KARAKTERISASI MODUL FAKTOR *ROUGH* ATAS RING *ROUGH* PADA HIMPUNAN BERHINGGA

Skripsi

Oleh

LISA ADELIA
2017031016

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

ABSTRACT

CHARACTERIZATION OF ROUGH QUOTIENT MODULES OVER ROUGH RINGS ON FINITE SETS

By

Lisa Adelia

Given an ordered pair (U, γ) which is called an approximation space, where U is a universal set and γ is an equivalence relation on the set U. A relation γ is called an equivalence relation if the relation γ is reflexive, symmetric, and transitive. Equivalence relations build mutually separate partitions called equivalence classes. Given B which is a subset of U, the lower approximation of B is the union of equivalence classes contained in the set B, denoted by $\underline{Apr}(B)$. An upper approximation of B is a union of equivalence classes that have intersections with B, denoted by $\overline{Apr}(B)$. If $\overline{Apr}(B) - \underline{Apr}(B) \neq \emptyset$ or $\overline{Apr}(B) \neq \underline{Apr}(B)$ then the set B is called a rough set in the approximation space (U, γ). The set B is a rough module if B meets certain conditions. This research investigates the construction of the rough quotient ring and the rough quotient module over the rough ring. In addition, we build a program to determine a finite set is a rough quotient module over a rough ring by using Python.

Keywords: *Approximation space, rough set, rough module, rough quotient ring, rough quotient module over rough ring.*

ABSTRAK

KARAKTERISASI MODUL FAKTOR *ROUGH* ATAS RING *ROUGH* PADA HIMPUNAN BERHINGGA

Oleh

Lisa Adelia

Diberikan pasangan berurutan (U, γ) yang disebut sebagai ruang aproksimasi, dengan U merupakan himpunan semesta dan γ yaitu relasi ekuivalensi pada himpunan U. Relasi γ disebut relasi ekuivalensi jika relasi γ bersifat refleksif, simetris, dan transitif. Relasi ekuivalensi membangun partisi-partisi yang saling asing yaitu kelas ekuivalensi. Diberikan $B \subseteq U$. Aproksimasi bawah dari B, dinotasikan dengan $\underline{Apr}(B)$, yakni gabungan dari kelas-kelas ekuivalensi yang termuat di dalam himpunan B. Aproksimasi atas dari B yaitu gabungan dari kelas ekuivalensi yang mempunyai irisan dengan himpunan B, dinotasikan dengan $\overline{Apr}(B)$. Jika $\overline{Apr}(B) - \underline{Apr}(B) \neq \emptyset$ atau $\overline{Apr}(B) \neq \underline{Apr}(B)$, maka himpunan B disebut himpunan *rough* pada ruang aproksimasi (U, γ). Himpunan B merupakan modul *rough* jika B memenuhi syarat-syarat tertentu. Pada penelitian ini dibahas mengenai konstruksi ring faktor *rough* dan modul faktor *rough* atas ring *rough*, serta membuat program untuk menentukan suatu himpunan berhingga merupakan modul faktor *rough* atas ring *rough* menggunakan *Python*.

Kata Kunci: *Ruang aproksimasi, himpunan rough, modul rough, ring faktor rough, modul faktor rough atas ring rough.*

KARAKTERISASI MODUL FAKTOR *ROUGH* ATAS RING *ROUGH* PADA HIMPUNAN BERHINGGA

LISA ADELIA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

Judul Skripsi	:	**KARAKTERISASI MODUL FAKTOR *ROUGH* ATAS RING *ROUGH* PADA HIMPUNAN BERHINGGA**
Nama Mahasiswa	:	Lisa Adelia
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2017031016**
Program Studi	:	**Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**
NIP. 198406272006042001	NIP. 198002062003121003

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim penguji

Ketua	:	**Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**	....
Sekretaris	:	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **20 Maret 2024**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Lisa Adelia**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2017031016**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Karakterisasi Modul Faktor *Rough* atas Ring *Rough* pada Himpunan Berhingga**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 20 Maret 2024

Penulis,

Lisa Adelia

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Lisa Adelia yang lahir di Bogor pada tanggal 14 November 2001. Penulis merupakan anak keempat dari empat bersaudara yang terlahir dari pasangan Purnomo Sapardi dan Diana Sikam.

Penulis menempuh awal pendidikan di TK Islam Hasanah pada tahun 2007 sampai tahun 2008. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan sekolah dasar di SD Negeri Cicadas 01 pada tahun 2008 sampai tahun 2011 yang dilanjutkan di SD Negeri Jatiasih VIII pada tahun 2011 sampai tahun 2014. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan sekolah menengah pertama di SMP Negeri 12 Bekasi pada tahun 2014 sampai tahun 2017. Penulis melanjutkan sekolah menengah atas di SMA Negeri 2 Gunung Putri.

Pada tahun 2020, penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa S1 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung (Unila) melalui jalur Seleksi Nilai Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN). Selama menjadi mahasiswa, pada tahun 2022 penulis merupakan staf ahli Dinas Pemberdayaan Wanita (PW) Badan Eksekutif Mahasiswa (BEM) FMIPA Unila.

Sebagai bentuk aplikasi ilmu yang didapat, pada bulan Januari 2023 sampai dengan Februari 2023 penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Dinas Bina Marga dan Bina Konstruksi Provinsi Lampung. Kemudian, pada pertengahan tahun 2023 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Gunung Sugih, Kecamatan Kedondong, Kabupaten Pesawaran pada bulan Juni 2023 sampai dengan Agustus 2023.

KATA INSPIRASI

"Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya"
(Q.S Al-Baqarah: 286)

"Dan barang siapa yang bertakwa kepada Allah, niscaya Allah menjadikan baginya kemudahan dalam urusannya"
(Q.S At-Talaq: 4)

"Semua mimpi kita akan menjadi kenyataan jika kita punya keberanian untuk mengejarnya"
(Walt Disney)

"*Be the main character of your own life*"
(Xu Minghao)

"*Reality is always more cruel than our imagination, but we are stronger than the person imagine ourselves to be*"
(Xu Minghao)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin,

Puji dan syukur kehadirat Allah Subhanahu Wata'ala atas limpahan nikmat dan karunia-Nya, sehingga skripsi ini dapat selesai. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad Shallallahu'Alaihi Wasallam.

Dengan penuh syukur, kupersembahkan karya ini kepada:

Keluarga Tercinta

Terimakasih kepada Ayah, Ibu dan Kakak-kakak untuk semua dukungan, do'a, kasih sayang dan nasehat yang senantiasa diberikan kepadaku. Terimakasih kepada keponakan-keponakanku yang sudah menjadi obat dan kebahagiaan disaat lelah ku. Terimakasih untuk seluruh keluargaku karena sudah mendukungku sampai saat ini.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang telah membantu, memberi masukan, arahan dan ilmu yang bermanfaat dalam proses pembuatan skripsi ini.

Sahabat – sahabatku

Terimakasih kepada semua sahabatku atas segala kebersamaan selama ini, dukungan, dan kebahagiaan yang selalu menyertai selama perkuliahan ini.

Almamater Tercinta Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul “Karakterisasi Modul Faktor *Rough* atas Ring *Rough* pada Himpunan Berhingga” dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing I yang telah meluangkan waktu untuk memberikan arahan, motivasi, bimbingan, saran serta dukungan kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

2. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan, saran dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

3. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku penguji sekaligus Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi yang membangun kepada penulis selama proses penyusunan skripsi ini.

4. Ibu Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing akademik.

5. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

6. Ibu, Ayah dan Kakak-kakak yang selalu memberikan memotivasi, dukungan dan do’a kepada penulis.

7. Terimakasih kepada Seventeen yang telah memberikan dukungan emosional kepada penulis.

8. Terimakasih kepada diriku sendiri karena sudah berjuang dan bertahan sejauh ini.

9. Bidari Tasya Salsabila, Aira Rahma Gunawan, Anisa Maharani Pramestiady dan Fegy Herlinawati yang selalu memberikan dukungan, motivasi, semangat dan kebersamaan dalam menjalani perkuliahan dan proses penyusunan skripsi ini.

10. Teman-teman satu bimbingan, Bidari, Aira, Anggita dan Sandi yang telah memberikan semangat maupun saran kepada penulis.

11. Teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2020 yang sudah banyak membantu selama masa perkuliahan.

12. Semua pihak yang membantu dalam proses penyusunan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebut satu persatu.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 20 Maret 2024

Lisa Adelia

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori himpunan *rough* (*rough set theory*) merupakan teknik pendekatan matematika baru yang dikemukakan oleh Pawlak pada tahun 1982 untuk mengatasi masalah ketidakjelasan (*vagueness*) dan ketidakpastian (*uncertainty*) dalam pengklasifikasian dan analisis data. Konsep dasar dari teori himpunan *rough* adalah relasi ekuivalensi dan ruang aproksimasi dengan relasi ekuivalensi merupakan relasi yang bersifat refleksif, simetris, dan transitif. Relasi ekuivalensi membangun partisi-partisi yang saling lepas atau saling asing yaitu kelas ekuivalensi. Dari kelas ekuivalensi, dapat dibentuk aproksimasi bawah (*lower approximation*) dan aproksimasi atas (*upper approximation*) dari suatu himpunan bagian U. Pasangan berurut himpunan tak kosong U dan relasi ekuivalensi γ pada U disebut dengan ruang aproksimasi yang dinotasikan dengan (U, γ). Diberikan ruang aproksimasi (U, γ) dan himpunan $B \subseteq U$, aproksimasi bawah dari B pada ruang aproksimasi (U, γ) yang dinotasikan dengan $\underline{Apr}(B)$ yakni gabungan dari kelas-kelas ekuivalensi yang termuat di dalam himpunan B, sedangkan aproksimasi atas dari B pada ruang aproksimasi (U, γ) yang dinotasikan dengan $\overline{Apr}(B)$ yaitu gabungan dari kelas-kelas ekuivalensi yang beririsan dengan himpunan B. Himpunan B dikatakan himpunan *rough* di ruang aproksimasi (U, γ) jika dan hanya jika $\overline{Apr}(B) - \underline{Apr}(B) \neq \emptyset$ atau $\overline{Apr}(B) \neq \underline{Apr}(B)$.

Penelitian mengenai teori himpunan *rough* dan penerapan dari teori tersebut telah banyak dilakukan di bidang struktur aljabar. Miao dkk. melakukan penelitian pada tahun 2005 mengenai grup *rough*, subgrup *rough*, homomorfisma grup *rough*, dan sifat-sifatnya (Miao dkk., 2005). Berikutnya, Zhang dkk. pada tahun 2006 melakukan penelitian mengenai modul *rough*, modul faktor *rough* atas ring *roug*h, dan beberapa sifatnya (Zhang dkk., 2006). Selanjutnya, penelitian yang dilakukan oleh Sinha dan

Prakash pada tahun 2015 membahas tentang modul injektif *rough* beserta dengan sifat-sifatnya (Sinha & Prakash, 2015) kemudian dilanjutkan dengan penelitian yang dilakukan oleh Isaac dan Paul pada tahun 2017 mengenai G-modul *rough* dan beberapa sifatnya (Isaac & Paul, 2017). Pada tahun 2022, Nugraha dkk. melakukan penelitian mengenai penerapan dari himpunan *rough* pada struktur grup beserta dengan sifat-sifatnya (Nugraha dkk., 2022) kemudian dilanjutkan dengan penelitian yang dilakukan oleh Hafifulloh dkk. pada tahun 2022 mengenai sifat-sifat barisan v-coexact *rough* pada grup *rough* (Hafifulloh dkk., 2022). Penelitian dilakukan oleh Agusfrianto dkk. pada tahun 2022 yang membahas mengenai ring *rough*, subring *rough*, dan ideal *rough* (Agusfrianto dkk., 2022), dilanjutkan dengan penelitian yang dilakukan oleh Agusfrianto dan Ambarwati pada tahun 2023 yang mengemukakan gagasan mengenai sifat-sifat dari ideal *rough* pada ring *rough* (Agusfrianto & Ambarwati, 2023). Selain itu, Yanti dkk. melakukan penelitian pada tahun 2023 yang membahas tentang penerapan himpunan *rough* pada modul proyektif sehingga terbentuk modul proyektif *rough* dan sifat-sifatnya (Yanti dkk., 2023), serta berbagai penelitian lainnya mengenai penerapan teori himpunan *rough*.

Dalam penelitian ini akan dibahas mengenai penerapan teori himpunan *rough* pada bidang struktur aljabar yaitu dalam mengkonstruksi struktur modul faktor atas ring dari suatu ruang aproksimasi. Lebih lanjut, akan dibuat suatu program menggunakan *Python* untuk menentukan suatu himpunan berhingga merupakan modul faktor *rough* atas ring *rough*.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini yaitu menerapkan konsep teori himpunan *rough* dalam mengkonstruksi struktur ring faktor dan modul faktor atas ring dari suatu ruang aproksimasi sehingga terbentuk ring faktor *rough* dan modul faktor *rough* atas ring *rough*, serta membuat program untuk menentukan suatu himpunan berhingga merupakan modul faktor *rough* atas ring *rough* atas suatu ruang aproksimasi.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah:

1. menambah pengetahuan mengenai konsep ring faktor *rough*;
2. menambah pengetahuan mengenai konsep modul faktor *rough* atas ring *rough*;
3. menjadikan tulisan ini sebagai sarana pembelajaran dan referensi untuk mengembangkan wawasan dalam mempelajari modul faktor *rough*.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan membahas mengenai definisi-definisi yang akan membantu dalam penelitian ini. Definisi-definisi yang akan dibahas antara lain yaitu himpunan, grup, ring, modul, relasi, ruang aproksimasi, himpunan *rough*, grup *rough*, ring *rough*, modul *rough*, dan modul faktor *rough*.

2.1 Himpunan

Konsep himpunan dikembangkan oleh seorang matematikawan Jerman, Georg Cantor pada tahun 1845 – 1918 yang kemudian dikembangkan kembali oleh John Venn pada tahun 1834 – 1923. Definisi dari himpunan dapat dijelaskan sebagai berikut.

Definisi 2.1.1 Himpunan (*set*) adalah kumpulan objek yang terdefinisi dengan baik (*well defined*), artinya ketika diberikan sebarang objek, maka objek yang termasuk atau tidak dalam suatu himpunan dapat ditentukan. Objek yang termasuk dalam suatu himpunan disebut anggota atau elemen. Himpunan dinotasikan dengan huruf kapital misal $A, B, C, \ldots$, sedangkan elemen atau anggota dinotasikan dengan huruf kecil misal $a, b, c, \ldots$ (Susilowati, 2016).

Dua himpunan atau lebih dapat dioperasikan sehingga menghasilkan himpunan lain. Operasi yang digunakan adalah irisan (*intersection*), gabungan (*union*), dan selisih (*difference*). Berikut penjelasan dari beberapa operasi himpunan.

1. Irisan dari himpunan A dan B adalah himpunan yang elemen-elemennya merupakan anggota kedua himpunan A dan B, dinotasikan dengan:
   $A \cap B = \{x | x \in A \text{ dan } x \in B\}$.

2. Gabungan dari himpunan A dan B adalah himpunan yang elemen-elemennya merupakan anggota himpunan A atau himpunan B, dinotasikan dengan:
   $A \cup B = \{x | x \in A \text{ atau } x \in B\}$.

3. Selisih dua himpunan A dan B adalah himpunan yang elemen-elemennya terdiri atas semua elemen dari A yang bukan merupakan elemen dari B, dinotasikan dengan:
   $A - B = \{x|x \in A$ dan $x \notin B\}$ (Susilowati, 2016).

Berikut diberikan contoh dari himpunan.

Contoh 2.1.2 Misalkan B merupakan himpunan bilangan bulat positif yang lebih kecil dari 7, dinyatakan sebagai

$$B = \{x|x \text{ adalah himpunan bilangan bulat positif lebih kecil dari 7 }\}.$$

Himpunan B juga dapat ditulis dengan $B = \{x|x \in \mathbb{Z}^+, x < 7\}$, sehingga $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Selanjutnya, akan dibahas mengenai definisi dan contoh dari kardinalitas himpunan, himpunan kosong, himpunan semesta, himpunan bagian, himpunan kuasa, serta himpunan saling lepas. Berikut diberikan definisi dari kardinalitas suatu himpunan.

Definisi 2.1.3 Diberikan himpunan berhingga A. Banyaknya jumlah anggota atau elemen berbeda di dalam A disebut kardinal dari himpunan A. Himpunan dikatakan berhingga (*finite set*) jika terdapat n elemen berbeda (*distinc*), dengan n adalah bilangan bulat tak negatif. Notasi kardinal dari himpunan A dapat ditulis dengan $n(A)$ atau $|A|$ (Munir, 2016).

Berikut contoh kardinalitas himpunan.

Contoh 2.1.4 Jika $A = \{x|x$ adalah faktor dari $20\}$, atau $A = \{1, 2, 4, 6, 10, 20\}$, maka $|A| = 6$.

Setelah membahas definisi dan contoh kardinalitas himpunan, selanjutnya diberikan definisi himpunan kosong.

Definisi 2.1.5 Himpunan dengan kardinal 0 atau himpunan yang tidak memiliki anggota disebut himpunan kosong (*empty set*) yang dinotasikan dengan $\emptyset$ atau $\{\}$ (Susilowati, 2016).

Berikut diberikan contoh himpunan kosong.

Contoh 2.1.6 Diberikan himpunan $C = \{x|x$ bilangan bulat dan $6 < x < 7\}$. Himpunan C merupakan himpunan yang tidak memiliki anggota, karena tidak ada x bilangan bulat diantara 6 dan 7, jadi dapat disimpulkan himpunan C merupakan himpunan kosong atau dapat ditulis $C = \emptyset$.

Setelah membahas definisi dan contoh himpunan kosong, selanjutnya diberikan definisi himpunan semesta.

Definisi 2.1.7 Himpunan semesta adalah himpunan dari semua objek yang berbeda. Notasi dari himpunan semesta biasanya adalah S atau U (Pratama, 2019).

Berikut merupakan contoh himpunan semesta.

Contoh 2.1.8 Diberikan U merupakan himpunan semesta dari bilangan bulat negatif. Jadi $U = \{-1, -2, -3, -4, -5, \dots\}$.

Setelah membahas definisi dan contoh himpunan semesta, selanjutnya diberikan definisi himpunan bagian.

Definisi 2.1.9 Himpunan A disebut himpunan bagian (*subset*) dari himpunan B jika untuk setiap elemen $a \in A$ juga merupakan elemen B, dinotasikan dengan $A \subseteq B$. Himpunan B dikatakan *superset* dari A (Manik, 2014).

Berikut diberikan contoh himpunan bagian.

Contoh 2.1.10 Diberikan himpunan $B = \{-3, -5, -7, -9\}$. Berdasarkan Contoh 2.1.8, dapat disimpulkan bahwa himpunan B merupakan himpunan bagian dari U atau dapat ditulis $B \subseteq U$.

Setelah membahas definisi dan contoh himpunan bagian, selanjutnya diberikan definisi himpunan kuasa.

Definisi 2.1.11 Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan H adalah himpunan yang anggotanya merupakan semua himpunan bagian dari H, termasuk himpunan kosong dan himpunan H sendiri. Notasi himpunan kuasa dari himpunan H dapat ditulis $P(H)$ atau 2^H (Susilowati, 2016).

Berikut merupakan contoh himpunan kuasa.

Contoh 2.1.12 Diberikan himpunan $H = \{f, g, h\}$, diperoleh kardinalitas dari himpunan H yaitu $|H| = 3$, maka $|P(H)| = 2^3 = 8$. Himpunan kuasa dari himpunan H yaitu:

$$P(H) = 2^H = \{\emptyset, \{f\}, \{g\}, \{h\}, \{f, g\}, \{f, h\}, \{g, h\}, \{f, g, h\}\}.$$

Setelah membahas definisi dan contoh himpunan kuasa, selanjutnya diberikan definisi himpunan saling lepas.

Definisi 2.1.13 Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika dan hanya jika irisan dari kedua himpunan tersebut merupakan himpunan kosong yang dinotasikan dengan $A//B$ (Susilowati, 2016).

Berikut adalah contoh himpunan saling lepas.

Contoh 2.1.14 Jika $A = \{x | x \in P, x < 7\}$ dan $B = \{15, 30, 45, \dots\}$, maka $A//B$.

2.2 Grup

Sebelum membahas definisi dan contoh grup, akan dijelaskan definisi operasi biner karena operasi biner merupakan dasar dari pembentukan struktur grup. Berikut definisi operasi biner.

Definisi 2.2.1 Operasi biner pada himpunan G adalah fungsi dari $G \times G \to G$ yang memetakan setiap pasangan berurut $(a, b) \in G \times G$ ke $a * b$ atau ab di G dengan $a * b$ unik (tunggal) (Hidayat, 2017).

Berikut merupakan contoh operasi biner.

Contoh 2.2.2 Diberikan himpunan $K = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} | b, d \in \mathbb{R} \right\}$.

Untuk setiap dua matriks $\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \in K$, berlaku:

$$\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_1d_2 \\ 0 & d_1d_2 \end{bmatrix} \in K.$$

Jadi, operasi perkalian matriks merupakan operasi biner pada K.

Selanjutnya diberikan definisi grup.

Definisi 2.2.3 Grup adalah himpunan G dengan operasi biner

$$\cdot : G \times G \to G$$

yang memenuhi tiga aksioma berikut:

1. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, untuk setiap $a, b, c \in G$ ($\cdot$ bersifat asosiatif);

2. terdapat elemen identitas $e \in G$ sehingga $a \cdot e = e \cdot a = a$ untuk setiap $a \in G$ (G memiliki elemen identitas terhadap $\cdot$);

3. untuk setiap $a \in G$ terdapat $a^{-1} \in G$ sehingga $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ (setiap elemen G memiliki invers di G) (Adkins & Weintraub, 1992).

Berikut diberikan contoh grup.

Contoh 2.2.4 Akan ditunjukkan $\langle \mathbb{Z}_7, +_7 \rangle$ dengan $+_7$ operasi penjumlahan modulo 7 merupakan grup.

1. Akan ditunjukkan himpunan $\mathbb{Z}_7$ tertutup terhadap operasi biner $+_7$ menggunakan *Tabel Cayley*.

Tabel 2.1 Tabel *Cayley* penjumlahan modulo 7

$+_7$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$

Karena untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_7$, $a + b \in \mathbb{Z}_7$, maka himpunan $\mathbb{Z}_7$ tertutup terhadap $+_7$.

2. Operasi $+_7$ bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_7$ berlaku $(a +_7 b) +_7 c = a +_7 (b +_7 c)$.
3. Berdasarkan Tabel 2.1, elemen identitas pada himpunan $\mathbb{Z}_7$ terhadap $+_7$ operasi penjumlahan modulo 7 adalah $\overline{0}$, karena $e = \overline{0} \in \mathbb{Z}_7$ sehingga berlaku $a \cdot e = e \cdot a = a$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_7$.
4. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_7$ terdapat $a^{-1} \in \mathbb{Z}_7$ sehingga $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$. Dalam hal ini $\overline{0}^{-1} = \overline{0}$, $\overline{1}^{-1} = \overline{6}$, $\overline{2}^{-1} = \overline{5}$, $\overline{3}^{-1} = \overline{4}$, $\overline{4}^{-1} = \overline{3}$, $\overline{5}^{-1} = \overline{2}$, dan $\overline{6}^{-1} = \overline{1}$.

Berdasarkan $1, 2, 3$, dan 4 terbukti $\langle \mathbb{Z}_7, +_7 \rangle$ merupakan grup.

Setelah membahas definisi dan contoh grup, selanjutnya diberikan definisi grup komutatif.

Definisi 2.2.5 Grup $\langle G, * \rangle$ dikatakan grup Abel atau grup komutatif jika $a * b = b * a$ untuk setiap $a, b \in G$ (Dummit & Foote, 2004).

Berikut adalah contoh grup komutatif.

Contoh 2.2.6 Himpunan $M_{n \times n}(\mathbb{Z})$ yaitu himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ dengan entri-entrinya elemen bilangan bulat adalah grup komutatif terhadap operasi penjumlahan matriks.

Setelah membahas definisi dan contoh grup komutatif, selanjutnya diberikan definisi dan contoh subgrup.

Definisi 2.2.7 Diberikan grup $\langle G, * \rangle$ dan H adalah himpunan bagian tak kosong dari G, maka H disebut subgrup dari G jika H merupakan grup terhadap operasi biner yang sama dengan G (Andari, 2015).

Contoh 2.2.8 Diberikan grup $\langle \mathbb{Z}_{12}, +_{12} \rangle$ dan $J = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\} \subseteq \mathbb{Z}_{12}$. Dapat ditunjukkan $\langle J, +_{12} \rangle$ merupakan grup. Oleh karena itu, J merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}_{12}$.

Proposisi 2.2.9 Himpunan bagian H dari grup G adalah subgrup jika dan hanya jika

1. $H \neq \emptyset$
2. untuk setiap $a, b \in H, xy^{-1} \in H$ (Dummit & Foote, 2004).

Setelah membahas definisi dan contoh subgrup, selanjutnya diberikan definisi dan contoh koset.

Definisi 2.2.10 Diberikan grup G dan subgrup H. Untuk setiap $a \in G$, didefinisikan:

1. himpunan $aH = \{ah|h \in H\}$ disebut koset kiri dari H di G yang memuat a;
2. himpunan $Ha = \{ha|h \in H\}$ disebut koset kanan dari H di G yang memuat a (Adkins & Weintraub, 1992).

Contoh 2.2.11 Diberikan grup $\mathbb{Z}_{12}$ terhadap operasi $+_{12}$ penjumlahan modulo 12. Akan ditentukan koset kiri dan koset kanan dari subgrup $\langle\overline{3}\rangle = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$ di $\mathbb{Z}_{12}$.

Koset kiri dari $\langle\overline{3}\rangle$ yang memuat $\overline{0}$ yaitu $\langle\overline{3}\rangle = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$.
Koset kiri dari $\langle\overline{3}\rangle$ yang memuat $\overline{1}$ yaitu $\overline{1} + \langle\overline{3}\rangle = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{7}, \overline{10}\}$.
Koset kiri dari $\langle\overline{3}\rangle$ yang memuat $\overline{2}$ yaitu $\overline{2} + \langle\overline{3}\rangle = \{\overline{2}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{11}\}$.
Koset kiri dari $\langle\overline{3}\rangle$ yang memuat $\overline{3}$ sama dengan koset kiri dari $\langle\overline{3}\rangle$ yang memuat $\overline{0}$. Oleh karena itu, diperoleh koset-koset kiri dari $\langle\overline{3}\rangle$ yaitu $\langle\overline{3}\rangle, \overline{1} + \langle\overline{3}\rangle$, dan $\overline{2} + \langle\overline{3}\rangle$.

Di lain pihak, koset kanan dari subgrup $\langle\overline{3}\rangle$ antara lain:
Koset kanan dari $\langle\overline{3}\rangle$ yang memuat $\overline{0}$ yaitu $\langle\overline{3}\rangle = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$.
Koset kanan dari $\langle\overline{3}\rangle$ yang memuat $\overline{1}$ yaitu $\langle\overline{3}\rangle + \overline{1} = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{7}, \overline{10}\}$.
Koset kanan dari $\langle\overline{3}\rangle$ yang memuat $\overline{2}$ yaitu $\langle\overline{3}\rangle + \overline{2} = \{\overline{2}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{11}\}$.
Koset kanan dari $\langle\overline{3}\rangle$ yang memuat $\overline{3}$ sama dengan koset kanan dari $\langle\overline{3}\rangle$ yang memuat $\overline{0}$. Oleh karena itu, diperoleh koset-koset kanan dari $\langle\overline{3}\rangle$ yaitu $\langle\overline{3}\rangle$, $\langle\overline{3}\rangle + \overline{1}$, dan $\langle\overline{3}\rangle + \overline{2}$.

Selanjutnya diberikan definisi dan contoh homomorfisma grup.

Definisi 2.2.12 Diberikan grup $\langle G_1, *_1 \rangle$ dan $\langle G_2, *_2 \rangle$ serta fungsi $f : G_1 \to G_2$. Fungsi f disebut homomorfisma grup jika $f(a *_1 b) = f(a) *_2 f(b)$, untuk setiap $a, b \in G_1$ (Andari, 2015).

Contoh 2.2.13 Diberikan grup $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ dan $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$. Didefinisikan fungsi $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(a) = 4a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan fungsi f merupakan homomorfisma grup.

Akan diselidiki f merupakan homomorfisma grup. Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$, diperoleh:

$$\begin{aligned} f(a+b) &= 4(a+b) \\ &= 4a + 4b \\ &= f(a) + f(b). \end{aligned}$$

Karena $f(a+b) = f(a) + f(b)$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ sehingga f merupakan homomorfisma grup.

Setelah memahami homomorfisma grup, selanjutnya akan dibahas mengenai subgrup normal dan grup faktor beserta dengan contoh-contohnya.

Definisi 2.2.14 Diberikan G merupakan grup dan N adalah subgrup dari G. Himpunan N disebut subgrup normal dari G jika $aN = Na$, untuk setiap $a \in G$ (Andari, 2015).

Contoh 2.2.15 Berdasarkan Contoh 2.2.11, subgrup $\langle \overline{3} \rangle = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$ merupakan subgrup normal dari $\mathbb{Z}_{12}$ karena koset kiri dari $\langle \overline{3} \rangle$ di $\mathbb{Z}_{12}$ sama dengan koset kanan dari $\langle \overline{3} \rangle$ di $\mathbb{Z}_{12}$.

Definisi 2.2.16 Diberikan grup G dan subgrup normal N, akan dibentuk grup G/N dengan operasi biner $(aN)(bN) = (ab)N$, untuk setiap $aN, bN \in G/N$. Grup G/N disebut grup kuosien atau grup faktor dari G modulo N (Andari, 2015).

Contoh 2.2.17 Diberikan grup $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan bilangan biasa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ dan $7\mathbb{Z}$ merupakan subgrup normal dari $\mathbb{Z}$, kemudian dibentuk himpunan koset-koset dari $7\mathbb{Z}$ yaitu $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{7\mathbb{Z}, 1 + 7\mathbb{Z}, 2 + 7\mathbb{Z}, 3 + 7\mathbb{Z}, 4 + 7\mathbb{Z}, 5 + 7\mathbb{Z}, 6 + 7\mathbb{Z}\}$. Akan ditunjukkan $\langle \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup.

1. Operasi $+$ bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $a + 7\mathbb{Z}, b + 7\mathbb{Z}, c + 7\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ berlaku:
   $(a + 7\mathbb{Z}) + ((b + 7\mathbb{Z}) + (c + 7\mathbb{Z})) = ((a + 7\mathbb{Z}) + (b + 7\mathbb{Z})) + (c + 7\mathbb{Z})$.

2. Terdapat elemen identitas $0+7\mathbb{Z} = 7\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ sehingga $(a+7\mathbb{Z})+(0+7\mathbb{Z}) = (0 + 7\mathbb{Z}) + (a + 7\mathbb{Z}) = (a + 7\mathbb{Z})$ untuk setiap $a + 7\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

3. Untuk setiap $a + 7\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ terdapat $(a + 7\mathbb{Z})^{-1} \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ sehingga $(a + 7\mathbb{Z}) + (a + 7\mathbb{Z})^{-1} = (a + 7\mathbb{Z})^{-1} + (a + 7\mathbb{Z}) = 0 + 7\mathbb{Z}$. Dalam hal ini

$$\begin{aligned}
(0 + 7\mathbb{Z})^{-1} &= 0 + 7\mathbb{Z};\\
(1 + 7\mathbb{Z})^{-1} &= 6 + 7\mathbb{Z};\\
(2 + 7\mathbb{Z})^{-1} &= 5 + 7\mathbb{Z};\\
(3 + 7\mathbb{Z})^{-1} &= 4 + 7\mathbb{Z};\\
(4 + 7\mathbb{Z})^{-1} &= 3 + 7\mathbb{Z};\\
(5 + 7\mathbb{Z})^{-1} &= 2 + 7\mathbb{Z};\\
(6 + 7\mathbb{Z})^{-1} &= 1 + 7\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Dari 1, 2, dan 3 terbukti bahwa $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ merupakan grup faktor (grup kuosien).

2.3 Ring

Setelah membahas mengenai definisi dan contoh-contoh grup, selanjutnya diberikan definisi ring.

Definisi 2.3.1 Ring $\langle R, +, \cdot \rangle$ adalah himpunan R dengan dua operasi biner $+ : R \times R \to R$ dan $\cdot : R \times R \to R$ yang memenuhi aksioma berikut.

1. $\langle R, + \rangle$ adalah grup komutatif dengan elemen identitas 0.

2. Operasi $\cdot$ bersifat asosiatif, untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

3. Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku hukum distributif kiri dan distributif kanan, yaitu

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

dan

$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

(Adkins & Weintraub, 1992).

Setelah memahami definisi ring, selanjutnya akan diberikan contoh dari ring.

Contoh 2.3.2 Diberikan $M_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$, dengan operasi penjumlahan dan perkalian matriks. Akan ditunjukkan bahwa $\langle M_2(\mathbb{Z}), +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

1. Akan dibuktikan $\langle M_2(\mathbb{Z}), +, \cdot \rangle$ merupakan grup Abel.

   (a) Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$.

   $$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}).$$

   Oleh karena itu, operasi $+$ bersifat tertutup di $M_2(\mathbb{Z})$.

   (b) Diberikan sebarang $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z})$. Telah diketahui bahwa operasi penjumlahan pada matriks bersifat asosiatif, yaitu

   $$(A + B) + C = A + (B + C).$$

   Oleh karena itu, operasi $+$ bersifat asosiatif di $M_2(\mathbb{Z})$.

(c) Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$.

Karena $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$,

elemen identitas di $M_2(\mathbb{Z})$ terhadap operasi $+$ adalah $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(d) Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$. Karena

$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_1 & -b_1 \\ -c_1 & -d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -b_1 \\ -c_1 & -d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

invers dari $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ terhadap operasi $+$ di $M_2(\mathbb{Z})$ adalah $\begin{bmatrix} -a_1 & -b_1 \\ -c_1 & -d_1 \end{bmatrix}$.

(e) Diberikan sebarang $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$.

Telah diketahui bahwa operasi penjumlahan pada matriks bersifat komutatif, yaitu

$$A + B = B + A.$$

Oleh karena itu, operasi $+$ bersifat komutatif di $M_2(\mathbb{Z})$.

Dari a, b, c, d, dan e terbukti bahwa $\langle M_2(\mathbb{Z}), +\rangle$ merupakan grup Abel.

2. Untuk setiap $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z})$ berlaku

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$

3. Untuk setiap $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z})$ berlaku

$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$

dan

$$(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C).$$

Berdasarkan 1, 2, dan 3 terbukti bahwa $\langle M_2(\mathbb{Z}), +, \cdot\rangle$ merupakan ring.

Setelah memahami ring, selanjutnya akan dibahas mengenai subring beserta dengan contohnya.

Definisi 2.3.3 Diberikan ring $\langle R, +, \cdot \rangle$ dan $R' \subseteq R$, dengan $R' \neq \emptyset$. Himpunan R' dikatakan subring R jika dan hanya jika R' merupakan ring terhadap operasi biner yang sama dengan R (Adkins & Weintraub, 1992).

Teorema 2.3.4 Diberikan ring $\langle R, +, \cdot \rangle$, $R' \subseteq R$, $R' \neq \emptyset$. Himpunan R' subring R jika dan hanya jika $a - b \in R'$ dan $a \cdot b \in R'$ untuk setiap $a, b \in R'$ (Andari, 2017).

Contoh 2.3.5 Diberikan ring $M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks dan $T = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$. Akan ditunjukkan T subring $M_2(\mathbb{R})$.

Karena $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \in T, T \neq \emptyset$. Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & -a_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & -a_2 \end{bmatrix} \in T$, diperoleh:
$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & -a_1 \end{bmatrix}$ - $\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & -a_2 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ b_1 - b_2 & -a_1 + a_2 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ b_1 - b_2 & -(a_1 - a_2) \end{bmatrix} \in T$. Misalkan $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \in T$, diperoleh:
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \notin T$. Jadi, T bukan subring $M_2(\mathbb{R})$.

Sebelum membahas mengenai definisi ideal, diberikan terlebih dahulu definisi ideal kiri dan ideal kanan sebagai berikut.

Definisi 2.3.6 Diberikan ring R. Himpunan $I \subseteq R$, dengan $I \neq \emptyset$ disebut ideal kiri R jika memenuhi aksioma berikut:

1. $i - j \in I$, untuk setiap $i, j \in I$;

2. $ri \in I$, untuk setiap $i \in I$ dan $r \in R$ (Wahyuni dkk., 2016).

Definisi 2.3.7 Diberikan ring R. Himpunan $I \subseteq R$, dengan $I \neq \emptyset$ disebut ideal kanan R jika memenuhi aksioma berikut:

1. $i - j \in I$, untuk setiap $i, j \in I$;
2. $ir \in I$, untuk setiap $i \in I$ dan $r \in R$ (Wahyuni dkk., 2016).

Definisi 2.3.8 Diberikan ring R. Himpunan $I \subseteq R$, dengan $I \neq \emptyset$ disebut ideal R jika memenuhi aksioma berikut:

1. $i - j \in I$, untuk setiap $i, j \in I$;
2. $ri \in I$ dan $ir \in I$, untuk setiap $i \in I$ dan $r \in R$ (Wahyuni dkk., 2016).

Setelah memahami definisi ideal, selanjutnya diberikan contoh ideal.

Contoh 2.3.9 Diberikan ring $T_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} | a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$, dan $I = \left\{ \begin{bmatrix} p & q \\ 0 & 0 \end{bmatrix} | p, q \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq T_2(\mathbb{Z})$. Karena $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I, I \neq \emptyset$.

Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$, $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in T_2(\mathbb{Z})$ diperoleh:

1. $\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ - $\begin{bmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} p - r & q - s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$;
2. $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ap & aq \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$;
3. $\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} pa & pb + qc \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$.

Dari 1, 2, dan 3 diperoleh bahwa I merupakan ideal $T_2(\mathbb{Z})$.

Setelah membahas mengenai ideal, akan dibahas mengenai ring faktor. Berikut diberikan definisinya.

Definisi 2.3.10 Diberikan ring R dengan operasi $+$ dan $\cdot$ serta I ideal R. Dapat dibentuk grup faktor ${}^{R}\!/_{I}$ yang merupakan grup komutatif dengan ${}^{R}\!/_{I} = \{\overline{r} = r + I | r \in R\}$. Didefinisikan: $(r + I) + (s + I) = ((r + s) + I)$ atau $\overline{r} + \overline{s} = \overline{r + s}$, $(r + I)(s + I) = rs + I$ atau $\overline{r} \cdot \overline{s} = \overline{r \cdot s}$, untuk setiap $\overline{r}, \overline{s} \in {}^{R}\!/_{I}$. Oleh karena itu, himpunan $\langle {}^{R}\!/_{I}, +, \cdot \rangle$ merupakan ring yang disebut dengan ring faktor (Wahyuni dkk., 2016).

Berikut diberikan contoh ring faktor.

Contoh 2.3.11 Diberikan ring $\mathbb{Z}_{12} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$ terhadap operasi $+_{12}$ dan $\cdot_{12}$ dan $I = \langle \overline{3} \rangle = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$ ideal dari $\mathbb{Z}_{12}$. Dapat dibentuk ring faktor ${}^{\mathbb{Z}_{12}}\!/_{I} = \{I, \overline{1} + I, \overline{2} + I\}$.

2.4 Modul atas Ring

Modul atas ring merupakan generalisasi dari ruang vektor atas suatu lapangan (*field*). Berikut diberikan definisi dari modul kiri dan modul kanan atas ring R.

Definisi 2.4.1 Diberikan ring dengan elemen satuan $\langle R, +, \cdot \rangle$ dan grup komutatif $\langle M, + \rangle$. Didefinisikan operasi pergandaan skalar $\cdot : R \times M \to M$ dengan $\cdot(r, m)$ dinotasikan dengan rm. Modul kiri atas R adalah himpunan M bersama dengan operasi $+$ pada M dan operasi pergandaan skalar yang memenuhi empat aksioma berikut.

1. $(r + t)m = rm + tm$;
2. $(rt)m = r(tm)$;
3. $r(m + o) = rm + ro$;
4. $1m = m$;

untuk setiap $r, t \in R$ dan $m, o \in M$ (Adkins & Weintraub, 1992).

Definisi 2.4.2 Diberikan ring dengan elemen satuan $\langle R, +, \cdot \rangle$ dan grup komutatif $\langle M, + \rangle$. Didefinisikan operasi pergandaan skalar $\cdot : M \times R \to M$ dengan $\cdot(m, r)$

dinotasikan dengan mr. Modul kanan atas R adalah himpunan M bersama dengan operasi $+$ pada M dan operasi pergandaan skalar yang memenuhi empat aksioma berikut.

1. $m(r+t) = mr + mt$;
2. $m(rt) = (mr)t$;
3. $(m+o)r = mr + or$;
4. $m1 = m$;

untuk setiap $r, t \in R$ dan $m, o \in M$ (Adkins & Weintraub, 1992).

Berikut merupakan contoh modul atas ring.

Contoh 2.4.3 Diberikan sebarang ring R dan grup komutatif R^n terhadap operasi pergandaan skalar:

$$(r_1, r_2, \ldots, r_n)t = (r_1t, r_2t, \ldots, r_nt),$$

untuk setiap $t \in R$ dan $(r_1, r_2, \ldots, r_n) \in R^n$. Akan ditunjukkan bahwa grup Abel R^n merupakan modul kanan atas R.

Untuk setiap $t, u \in R$ dan $(r_1, r_2, \ldots, r_n), (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in R^n$, berlaku:

$$\begin{aligned}
((r_1, r_2, \ldots, r_n) + (s_1, s_2, \ldots, s_n))t &= (r_1 + s_1, r_2 + s_2, \ldots, r_n + s_n)t \\
&= (r_1t + s_1t, r_2t + s_2t, \ldots, r_nt + s_nt) \\
&= (r_1t, r_2t, \ldots, r_nt) + (s_1t, s_2t, \ldots, s_nt) \\
&= (r_1, r_2, \ldots, r_n)t + (s_1, s_2, \ldots, s_n)t;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(r_1, r_2, \ldots, r_n)(tu) &= (r_1(tu), r_2(tu), \ldots, r_n(tu))\\ &= ((r_1t)u, (r_2t)u, \ldots, (r_nt)u)\\ &= (r_1t, r_2t, \ldots, r_nt)u\\ &= ((r_1, r_2, \ldots, r_n)t)u;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(r_1, r_2, \ldots, r_n)(t+u) &= (r_1(t+u), r_2(t+u), \ldots, r_n(t+u))\\ &= (r_1t + r_1u, r_2t + r_2u, \ldots, r_nt + r_nu)\\ &= (r_1t, r_2t, \ldots, r_nt) + (r_1u, r_2u, \ldots, r_nu)\\ &= (r_1, r_2, \ldots, r_n)t + (r_1, r_2, \ldots, r_n)u;\end{aligned}$$

$$(r_1, r_2, \ldots, r_n)1 = (r_11, r_21, \ldots, r_n1) = (r_1, r_2, \ldots, r_n).$$

Oleh karena itu, terbukti bahwa grup Abel R^n merupakan modul kanan atas R.

Seperti halnya pada suatu himpunan terdapat himpunan bagian, pada grup terdapat subgrup, dan subring di dalam ring. Begitu juga dengan modul terdapat submodul, berikut diberikan definisi submodul.

Definisi 2.4.4 Diberikan ring R dan R-modul M. Himpunan tak kosong $N \subseteq M$ adalah submodul dari M jika N merupakan modul atas R terhadap operasi pergandaan skalar yang sama dengan R-modul M (Dummit & Foote, 2004).

Berikut merupakan syarat cukup dan perlu untuk membuktikan himpunan bagian dalam modul merupakan submodul.

Teorema 2.4.5 Diberikan ring R dan R-modul M. Himpunan tak kosong $N \subseteq M$ adalah submodul dari M atas ring R jika dan hanya jika:

1. $n_1 - n_2 \in N$, untuk setiap $n_1, n_2 \in N$;

2. $r \cdot n \in N$, untuk setiap $r \in R$ dan $n \in N$ (Andari, 2015).

Teorema 2.4.6 Diberikan ring R dan R-modul M. Himpunan tak kosong $N \subseteq M$ adalah submodul dari M atas ring R jika dan hanya jika:

$$r_1 n_1 + r_2 n_1 \in N,$$

untuk setiap $n_1, n_2 \in N$ dan $r_1, r_2 \in R$ (Adkins & Weintraub, 1992).

Setelah membahas definisi submodul, berikut merupakan contoh submodul.

Contoh 2.4.7 Diberikan $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}$ dan himpunan tak kosong $7\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan bahwa himpunan $7\mathbb{Z}$ merupakan submodul dari $\mathbb{Z}$.

1. Diambil sebarang $7k_1, 7k_2 \in 7\mathbb{Z}$ dengan $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, diperoleh

$$7k_1 - 7k_2 = 7(k_1 - k_2) \in 7\mathbb{Z}.$$

2. Diambil sebarang $7k_1 \in 7\mathbb{Z}$ dengan $k_1 \in \mathbb{Z}$ dan $r \in \mathbb{Z}$, diperoleh

$$r7k_1 = 7(rk_1) \in 7\mathbb{Z}.$$

Berdasarkan 1 dan 2, terbukti bahwa himpunan $7\mathbb{Z}$ merupakan submodul dari $\mathbb{Z}$.

Setelah memahami definisi dan contoh submodul, selanjutnya akan dibahas mengenai modul faktor. Berikut definisinya.

Definisi 2.4.8 Diberikan modul M atas ring R dan submodul N dari R-modul M. Dapat dibentuk grup faktor $\langle {}^{M}/_{N}, + \rangle$ yang merupakan grup komutatif dengan ${}^{M}/_{N} = \{m + N | m \in M\}$. Didefinisikan perkalian skalar di grup komutatif ${}^{M}/_{N}$ sebagai berikut:

$$r(m + N) = rm + N,$$

untuk setiap $r \in R$, $m + N \in {}^{M}/_{N}$. Karena N adalah submodul dari M, sehingga perkalian skalar di grup komutatif ${}^{M}/_{N}$ *well defined*, ${}^{M}/_{N}$ membentuk modul atas ring R yang disebut dengan modul faktor (Adkins & Weintraub, 1992).

Berikut merupakan contoh modul faktor.

Contoh 2.4.9 Diberikan $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}$ dan submodul $5\mathbb{Z}$ di $\mathbb{Z}$. Dapat dibentuk grup faktor

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{0 + 5\mathbb{Z}, 1 + 5\mathbb{Z}, 2 + 5\mathbb{Z}, 3 + 5\mathbb{Z}, 4 + 5\mathbb{Z}\}.$$

Grup komutatif $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ merupakan modul atas $\mathbb{Z}$ terhadap operasi pergandaan skalar

$$r(a + 5\mathbb{Z}) = (ra) + 5\mathbb{Z},$$

untuk setiap $r \in \mathbb{Z}$ dan $a + 5\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Grup komutatif $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ disebut modul faktor $\mathbb{Z}$ modulo $5\mathbb{Z}$.

Selanjutnya akan dibahas mengenai homomorfisma modul, berikut diberikan definisinya.

Definisi 2.4.10 Diberikan ring R dan modul M, N atas ring R. Fungsi $f : M \to N$ disebut homomorfisma modul atas R jika:

1. $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$ untuk setiap $m_1, m_2 \in M$;
2. $f(am) = af(m)$ untuk setiap $m \in M$ dan $a \in R$ (Adkins & Weintraub, 1992).

Berikut merupakan contoh homomorfisma modul.

Contoh 2.4.11 Diberikan modul $\mathbb{Z}$ atas ring $\mathbb{Z}$. Didefinisikan fungsi $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(a) = 5a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$.

1. Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} f(a+b) &= 5(a+b) \\ &= 5a + 5b \\ &= f(a) + f(b). \end{aligned}$$

2. Diberikan sebarang $p \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} f(pa) &= 5(pa) \\ &= p(5a) \\ &= pf(a). \end{aligned}$$

Jadi, f merupakan homomorfisma modul atas R dari $\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}$.

Setelah membahas definisi dan contoh homomorfisma modul, selanjutnya akan dibahas mengenai homomorfisma natural pada modul. Berikut definisinya.

Definisi 2.4.12 Diberikan modul M atas ring R dan submodul S di M. Dapat dibentuk modul faktor $^{M}/_{S}$ atas ring R. Didefinisikan

$$\begin{aligned} \pi : M &\to {}^{M}/_{S} \\ m &\mapsto m + S. \end{aligned}$$

Akan diselidiki π merupakan homomorfisma modul atas R.
Diberikan sebarang $m, n \in M$ dan $r \in R$,

$$\begin{aligned} \pi(m+n) &= (m+n) + S \\ &= (m+S) + (n+S) \\ &= \pi(m) + \pi(n); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi(rm) &= (rm) + S \\ &= r(m+S) \\ &= r\pi(m). \end{aligned}$$

Oleh karena itu, terbukti bahwa π merupakan homomorfisma modul atas R dari M ke $^{M}/_{S}$.
Selanjutnya, diberikan sebarang $m + S \in {}^{M}/_{S}$, terdapat $m \in M$ sehingga $\pi(m) = m + S$. Akibatnya π bersifat surjektif, sehingga π merupakan epimorfisma. Oleh

karena itu, π disebut homomorfisma natural pada modul atau pemetaan proyeksi kanonik (Dummit & Foote, 2004).

Berikut contoh homomorfisma natural pada modul.

Contoh 2.4.13 Diberikan modul $\mathbb{Z}$ atas ring $\mathbb{Z}$ dan submodul $6\mathbb{Z}$ di $\mathbb{Z}$. Dapat dibentuk modul faktor ${}^{\mathbb{Z}}/_{6\mathbb{Z}}$ atas ring $\mathbb{Z}$. Didefinisikan

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{Z} &\to {}^{\mathbb{Z}}/_{6\mathbb{Z}} \\ a &\mapsto a + 6\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Akan ditunjukkan π merupakan homomorfisma natural pada modul.
Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$ dan $r \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \pi(a+b) &= (a+b) + 6\mathbb{Z} \\ &= (a+6\mathbb{Z}) + (b+6\mathbb{Z}) \\ &= \pi(a) + \pi(b); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi(ra) &= (ra) + 6\mathbb{Z} \\ &= r(a+6\mathbb{Z}) \\ &= r\pi(a). \end{aligned}$$

Oleh karena itu, terbukti π merupakan homomorfisma modul atas $\mathbb{Z}$ ke ${}^{\mathbb{Z}}/_{6\mathbb{Z}}$. Selanjutnya, diberikan sebarang $a + 6\mathbb{Z} \in {}^{\mathbb{Z}}/_{6\mathbb{Z}}$, terdapat $a \in \mathbb{Z}$ sehingga $\pi(a) = a + 6\mathbb{Z}$. Akibatnya, π bersifat surjektif, sehingga π merupakan epimorfisma. Oleh karena itu, terbukti bahwa π merupakan homomorfisma natural pada modul.

2.5 Relasi

Relasi adalah konsep dasar matematika yang menghubungkan suatu anggota himpunan dengan anggota himpunan lainnya. Berikut diberikan definisi relasi.

Definisi 2.5.1 Diberikan himpunan A dan B. Relasi biner atau relasi R dari himpunan A ke B adalah himpunan bagian dari $A \times B$. Jika $(x, y) \in R$, maka dapat ditulis xRy (Susilowati, 2016).

Berikut merupakan contoh relasi.

Contoh 2.5.2 Diberikan himpunan $A = \{3, 4, 5, 9, 11\}$ dan himpunan $B = \{12, 14, 15, 18, 20, 22\}$. Relasi R dari himpunan A ke B didefinisikan sebagai berikut:
$R = \{(a, b) \in A \times B | a$ habis membagi $b, a \in A$ dan $b \in B\}$. Diperoleh $R = \{(3, 12), (3, 15), (3, 18), (4, 12), (4, 20), (5, 15), (5, 20), (9, 18), (11, 22)\}$.

Terdapat sifat khusus pada relasi suatu himpunan sehingga memotivasi munculnya beberapa macam relasi, salah satunya yaitu relasi ekuivalensi. Berikut definisi dan contoh dari relasi ekuivalensi.

Definisi 2.5.3 Relasi R pada himpunan B disebut relasi ekuivalensi jika R memiliki sifat refleksif, simetris, dan transitif.

1. Relasi R disebut refleksif pada himpunan B jika dan hanya jika bRb untuk setiap $b \in B$.

2. Relasi R disebut simetris pada himpunan B jika dan hanya jika bRc, maka cRb untuk setiap $b, c \in B$.

3. Relasi R disebut transitif pada himpunan B jika dan hanya jika bRc dan cRd, maka bRd untuk setiap $b, c, d \in B$ (Susilowati, 2016).

Contoh 2.5.4 Diberikan himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dengan didefinisikan relasi R yaitu bRc dengan $b, c \in \mathbb{R}$ jika dan hanya jika $b^3 + b^2 + b = c^3 + c^2 + c$. Akan ditunjukkan bahwa R merupakan relasi ekuivalensi pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$.

1. Untuk $b \in \mathbb{R}$ berlaku bRb karena $b^3 + b^2 + b = b^3 + b^2 + b$. Oleh karena itu, relasi R bersifat refleksif.

2. Diambil sebarang $b, c \in \mathbb{R}$. Diketahui bRc, sehingga $b^3 + b^2 + b = c^3 + c^2 + c$ atau dapat dipandang sebagai $c^3 + c^2 + c = b^3 + b^2 + b$ dan diperoleh cRb. Oleh karena itu, relasi R bersifat simetris.

3. Diambil sebarang $b, c, d \in \mathbb{R}$. Diketahui bRc, yang berarti $b^3 + b^2 + b = c^3 + c^2 + c$ dan cRd, yang berarti $c^3 + c^2 + c = d^3 + d^2 + d$. Karena $b^3 + b^2 + b = c^3 + c^2 + c$ dan $c^3 + c^2 + c = d^3 + d^2 + d$, diperoleh $b^3 + b^2 + b = d^3 + d^2 + d$ atau bRd. Oleh karena itu, relasi R bersifat transitif.

Karena relasi R bersifat refleksif, simetris, dan transitif, dapat disimpulkan bahwa relasi R merupakan relasi ekuivalensi pada himpunan $\mathbb{R}$.

Contoh 2.5.5 Diberikan himpunan $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Pada himpunan B didefinisikan relasi R yaitu bRc jika dan hanya jika $b - c = 4k$, dengan $b, c \in B$ dan $k \in \mathbb{Z}$. Dengan kata lain, $b - c$ dapat dibagi oleh 4. Berikut akan dibuktikan bahwa R merupakan relasi ekuivalensi pada B.

1. Diberikan sebarang $b \in B$. Karena $b - b = 0 = 4.0$ dan $0 \in \mathbb{Z}$, diperoleh bRb, untuk setiap $b \in B$. Oleh karena itu, relasi R bersifat refleksif.

2. Diberikan sebarang $b, c \in B$, dengan bRc. Artinya $b - c = 4k$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$. Hal ini berakibat $c - b = -4k = 4(-k)$ dengan $-k \in \mathbb{Z}$, diperoleh cRb. Oleh karena itu, relasi R bersifat simetris.

3. Diberikan sebarang $b, c, d \in B$, dengan bRc dan cRd. Artinya $b - c = 4k$ dan $c - d = 4l$ dengan $k, l \in \mathbb{Z}$. Diperoleh $b - d = (b - c) + (c - d) = 4k + 4l = 4(k + l)$, dengan $k + l \in \mathbb{Z}$. Jadi, bRd sehingga relasi R bersifat transitif.

Dari 1, 2, dan 3 diperoleh relasi R adalah relasi ekuivalensi pada himpunan B.

Setelah membahas definisi dan contoh relasi ekuivalensi, selanjutnya akan diberikan definisi kelas ekuivalensi sebagai berikut.

Definisi 2.5.6 Diberikan relasi R merupakan relasi ekuivalensi pada himpunan B dan $b \in B$. Kelas ekuivalensi dari b pada R adalah $[b]_R = \{x : x \in B$ dan

$bRx\}$. Dengan kata lain, kelas ekuivalensi b pada R memuat semua anggota pada himpunan B yang memiliki relasi dengan b (Aisah, 2018).

Berikut merupakan contoh kelas ekuivalensi.

Contoh 2.5.7 Berdasarkan Contoh 2.5.5, kelas ekuivalensi pada B yaitu $[1]_R = \{1, 5, 9\}, [2]_R = \{2, 6, 10\}, [3]_R = \{3, 7\}$, dan $[4]_R = \{4, 8\}$.

2.6 Ruang Aproksimasi (*Approximation Space*)

Setelah membahas mengenai relasi, relasi ekuivalensi, dan kelas ekuivalensi, selanjutnya diberikan definisi dan contoh ruang aproksimasi, aproksimasi atas, dan aproksimasi bawah.

Definisi 2.6.1 Misalkan U adalah himpunan semesta dengan $U \neq \emptyset$ dan γ merupakan relasi ekuivalensi pada U. Pasangan (U, γ) disebut ruang aproksimasi (Miao dkk., 2005).

Contoh 2.6.2 Berdasarkan Contoh 2.5.4, pasangan $(\mathbb{R}, R)$ merupakan ruang aproksimasi dengan $\mathbb{R} \neq \emptyset$ dan R adalah relasi ekuivalensi pada $\mathbb{R}$.

Selanjutnya, setelah memahami ruang aproksimasi, akan dibahas mengenai aproksimasi atas dan aproksimasi bawah. Berikut diberikan definisi aproksimasi atas dan aproksimasi bawah.

Definisi 2.6.3 Diberikan ruang aproksimasi (U, γ) dan $X \subseteq U$. Himpunan $\underline{Apr}(X) = \{x \in U | [x]_\gamma \subseteq X\}$ disebut aproksimasi bawah dari X dan himpunan $\overline{Apr}(X) = \{x \in U | [x]_\gamma \cap X \neq \emptyset\}$ disebut aproksimasi atas dari X di (U, γ). Notasi dari $\underline{Apr}(X)$ dan $\overline{Apr}(X)$ dapat juga ditulis dengan $\underline{X}$ dan $\overline{X}$. Jelas bahwa $\underline{X} \subseteq X \subseteq \overline{X}$ (Mahmood, 2016).

Agar lebih memahami Definisi 2.6.3, berikut diberikan contoh aproksimasi atas dan aproksimasi bawah.

Contoh 2.6.4 Diberikan ruang aproksimasi (U, γ) dengan $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ dan γ merupakan relasi ekuivalensi di U dengan kelas ekuivalensi sebagai berikut.

$E_1 = \{x_1, x_7, x_8\}$;

$E_2 = \{x_2, x_6\}$;

$E_3 = \{x_3, x_5\}$;

$E_4 = \{x_4\}$.

Dipilih $X = \{x_2, x_3, x_6, x_8\}$, diperoleh aproksimasi bawah dari X yaitu $\underline{Apr}(X) = E_2 = \{x_2, x_6\}$ dan aproksimasi atas dari X yaitu $\overline{Apr}(X) = E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7, x_8\}$.

2.7 Himpunan *Rough*

Himpunan *rough* pertama kali dikenalkan oleh Pawlak pada awal tahun 1980-an. Konsep pada himpunan *rough* erat kaitannya dengan relasi ekuivalensi yang nantinya akan membentuk kelas-kelas ekuivalensi, dengan kelas-kelas ekuivalensi tersebut akan membentuk konstruksi dari aproksimasi atas dan aproksimasi bawah. Berikut diberikan definisi himpunan *rough*.

Definisi 2.7.1 Diberikan ruang aproksimasi (U, γ) dengan γ adalah relasi ekuivalensi pada U dan X merupakan himpunan bagian dari U. X dikatakan himpunan *rough* di ruang aproksimasi (U, γ) jika dan hanya jika $\overline{Apr}(X) - \underline{Apr}(X) \neq \emptyset$ (Pawlak, 1982).

Berikut merupakan contoh himpunan *rough*.

Contoh 2.7.2 Berdasarkan Contoh 2.6.4, diperoleh aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari X yaitu $\underline{Apr}(X) = E_2 = \{x_2, x_6\}$ dan $\overline{Apr}(X) = E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7, x_8\}$. Oleh karena itu, dapat dibentuk pasangan berurutan Apr $(X) = (\{x_2, x_6\}, \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7, x_8\})$ yang merupakan himpunan *rough* di ruang aproksimasi (U, γ).

2.8 Grup *Rough*

Setelah memahami definisi dan contoh himpunan *rough*, selanjutnya akan membahas mengenai grup *rough*, grup *rough* komutatif, dan subgrup *rough*. Berikut definisi grup *rough*.

Definisi 2.8.1 Diberikan ruang aproksimasi (U, γ) dan didefinisikan operasi biner $*$ di himpunan semesta U. Himpunan $G \subseteq U$ disebut grup *rough* jika memenuhi keempat aksioma berikut.

1. Untuk setiap $a, b \in G$, berlaku $a * b \in \overline{Apr}(G)$.
2. Untuk setiap $a, b, c \in G$, berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$ terpenuhi di $\overline{Apr}(G)$.
3. Terdapat $e \in \overline{Apr}(G)$ sehingga untuk setiap $a \in G$, berlaku $a * e = e * a = a$ (e disebut elemen identitas *rough* dari grup *rough* G).
4. Untuk setiap $a \in G$, terdapat $b \in G$ sehingga berlaku $a * b = b * a = e$ (b disebut elemen invers *rough* dari a di G) (Miao dkk., 2005).

Adapun definisi grup *rough* komutatif sebagai berikut.

Definisi 2.8.2 Grup *rough* G disebut grup *rough* komutatif jika untuk setiap $a, b \in G$, berlaku $a * b = b * a$ (Miao dkk., 2005).

Selanjutnya, akan diberikan definisi subgrup *rough* sebagai berikut.

Definisi 2.8.3 Diberikan grup *rough* G dengan operasi biner $*$ dan himpunan tak kosong H, dengan $H \subseteq G$. H disebut subgrup *rough* dari G jika H juga merupakan grup *rough* terhadap operasi biner $*$ yang sama dengan G (Kumar dkk., 2020).

Setelah memahami definisi subgrup *rough*, selanjutnya akan diberikan definisi homomorfisma grup *rough* sebagai berikut.

Definisi 2.8.4 Diberikan dua ruang aproksimasi $(U_1, \gamma_1), (U_2, \gamma_2)$ dan operasi biner $*, \overline{*}$ di himpunan semesta U_1 dan U_2, serta $G_1 \subset U_1, G_2 \subset U_2$ dengan G_1 dan G_2 merupakan grup *rough*. Pemetaan $\beta : \overline{Apr}(G_1) \to \overline{Apr}(G_2)$ disebut homomorfisma grup *rough* dari $\overline{Apr}(G_1)$ ke $\overline{Apr}(G_2)$ jika untuk setiap $a, b \in \overline{Apr}(G_1)$, berlaku $\beta(a * b) = \beta(a)\overline{*}\beta(b)$ (Miao dkk., 2005).

2.9 Ring *Rough*

Setelah membahas grup *rough*, selajutnya akan dibahas mengenai ring *rough*. Berikut-definisinya.

Definisi 2.9.1 Sistem aljabar $\langle R, +, * \rangle$ disebut ring *rough* jika memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut.

1. $\langle R, + \rangle$ merupakan grup *rough* komutatif terhadap operasi $+$.
2. $\langle R, * \rangle$ merupakan semigrup *rough* terhadap operasi $*$ atau R bersifat asosiatif.
3. Untuk setiap $a, b, c \in R$, berlaku hukum distributif kanan $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$ dan hukum distributif kiri $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$ di $\overline{Apr}(R)$ (Zhang dkk., 2006).

Selanjutnya, akan dibahas mengenai subring *rough*, berikut definisinya.

Definisi 2.9.2 Diberikan ring *rough* R dengan operasi $+$ dan $*$ serta himpunan tak kosong T dengan $T \subseteq R$. Himpunan T disebut subring *rough* dari R jika T juga merupakan ring *rough* terhadap operasi yang sama dengan R (Agusfrianto dkk., 2022).

Berikut merupakan syarat cukup dan perlu untuk membuktikan himpunan bagian dalam ring *rough* merupakan subring *rough*.

Teorema 2.9.3 Diberikan ring *rough* $\langle R, +, * \rangle$ dan himpunan tak kosong T dengan $T \subseteq R$. Himpunan T disebut subring *rough* R jika dan hanya jika untuk setiap $t_1, t_2 \in T$ berlaku:

1. $t_1 - t_2 \in \overline{Apr}(T)$;
2. $t_1 * t_2 \in \overline{Apr}(T)$ (Agusfrianto dkk., 2022).

Selanjutnya akan dibahas mengenai ideal *rough*, sebelum itu diberikan definisi dari ideal *rough* kiri dan ideal *rough* kanan. Berikut definisinya.

Definisi 2.9.4 Diberikan ring *rough* R. Himpunan $I \subseteq R$, dengan $I \neq \emptyset$ disebut ideal *rough* kiri R jika memenuhi aksioma berikut:

1. $a - b \in \overline{Apr}(I)$, untuk setiap $a, b \in I$;
2. $ra \in \overline{Apr}(I)$, untuk setiap $a \in I$ dan $r \in R$ (Agusfrianto dkk., 2022).

Definisi 2.9.5 Diberikan ring *rough* R. Himpunan $I \subseteq R$, dengan $I \neq \emptyset$ disebut ideal *rough* kanan R jika memenuhi aksioma berikut:

1. $a - b \in \overline{Apr}(I)$, untuk setiap $a, b \in I$;
2. $ar \in \overline{Apr}(I)$, untuk setiap $a \in I$ dan $r \in R$ (Agusfrianto dkk., 2022).

Definisi 2.9.6 Diberikan ring *rough* R. Himpunan $I \subseteq R$, dengan $I \neq \emptyset$ disebut ideal *rough* R jika memenuhi aksioma berikut:

1. $a - b \in \overline{Apr}(I)$, untuk setiap $a, b \in I$;
2. $ra \in \overline{Apr}(I)$ dan $ar \in \overline{Apr}(I)$, untuk setiap $a \in I$ dan $r \in R$ (Agusfrianto dkk., 2022).

2.10 Modul *Rough*

Untuk membentuk modul *rough* diperlukan grup *rough* dan ring *rough*. Setelah memahami definisi dari grup *rough* dan ring *rough*, berikut merupakan definisi dari modul *rough*.

Definisi 2.10.1 Diberikan ring *rough* $\langle R, +, * \rangle$ dengan elemen satuan dan grup *rough* komutatif $\langle M, +' \rangle$. Himpunan M disebut modul *rough* kiri atas ring *rough* R jika terdapat pemetaan $\cdot : \overline{Apr}(R) \times \overline{Apr}(M) \rightarrow \overline{Apr}(M), (a, x) \mapsto ax$, sehingga untuk setiap $a, b \in R, x, y \in M$ berlaku:

1. $a(x +' y) = ax +' ay$;
2. $(a + b)x = ax +' bx$;
3. $(a * b)x = a(bx)$;
4. $1x = x$, dengan 1 adalah elemen satuan dari R (Zhang dkk., 2006).

Definisi 2.10.2 Diberikan ring *rough* $\langle R, +, *\rangle$ dengan elemen satuan dan grup *rough* komutatif $\langle M, +'\rangle$. Himpunan M disebut modul *rough* kanan atas ring *rough* R jika terdapat pemetaan $\cdot : \overline{Apr}(M) \times \overline{Apr}(R) \to \overline{Apr}(M), (x, a) \mapsto xa$, sehingga untuk setiap $a, b \in R, x, y \in M$ berlaku:

1. $(x +' y)a = xa +' ya$;
2. $x(a + b) = xa +' xb$;
3. $x(a * b) = (xa)b$;
4. $x1 = x$, dengan 1 adalah elemen satuan dari R (Zhang dkk., 2006).

Setelah memahami definisi dari modul *rough*, berikut merupakan definisi submodul *rough*.

Definisi 2.10.3 Diberikan modul *rough* M dan himpunan tak kosong N, dengan $N \subseteq M$. Himpunan N disebut submodul *rough* dari M jika N memenuhi aksioma berikut.

1. N merupakan subgrup *rough* dari M.
2. $ay \in \overline{Apr}(N)$, untuk setiap $a, \in R, y \in N$ (Zhang dkk., 2006).

Selanjutnya, akan dibahas mengenai homomorfisma modul *rough*. Berikut definisinya.

Definisi 2.10.4 Diberikan modul *rough* M_1 dan M_2 atas ring *rough* R. Terdapat pemetaan $\alpha : \overline{Apr}(M_1) \to \overline{Apr}(M_2)$ sehingga

1. α merupakan homomorfisma grup *rough* dari $\overline{Apr}(M_1)$ ke $\overline{Apr}(M_2)$;

2. $\alpha(ra) = r\alpha(a), r \in \overline{Apr}(R), a \in \overline{Apr}(M_1)$.

α disebut homomorfisma modul *rough* dari $\overline{Apr}(M_1)$ ke $\overline{Apr}(M_2)$ (Zhang dkk., 2006).

2.11 Modul Faktor *Rough* atas Ring *Rough*

Sebelum membahas modul faktor *rough* atas ring *rough*, akan dibahas terlebih dahulu mengenai koset *rough*, subgrup normal *rough*, dan grup faktor *rough*. Berikut diberikan definisi koset *rough*.

Definisi 2.11.1 Diberikan ruang aproksimasi (U, γ), grup *rough* $G \subseteq U$ dan subgrup *rough* H dari G. Himpunan

$$\overline{Apr}(H) * a = \{h * a | h \in \overline{Apr}(H), a \in G, h * a \in \overline{Apr}(G)\} \cup \{a\},$$

disebut koset *rough* kanan dari H yang memuat elemen a (Miao dkk., 2005).

Definisi 2.11.2 Diberikan ruang aproksimasi (U, γ), grup *rough* $G \subseteq U$ dan subgrup *rough* H dari G. Himpunan

$$a * \overline{Apr}(H) = \{a * h | h \in \overline{Apr}(H), a \in G, a * h \in \overline{Apr}(G)\} \cup \{a\},$$

disebut koset *rough* kiri dari H yang memuat elemen a (Miao dkk., 2005).

Setelah memahami definisi koset *rough*, selanjutnya diberikan definisi subgrup normal *rough*.

Definisi 2.11.3 Diberikan grup *rough* G dan subgrup *rough* N. N disebut sugrup normal *rough* dari G jika $a * \overline{Apr}(N) = \overline{Apr}(N) * a$, untuk setiap $a \in G$ yang dinotasikan dengan $N \lhd G$ (Alharbi dkk., 2019).

Berikut diberikan definisi grup faktor *rough*.

Definisi 2.11.4 Diberikan grup *rough* G, subgrup normal *rough* N, dan ${}^{G}/_{N} = \{g\overline{Apr}(N)|g \in G\}$. Oleh karena itu, $\langle {}^{G}/_{N}, *\rangle$ adalah grup *rough* yang disebut dengan grup faktor *rough* dari G dengan $*$ didefinisikan dengan $g_1\overline{Apr}(N)*g_2\overline{Apr}(N)$ $= g_1g_2\overline{Apr}(N)$, untuk setiap $g_1\overline{Apr}(N), g_2\overline{Apr}(N) \in {}^{G}/_{N}$ (Zhang dkk., 2006).

Setelah memahami definisi-definisi yang telah diberikan sebelumnya, selanjutnya diberikan definisi modul faktor *rough* atas ring *rough* yang akan menjadi topik inti pada penelitian ini.

Definisi 2.11.5 Diberikan modul *rough* M atas ring *rough* R dan submodul *rough* N dari R-modul *rough* M. Dapat dibentuk grup faktor *rough* $\langle {}^{M}/_{N}, +\rangle$ yang merupakan grup *rough* komutatif dengan ${}^{M}/_{N} = \{\overline{x} = x + \overline{Apr}(N)|x \in M\}$.
Didefinisikan perkalian skalar di grup *rough* komutatif ${}^{M}/_{N}$ sebagai berikut:

$$a\overline{x} = a(x + \overline{Apr}(N)) = ax + \overline{Apr}(N),$$

untuk setiap $a \in R, \overline{x} \in {}^{M}/_{N}$. Karena N adalah submodul *rough* dari M, sehingga perkalian skalar di grup *rough* komutatif ${}^{M}/_{N}$ *well defined*, ${}^{M}/_{N}$ membentuk modul *rough* atas ring *rough* R yang disebut dengan modul faktor *rough* atas ring *rough* (Zhang dkk., 2006).

BAB III

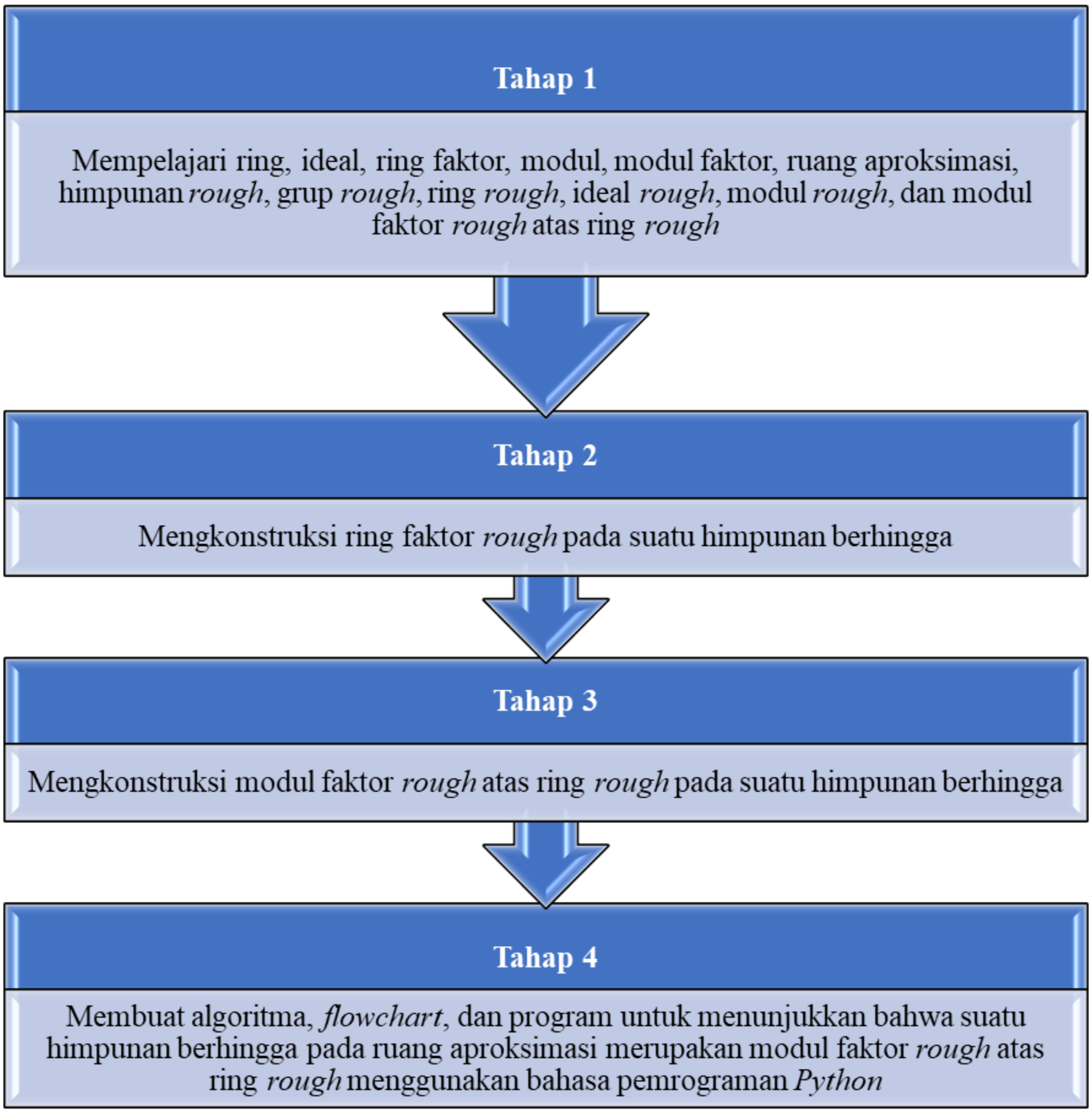
METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2023/2024 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jl. Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro No. 1, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Pada penelitian ini menggunakan studi literatur, yaitu dengan mengumpulkan dan mengolah bahan penelitian berdasarkan referensi seperti jurnal ilmiah dan buku yang berkaitan dengan penelitian ini. Adapun langkah-langkah dalam mencapai tujuan dari penelitian ini yang disajikan dalam diagram sebagai berikut:



Gambar 3.1 Diagram metode penelitian

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab IV diperoleh bahwa jika diberikan ruang aproksimasi (U, γ), dengan $\langle U, * \rangle$ ring berhingga dan $a\gamma b$ jika dan hanya jika $a - b \in S$, untuk suatu $a, b \in U$ dan S ideal U, terdapat ruang aproksimasi (U', γ'), dengan $U' = \{a + E | a \in U\}$, untuk suatu E ideal U. Selanjutnya, jika diberikan ruang aproksimasi (U, γ), dengan $\langle U, * \rangle$ modul berhingga dan $a\gamma b$ jika dan hanya jika $a - b \in S$, untuk suatu $a, b \in U$ dan S submodul U, terdapat ruang aproksimasi (U', γ'), dengan $U' = \{a + E | a \in U\}$, untuk suatu E submodul U.

Grup faktor *rough* $\langle {}^{R}/_{I}, + \rangle$ yang juga merupakan grup *rough* komutatif dengan R merupakan ring *rough* dan I adalah ideal *rough* R, yang mana himpunan ${}^{R}/_{I}$ didefinisikan dengan ${}^{R}/_{I} = \{\overline{r} = r + \overline{Apr}(I) | r \in R\}$, serta didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian di ${}^{R}/_{I}$. Himpunan ${}^{R}/_{I}$ merupakan ring *rough* yang disebut dengan ring faktor *rough*. Karena I merupakan ideal *rough* di R maka $\overline{Apr}(I)$ merupakan ideal. Jadi, I merupakan sebarang himpunan bagian tak kosong dari E yang berakibat $\overline{Apr}(I) = E$, dengan E ideal U.

Selanjutnya, grup faktor *rough* $\langle {}^{M}/_{N}, + \rangle$ yang juga merupakan grup *rough* komutatif dengan M merupakan modul *rough* atas ring *rough* R dan N adalah submodul *rough* dari R-modul *rough* M, yang mana himpunan ${}^{M}/_{N}$ didefinisikan dengan ${}^{M}/_{N} = \{\overline{x} = x + \overline{Apr}(N) | x \in M\}$, serta didefinisikan perkalian skalar di grup *rough* komutatif ${}^{M}/_{N}$. Karena N adalah submodul *rough* dari M, oleh karena itu perkalian skalar di grup *rough* komutatif ${}^{M}/_{N}$ *well defined*, sehingga ${}^{M}/_{N}$ adalah modul faktor *rough* atas ring *rough*. Karena N merupakan submodul *rough* di M maka $\overline{Apr}(N)$ merupakan submodul. Jadi, N merupakan sebarang himpunan bagian tak kosong dari E yang berakibat $\overline{Apr}(N) = E$, dengan E submodul U.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil dan pembahasan, terdapat beberapa saran untuk penelitian selanjutnya yaitu:

1. menguji sifat-sifat dari ring faktor *rough*;
2. menguji sifat-sifat dari modul faktor *rough* atas ring *rough*;
3. dalam mengonstruksi ring faktor *rough* dan modul faktor *rough* atas ring *rough*, dapat menggunakan himpunan universal lain dan relasi selain yang ada di dalam penelitian ini, terutama relasi pada ruang aproksimasi baru yang terbentuk agar kelas ekuivalensi yang diperoleh memiliki lebih dari satu kelas ekuivalensi;
4. karena dalam penelitian ini telah mengonstruksi ring faktor *rough*, dalam penelitian selanjutnya dapat disarankan untuk mengonstruksi modul faktor *rough* atas ring faktor *rough*.

DAFTAR PUSTAKA

Adkins, W. A., & Weintraub, S. H. (1992). *Algebra: An Approach via Module Theory*. New York: Springer-Verlag.

Agusfrianto, F. A., Fitriani, & Mahatma, Y. (2022). Rough Rings, Rough Subrings, and Rough Ideals. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, 5(2), 1-8.

Agusfrianto, F. A., & Ambarwati, L. (2023). Some Properties of Rough Ideals on Rough Rings. *Eigen Mathematics Journal,* 6(1), 1-4.

Aisah, I. (2018). *Struktur Aljabar (Grup): Materi dan Soal Latihan*. Jatinangor: Bitread Publishing.

Alharbi, N., Altassan, A., Aydi, H., & Özel, C. (2019). Rough Quotient in Topological Rough Sets. *De Gruyter Academic Publishing*, 17, 1750-1755.

Andari, A. (2015). *Teori Grup*. Malang: Universitas Brawijaya Press (UB Press).

Andari, A. (2015). *Pengantar Teori Modul*. Malang: Universitas Brawijaya Press (UB Press).

Andari, A. (2017). *Ring, Field dan Daerah Integral*. Malang: Universitas Brawijaya Press (UB Press).

Dummit, D. S., & Foote, R. M. (2004). *Abstract Algebra* $3^r d$ *edition*. New York: John Wiley & Sons.

Hafifulloh, D., Fitriani, & Faisol, A. (2022). The Properties of Rough V-Coexact Sequence in Rough Group. BAREKENG: *Journal of Mathematics and Its Application*, 16(3), 1069-1078.

Hidayat, N. (2017). *Cara Mudah Memahami Struktur Aljabar: Teori, Latihan Soal dan Bukti lengkap*. Malang: Universitas Brawijaya Press (UB Press).

Isaac, P., & Paul, U. (2017). Rough G-modules and Their Properties. *Research India Publications*, 12(1), 99-100.

Kumar, A., Kumar, A., & Sah, S. K. (2020). Roughness in G-modules and its Properties. *International Journal for Research in Engineering Application & Management (IJREAM)*, 6(4), 114-118.

Mahmood, W. (2016). Roughness in Quotient Groups. arXiv, 1-13.

Manik, N. I. (2014). *Matematika Diskrit: Soal-Jawab*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Miao, D., Han, S., Li, D., & Sun, L. (2005). Rough Group, Rough Subgroup and Their Properties. *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, 104-113.

Munir, R. (2016). *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika.

Nugraha, A. A., Fitriani, Ansori, M., & Faisol, A. (2022). The Implementation of Rough Set on a Group Structure. *Jurnal Matematika MANTIK*, 8(1), 45-52.

Pawlak, Z. (1982). Rough Set. *International Journal of Computing and Information Sciences*, 11(5), 341-356.

Pratama, R. (2019). *Ayo, Mempelajari Himpunan*. Jakarta: Sunda Kelapa Pustaka.

Sinha, A. K., & Prakash, A. (2015). Injective Module based on Rough Set Theory. *Cogent Mathematics*, 2, 1-7.

Susilowati, E. (2016). *Logika Matematika dan Himpunan*. Yogyakarta: Buku Matematika.

Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., Yuwaningsih, D. A., & Hartanto, A. D. (2016). *Teori Ring dan Modul*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.

Yanti, G. A. D., Fitriani, & Faisol, A. (2023). The Implementation of a Rough Set of Projective Module. *BAREKENG: Journal of Mathematics and Its Applications*, 17(2), 0735-0744.

Zhang, Q., Fu, A., & Zhao, S. (2006). Rough Modules and Their Some Properties. *Proceeding of the Fifth International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, 2290-2293.