode beda hingga eksplisit dan implisit. Untuk persamaan metode beda hingga implisit diberikan persamaan (2.21) dan untuk persamaan metode beda hingga eksplisit diberikan persamaan (2.25). Sehingga solusi numerik beda hingga Crank-Nicholson, yaitu.

$$f_{i+1,j} + f_{i,j} = a_j f_{i,j-1} + b_j f_{i,j} + c f_{i,j+1} + a_j^* f_{i+1,j-1} + b_j^* f_{i+1,j} + c_j^* f_{i+1,j+1} \tag{2.26}$$

$$f_{i+1,J} - a_j^* f_{i+1,j-1} - b_j^* f_{i+1,j} - c_j^* f_{i+1,j+1} = a_j f_{i,j-1} + b_j f_{i,j} + c_j f_{i,j+1} - f_{i,j} \tag{2.27}$$

2.6 Model Persamaan *Black-Scholes*

Untuk proses harga saham diberikan sebagai berikut.

$$v = \frac{dS}{dt} = \mu S dt + \sigma S dW \tag{2.28}$$

Dengan μ adalah tingkat bunga, σ adalah volatilitas dan dW adalah proses gerak *Brown* atau perubahan harga saham. Misalkan *V* adalah harga opsi atau lainnya dengan saham S pada waktu t, maka diperoleh.

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\mu S + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial V}{\partial S}\sigma S dW \tag{2.29}$$

Persamaan diskrit dari persamaan (2.28) dan (2.29) adalah.

$$\delta S = \mu S \delta t + \sigma S \delta W \tag{2.30}$$

Dan

$$\delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\mu S + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\delta t + \frac{\partial V}{\partial S}\sigma S \delta W \tag{2.31}$$

Proses gerak *Brown* yang mendasari *V* dan *S* dapat dihilangkan dengan memilih portofolio yang sesuai dengan saham dan derivatif. Untuk portofolio dipilih nilai portofolio π yang terdiri dari opsi *V* dengan perubahan saham pada jangka pendek, yaitu

$$\pi = -V + \frac{\partial V}{\partial S}S \tag{2.32}$$

Perubahan nilai portofolio

$$\delta\pi = -\delta V + \frac{\partial V}{\partial S}\delta S \tag{2.33}$$

Kemudian persamaan (2.30) dan (2.31) disubsitusikan ke dalam persamaan (2.33), yaitu

$$\delta\pi = \left(-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\delta t \tag{2.34}$$

Portofolio merupakan gabungan dari aset-aset. Portofolio ini dikatakan tidak beresiko. Karena tidak ada gerak *random Brown*. Gerak *Brown* menyebabkan terjadinya perubahan harga saham. Portofolio ini dikatakan konstan sehingga portofolio ini mempunyai pendapatan yang sama dengan saham jangka pendek lainnya yang bebas risiko. Portofolio bebas risiko dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\delta\pi = r\pi\,\delta t \tag{2.35}$$

Dengan r adalah suku bunga bebas risiko. Dengan mensubsitusikan persamaan (2.32) dan (2.34) ke dalam persamaan (2.35), maka diperoleh persamaan

$$\left(-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\delta t = r\left(-V + \frac{\partial V}{\partial S}S\right)\delta t \tag{2.36}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{2.37}$$

Persamaan (2.37) merupakan persamaan diferensial *Black-Scholes* yang digunakan untuk menentukan harga opsi.

2.7 Masalah Nilai Awal (MNA)

Pada persamaan diferensial biasa, masalah nilai awal adalah persamaan diferensial yang dilengkapi dengan serangkaian kendala yang disebut dengan kondisi awal atau syarat awal yang diberikan dalam suatu masalah diferensial, dan solusi untuk masalah nilai awal adalah suatu nilai atau fungsi persamaan diferensial yang juga memenuhi kondisi awal (Boyce, 2012). Kondisi awal adalah turunan fungsi solusi di batas-batas titik ujung kedua interval.

2.8 Masalah Nilai Batas (MNB)

Selain masalah nilai awal, pada persamaan diferensial juga dikenal adanya masalah nilai batas (MNB). Pada masalah nilai awal, syarat awal yang menyertai persamaan diferensial hanya pada satu titik tertentu. Sedangkan pada masalah nilai batas, syarat awalnya pada dua titik yang berbeda. Untuk membedakan syarat awal pada masalah nilai awal dan pada masalah nilai batas, maka syarat awal pada maslah nilai batas disebut sebagai syarat batas (Finan, 2012).

2.9 Galat

Galat dapat disebut juga *error* atau dalam keseharian dapat disebut sebagai kesalahan, kesalahan yang dimaksud di sini adalah kesalahan dalam proses pengambilan data. Galat atau *error* dapat juga didefinisikan sebagai selisih dari nilai atau hasil yang kita harapkan terjadi (*expected value*) dengan observasi atau kenyataan yang terjadi di lapangan. Galat atau biasa disebut *error* dalam metode numerik adalah selisih antara nilai yang ditimbulkan antara nilai sebenarnya dengan nilai yang dihasilkan dengan metode numerik. Galat dapat berfungsi menunjukkan efisiensi dari satu jenis percobaan atau penelitian ke penelitian yang lain. Secara normal, kita menginginkan galat yang bernilai kecil bahkan tidak terjadi galat. Namun ketiadaan galat juga dapat menyebabkan pertanyaan dalam penelitian kita (Ernawati, 2017).

Menganalisis galat sangat penting di dalam perhitungan yang menggunakan metode numerik. Galat berasosiasi dengan seberapa dekat solusi hampiran terhadap solusi sejatinya. Semakin kecil galatnya, semakin teliti solusi numerik yang didapatkan. Misalkan $\hat{a}$ adalah nilai hampiran terhadap nilai sejati a, maka selisih $\varepsilon = a - \hat{a}$ disebut galat (Maharani, 2018).

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2022/2023 dengan tempat penelitian yaitu, Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Adapun Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah:

1. Mengkaji perhitungan harga opsi Asia dengan menggunakan metode beda hingga implisit dan Crank-Nicholson.
2. Variabel yang diambil adalah harga saham untuk menentukan harga opsi saham.
3. Mengkaji metode beda hingga implisit dan Crank-Nicholson dengan simulasi program Matlab.
4. Menganalisis hasil dari metode beda hingga implisit dan Crank-Nicholson pada perhitungan harga opsi Asia.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, dapat diperoleh suatu kesimpulan bahwa harga opsi Asia dapat dihitung menggunakan persamaan diferensial dengan menggunakan metode beda hingga implisit dan Crank-Nicholson. Hal ini dikarenakan metode beda hingga implisit dan Crank-Nicholson menggunakan partisi waktu N diperbanyak, yang mana semakin partisi waktu N diperbanyak, maka akan mendekati ke suatu titik kekonvergenan. Dari kedua metode beda hingga implisit dan Crank-Nicholson, metode Crank-Nicholson merupakan metode yang lebih efektif dalam perhitungan harga opsi Asia dibandingkan metode beda hingga implisit. karena metode beda hingga Crank-Nicholson memberikan nilai *error* atau galat yang kecil yang bernilai 0,0028, sehingga hasil yang diberikan lebih optimal atau lebih akurat dibanding dengan metode beda hingga implisit yang bernilai 0,0719.

5.2 Saran

Pada skripsi ini penulis hanya memfokuskan pada hasil perhitungan harga opsi Asia dengan metode beda hingga implisit dan Crank-Nicholson. Diharapkan pada skripsi selanjutnya dapat mengkaji tentang perhitungan harga opsi Asia dengan transformasi peubah serta analisis kestabilannya.

DAFTAR PUSTAKA

Bekir, A. (2019). On Traveling Wave Solutions to Combined KdV-mKdV Equation and Modifed Burgers-KdV Equation. . *Communications in Nonlinear Science Numerical Simulation Vol 14.*, 1038-1042.

Boyce, W. E. (2012). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.* New York: Raghothaman Srinivasan.

Brewer, K. F. (2012). Geometric Brownian Motion, Option Pricing, and Simulation: Some Spreadsheet-Based Exercises in Financial Modeling. *Spreadsheet in Education (eJSiE)*, 1-13.

Chapra, S. C. (2012). *Applied Numerical Methods With MATLAB For Engineers and Scientists.* . New York: Raghothaman Srinivasan.

Ernawati, d. (2017). Perbandingan Solusi Numerik Integral Lipat Dua Pada Fungsi Fuzzy Dengan Metode Romberg Dan Simulasi Monte Carlo . *jurnal Msa Vol.5 No.2 Ed.*

Finan, M. (2012, Februari 16). *A First Course in Elementary Differential Equations*. Retrieved from http://math.utoledo.edu/~melbialy/classes/Elem-DE/Finan-diffq1book.pdf

Hull, J. (2002). *Option Future and Other Derivarive* . Toronto: Prentice Union.

Kwok, Y. (1998). *Mathematical Models of Financial Derivatives* . Hongkong: Springer.

Maharani, S. d. (2018). Analisis Numerik Berbasis Group Investigion Untuk Meningkatkan Kemamouan Berpikir Kritis . *Jawa Timur: CV. AE Media Grafika*.

Munir, R. (2010). *Metode Numerik.* Bandunng: Informatika Bandung.

Mutholi'ah, E. (2008). *Analisis Perbandingan Metode Beda Hingga Skema Implisit dan Crank-Nicholson Pada Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial.* Malang: UIN Malang .

Nugroho, D. (2009). *Metode Numerik.* Salatiga: Univversitas Kristen Satya Wacana.

Sujono. (1988). *Peengajaran Matematika untuk Sekolah Menengah* . Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Dirjen Dikti Proyek Pengembangan Lembaga Pendidikan Tenaga Kependidikan .

Wignyosukarto, B. (1986). *Hidraulika Numerik.* Yogyakarta: PAU UGM.

Yeremia Wijaya, J. (2017). Perbandingan Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa Menggunakan Metode Backpropagation, Euler. Heun, dan Runge-Kutta Orde 4. *Jurnal Telematika Vol.11 No.1* , 51-61.