DERET KEBALIKAN DARI POLINOMIAL KUARTIK DENGAN SATU AKAR BILANGAN BULAT NOL DAN TIGA AKAR BILANGAN BULAT BUKAN NOL

(Skripsi)

BERNIE FITRIA RAHMA
1817031093

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
2024

ABSTRACT

THE RECIPROCALS SERIES OF A QUARTIC POLYNOMIAL WITH ONE INTEGER ROOT ZERO AND THREE INTEGER ROOTS NON ZERO

By

Bernie Fitria Rahma

This research aims to develop a formula that can be used to calculate the sum of the reciprocal series of a quartic polynomial with one integer root of zero and three non-zero integer roots. The main focus of this study is the analysis of the convergence of the reciprocal series, which is determined by the behavior of the series terms as they approach infinity. Through a mathematical approach, this research conducts partial fraction decomposition and analysis of the sum of partial series expressed in the form of harmonic terms and normalized harmonics. The methodology used includes the calculation of harmonic number values, formation of fractions from partial sums, and the search for values of infinite telescoping series. The results of this research indicate that the sum of the reciprocal series of a quartic polynomial can be expressed in a clear formula, allowing for more efficient and accurate calculations.

Keywords: reciprocals series, quartic polynomial, integer roots, convergence, partial series sum, harmonic numbers, mathematical analysis.

ABSTRAK

DERET KEBALIKAN DARI POLINOMIAL KUARTIK DENGAN SATU AKAR BILANGAN BULAT NOL DAN TIGA AKAR BILANGAN BULAT BUKAN NOL

Oleh

Bernie Fitria Rahma

Penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan rumus yang dapat digunakan untuk menghitung jumlah deret kebalikan dari polinomial kuartik yang memiliki satu akar bilangan bulat nol dan tiga akar bilangan bulat bukan nol. Fokus utama dari studi ini adalah analisis konvergensi deret kebalikan, yang ditentukan oleh perilaku suku-suku deret saat mendekati tak hingga. Melalui pendekatan matematis, penelitian ini melakukan dekomposisi pecahan parsial dan analisis jumlah deret parsial yang dinyatakan dalam bentuk suku harmonik dan harmonik ternormalisasi. Metodologi yang digunakan mencakup perhitungan nilai bilangan harmonik, pembentukan fraksi dari jumlah parsial, serta pencarian nilai untuk deret teleskopik tak terhingga. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa jumlah deret kebalikan dari polinomial kuartik dapat dinyatakan dalam rumus yang jelas, yang memungkinkan perhitungan yang lebih efisien dan akurat.

Kata Kunci: deret kebalikan, polinomial kuartik, akar bilangan bulat, konvergensi, jumlah deret parsial, bilangan harmonik, analisis matematis.

DERET KEBALIKAN DARI POLINOMIAL KUARTIK DENGAN SATU AKAR BILANGAN BULAT NOL DAN TIGA AKAR BILANGAN BULAT BUKAN NOL

Bernie Fitria Rahma

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
2024

Judul : **DERET KEBALIKAN DARI POLINOMIAL KUARTIK DENGAN SATU AKAR BILANGAN BULAT NOL DAN TIGA AKAR BILANGAN BULAT BUKAN NOL**

Nama Mahasiswa : *Bernie Fitria Rahma*

NPM : 18170301093

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

Komisi Pembimbing

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 19740316 200501 1 001

Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.
NIP. 19800206 200312 1 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA Universitas Lampung

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim penguji

   Ketua : **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** ....

   Sekretaris : **Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.** ....

   Penguji
   Bukan pembimbing : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 19711001 200501 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **19 Desember 2024**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: **Bernie Fitria Rahma**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1817031093**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **DERET KEBALIKAN DARI POLINOMIAL KUARTIK DENGAN SATU AKAR BILANGAN BULAT NOL DAN TIGA AKAR BILANGAN BULAT BUKAN NOL**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, Desember 2024

Penulis

Bernie Fitria Rahma

RIWAYAT HIDUP

Penulis lahir pada 19 Januari 1999 di Desa Tempuran, Trimurjo. Penulis merupakan anak pertama dari dua bersaudara, lahir dari pasangan Bapak Kiswanto dan Ibu Siti Rahayu.

Pendidikan formal penulis dimulai di TK Aisyiyah Bustanul Athfal pada 2003-2005, dilanjutkan dengan pendidikan sekolah dasar di SD Negeri 1 Tempuran pada tahun 2005-2011. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan Sekolah Menengah Pertama di SMP Negeri 1 Trimurjo pada tahun 2011-2014. Pendidikan Sekolah Menengah Atas di SMA Negeri 3 Metro pada tahun 2014-2017. Pada tahun 2018, penulis diterima sebagai mahasiswi Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, melalui jalur SBMPTN.

Pada semester VI, penulis mengikuti program Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Purwoasri, Metro Utara, Kota Metro, yang berlangsung dari tanggal 01 Februari 2021 hingga 10 Maret 2021. Kemudian, pada semester VII, penulis menjalani program Kerja Praktik (KP) di KPU Provinsi Lampung pada tanggal 12 Juli 2021 hingga 20 Agustus 2021.

KATA INSPIRASI

"Kita harus berarti untuk diri kita sendiri dulu sebelum kita menjadi orang yang berharga bagi orang lain."

(Ralph Waldo Emerson)

"Kamu tidak perlu menjadi luar biasa untuk memulai, tapi kamu harus memulai menjadi luar biasa."

(Zig Ziglar)

"Maka sesungguhnya bersama kesulitan itu ada kemudahan."

(Q.S. Al-Insyirah: 5)

"Jika kamu ingin membalas dendam, jadilah seseorang yang lebih baik dari oarang-orang itu. Balas mereka dengan kemampuanmu dibandingkan kemarahanmu."

"Bahagia itu sederhana, tapi jangan sampai kau merusak kebahagian orang lain demi kebahagiaanmu. Jadi bahagialah dengan caramu sendiri. Orang lain juga perlu bahagia."

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin

Dengan mengucap puji dan syukur atas kehadirat Allah Subhanahu Wata'ala karena limpahan nikmat dan karunia-Nya sehingga skripsi ini dapat diselesaikan. Tak lupa shawalat beserta salam selalu tercurah kepada junjungan kita Nabi Muhammad Shallallahu 'Alaihi Wasallam.

Dengan penuh syukur dan ketulusan, kupersembahkan karya sederhana ini untuk:

Ayah dan Ibu

Terim kasih telah menjadi sosok yang selalu kuandalkan, telah memberikan pengorbanan, kasih sayang yang tiada henti dan dukungan atas segala keputusan yang kuambil. Menjadi rumah ternyaman sejauh apapun aku melangkah pergi dan sekeras apapun aku menghadapi hidup.

Dosen Pembimbing dan Dosen Pembahas

Terima kasih kepada dosen pembimbing dan dosen pembahas yang telah sangat berjasa dalam membantu, memberi masukan dan arahan, serta ilmu yang sangat bermanfaat.

Adikku Tersayang

Terimkasih untuk dukungan yang telah diberikan. Semoga dengan karya ini membuat adikku lebih semangat dalam menjalani pendidikan.

SANWACANA

Alhamdulillahirabilalamin, puji syukur senantiasa penulis hanturkan kepada Allah SWT, yang selalu memberi nikmatnya sehingga penulis dapat menyusun skripsi dengan judul “Deret Kebalikan dari Polinomial Kuartik dengan Satu Akar Bilangan Bulat Nol dan Tiga Akar Bilangan Bulat Bukan Nol” dengan baik dan lancar.

Dalam penyusunan skripsi ini, banyak sekali pihak yang telah membantu penulis dalam memberikan bimbingan, dorongan, semangat, motivasi, dan saran yang membangun. Pada kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Allah SWT atas segala nikmatnya yang telah diberikan sehingga penulis bisa beraktifitas dengan baik dan lancar.
2. Bapak Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung, selaku dosen pembimbing akademik, dan selaku dosen pembimbing 1, yang telah memberikan arahan, saran, dan bimbingan dalam proses penyelesaian skripsi ini.
3. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Sekretaris Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dan selaku dosen pembimbing 2 yang telah memberikan arahan, saran, dan bimbingan dalam proses penyelesaian skripsi ini.
4. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran serta evaluasi yang membangun kepada penulis agar dapat menjadi lebih baik lagi.

5. Seluruh dosen, staff, dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Ayah, ibu, dan adik yang selalu mendoakan dan mendukung penulis disetiap perjalanan dalam menempuh pendidikan sarjana ini.
7. Kepada teman-temanku Saskia Susanti Haros, Atma Rahmawati, Rika Tanisia yang telah memberikan dukungan, bantuan, dan memberikan semangat serta bimbingan.
8. Seluruh teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2018.
9. Terakhir, terima kasih kepada wanita sederhana yang sudah berusaha sebaik mungkin untuk menulis karya ini. Kamu hebat sudah sampai ke tahap ini dan bertahan sejauh ini melewati tantangan dan rintangan yang diberikan oleh alam semesta. Semoga langkah kebaikan akan selalu berada padamu dan semoga Allah SWT selalu meridhoi setiap perbuatanmu dan selalu dalam lindungan-Nya. Aamiin.

Semoga Allah SWT melimpahkan karunia-Nya dan memberikan kemudahan serta kebaikan kepada pihak-pihak yang telah membantu penulis. Penulis menyadari sepenuhnya bahwa skripsi ini masih memiliki banyak kekurangan baik dari segi materi maupun teknisnya. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi para pembacanya.

Bandar Lampung,   Desember 2024
Penulis,

Bernie Fitria Rahma

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

Tabel **Halaman**

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam matematika, persamaan polinomial mengacu pada variabel dengan satu atau lebih pangkat beserta koefisiennya, ditambah dengan operasi penjumlahan, perkalian, dan eksponensial. Menurut Rahmah. (2016), ada bentuk baku untuk persamaan polinomial sebagai berikut

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

di mana a adalah koefisien dari polinomial, yang merupakan bilangan riil, sedangkan n merepresentasikan derajat polinomial, yang merupakan bilangan bulat positif.

Persamaan kuartik sesuai dengan persamaan yang memiliki derajat yang paling tinggi empat. Persamaan kuartik deangan bentuk

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a = 0,$$

di mana $a_4 \neq 0$ dan a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 adalah konstanta rill. Selama tahun 400-an dan 200-an SM, Bhaskara, seorang astronom dan matematikanwan Jaina, adalah orang pertama di India kuno yang mengusulkan persamaan kuartik. Pada tahun 1540, Lodovico Ferrari dianggap sebagai penemu teknik aljabar untuk memecahkan masalah kuartik universal.

Dalam banyak situasi, angka-angka dalam suatu deret bisa tak terhingga, itulah sebabnya deret ini dikenal sebagai deret tak terhingga. Jadi, untuk setiap deret tak hingga a_k, deret terkait dinyatakan sebagai jumlah dari

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dihubungkan dengan deret jumlah parsial s_n. Selanjutnya, untuk setiap n, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ didefinisikan sebagai jumlah deret a_k dari a_1 hingga a_n, yaitu

$$s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots a_n$$

Deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jika jumlah deret parsial s_n konvergen ke s, yaitu $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, maka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen pada limit s. Oleh karena itu, dapat dinyatakan bahwa jumlah s atau $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ada dalam deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$ (Potucek, 2016).

Deret kebalikan adalah sebuah deret yang dibentuk dari kebalikan nilai-nilai dalam suatu barisan kebalikan. Barisan sering didefinisikan dengan memberikan rumus untuk suku ke-n dari x_n. Sehingga lebih mudah untuk mencantumkan suku-suku barisan secara berurutan, akan berhenti ketika aturan pembentuknya tampak jelas. Deret harmonik adalah sebuah deret yang terbentuk dari jumlah kebalikan bilangan asli. Bentuk umum dari deret harmonik sebagai berikut.

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Kemudian deret harmonik akan diperumum untuk orde *n* dengan pangkat *r* maka akan berubah menjadi deret-*r*. Maka bentuk umum dari deret-*r* ini sebagai berikut.

$$H_{n,r} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r}$$

Deret-*r* konvergen jika $r > 1$ dan divergen jika $0 < r \leq 1$.

Pada penelitian sebelumnya terkait jumlah deret kebalikan polinomial telah dilakukan oleh beberapa peneliti diantaranya, yaitu (Potucek, 2018) yang meneliti deret kebalikan dari polinomial kuadrat dengan akar bilangan bulat. Sedangkan pada penelitian selanjutnya oleh (Potucek, 2019) yang meneliti deret kebalikan dari polinomial kubik dengan satu akar bilangan nol dan akar bilangan bukan nol ganda.

Berdasarkan penelitian sebelumnya mengenai deret kebalikan dari polinomial menjadi salah satu fokus utama dalam analisis matematis. Salah satu aspek penting dalam studi deret kebalikan adalah pemahaman tentang konvergensi dari deret tersebut. Konvergensi deret ini ditentukan oleh perilaku dari suku-sukunya saat mendekati tak hingga. Maka pada penelitian ini akan diteliti lebih lanjut mengenai rumus yang tepat dalam menghitung jumlah deret kebalikan dari polinomial kuartik, yang memiliki satu akar bilangan bulat nol dan tiga akar bilangan bulat bukan nol. Oleh karena itu, berdasarkan uraian sebelumnya, akan dilakukan perrhitungan jumlah deret ini

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq a}}^{\infty} \frac{1}{k(k-a)^3}$$

yang menunujukkan penjumlahan parsial deret sebelumnya, yang dapat dinyatakan dalam suku harmonik H_n dan harmonik ternormalisasi $H_{n,r}$. Serta, menetapkan persamaan untuk deret kebalikan dari polinomial kuartik dengan satu akar bilangan bulat nol dan tiga akar bilangan bulat bukan nol.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menghasilkan rumus yang dapat digunakan untuk menghitung jumlah deret kebalikan dari polinomial kuartik yang memiliki satu akar bilangan bulat nol dan tiga akar bilangan bulat bukan nol.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah menambah pemahaman mengenai jumlah deret kebalikan dari polinomial kuartik dengan akar bilangan bulat nol dan tiga akar bilangan bulat bukan nol. Mengetahui rumus deret kebalikan dari polinomial kuartik yang memiliki satu akar bilangan bulat nol dan tiga akar bilangan bulat bukan nol.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Bilangan Bulat

Bilangan yang memiliki anggota bilangan positif, nol, dan bilangan negatif secara brurutan adalah bilangan bulat. Bilangan bulat positif terletak di sebelah kanan nol, sedangkan bilangan bulat negatif terletak di sebelah kanan nol, dan nol terletak di antara bilangan positif dan negatif. Simbol standar yang mewakili bilangan bulat adalah $\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ (Bartle & Sherbert, 2010).

2.2 Polinomial

Persamaan dari suku banyak dengan x memiliki derajat n merupakan persamaan polinomial, yang dikenal dalam bentuk umumnya, yaitu

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0,$$

dengan, a_n, $a_{n-1}, \dots a_1, a_0$ adalah suatu konstanta dan n bilangan bulat positif. Eksponen x terletak dalam derajat penurunan (Ayres & Schmidt, 2004). Polinomial *monoid* didefinisikan sebagai polinomial yang koefisien x pada derajat yang lebih tinggi sama dengan satu. Karakteristik polinomial *monoid* adalah

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

Polinomial dapat dibedakan berdasarkan derajat polinomial adalah sebagai berikut.

a. Polinomial kuadrat, juga disebut sebagai *quardratic polynomial* adalah dengan derajat paling tinggi dari suku *x* adalah 2, (Harris & Stocker, 1998)

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

di mana a, b, c adalah koefisien yang berupa bilangan riil dan $a \neq 0$.

b. Polinomial kubik, juga disebut sebagai *cubic polynomial* adalah polinomial dengan derajat paling tinggi dari suku *x* adalah tiga.

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

di mana a, b, c, d adalah koefisien yang berupa bilangan riil dan $a \neq 0$.

c. Polinomial kuartik, juga disebut sebagai *quartic polynomial* adalah polinomial dengan dengan derajat paling tinggi dari suku *x* adalah empat.

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

di mana a, b, c, d, e adalah koefisien yang berupa bilangan riil dan $a \neq 0$.

d. Polinomial berderajat n adalah persamaan polinomial yang memiliki nilai derajat dari variabelnya yang paling tinggi adalah *n*.

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

di mana $a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah koefisien yang berupa bilangan riil.

Persamaan umum dari polinomial $P(x) = 0$ dengan r adalah akar dari polinomial jika dan hanya jika $P(r) = 0$. Akar-akar dari sebuah persamaan polinomial dapat berupa akar-akar kompleks, akar irasional dan rasional. Apabila diketahui suatu persamaan polinomial $P(x) = 0$ serta memiliki koefisien bilangan real dan jika bilangan kompleks $(a + bi)$ juga merupakan akar persamaan polinomial tersebut. Dalam kajian polinomial, akar-akar dari polinomial kuartik dapat berupa bilangan real atau kompleks (Ayres & Schmidt, 2004).

2.3 Barisan dan Deret

Barisan dan deret merupakan konsep dasar matematika yang digunakan untuk menggambarkan urutan angka atau nilai. Fungsi dengan domain himpunan bilangan asli disebut barisan. Barisan dinotasikan dengan $\{x_n\}$ dan ditulis sebagai $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$. Barisan bilangan riil disebut dengan daerah hasil bilangan riil dikenal sebagai $X: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Barisan bilangan riil $\{x_n\}$ konvergen ke-x jika terdapat bilangan asli N_ε sedemikian sehingga

$$|x_n - x| < \varepsilon, n \geq N_\varepsilon$$

dengan kata lain, jika $\lim\{x_n\} = x$ maka $\{x_n\}$ konvergen ke-x (Setiyawan & Hartono, 2017)

Deret adalah penjumlahan dari suatu suku-suku pada barisan. Suatu deret dapat dituliskan dalam bentuk $\{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n\}$. Jika $\{X := X_n\}$ adalah suatu barisan dari $\mathbb{R}$, maka bentuk dari deret yang umum untuk barisan $\{S := S_k\}$ dapat didefinisikan sebagai

$s_1 = x_1$

$s_2 = s_1 + x_2 = x_1 + x_2$

...

$s_k = s_{k-1} + x_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$

...

di mana $\{x_n\}$ adalah suku deret dan $\{s_k\}$ adalah jumlah parsial dari deret. Deret juga dapat disimbolkan dalam bentuk sigma $\sum x_n$ atau $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (Bartle & Sherbert, 2010).

2.3.1. Barisan Tak Hingga

Sebuah fungsi yang daerah asalnya adalah himpunan bilangan bulat positif dan daerah nilainya adalah himpunan bilangan real yang tidak terbatas merupakan barisan tak hingga (*infinite sequence*). Barisan tak hingga dapat dinyatakan suatu barisan $a_1, a_2, a_3, \ldots$ dapat disajikan sebagai $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, atau cukup $\{a_n\}$.

Daerah asal dari barisan tak hingga yang terdiri dari semua bilangan bulat yang lebih besar atau sama dengan bilangan bulat tertentu, seperti $b_0, b_1, b_2, \ldots$ dan $c_0, c_1, c_2, \ldots$ yang dapat dituliskan juga sebagai $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ dan $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$. Suatu barisan dapat ditentukan dengan memberikan suku-suku awal yang cukup untuk membentuk suatu pola, seperti pada barisan $1, 4, 7, 10, 13, \ldots$.

Dengan rumus eksplisit untuk suku ke-*n*, seperti pada

$$a_n = 3_n - 2, \qquad n \geq 1$$

atau oleh rumus rekursi

$$a_n = a_{n-1} + 3, \qquad n \geq 2, a_1 = 1$$

(Purcell & Varberg, 1995).

2.3.2. Barisan Jumlah Parsial

Didefinisikan untuk setiap barisan a_k

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ didefinisikan sebagai jumlah deret $\{a_k\}$ dari a_1 hingga a_n untuk setiap n, yaitu

$$s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots a_n$$

Deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen pada limit s jika dan hanya jika jumlah deret parsial $\{s_n\}$ konvergen ke-s, yaitu $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Jadi, dapat dinyatakan bahwa deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mempunyai jumlah s atau $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$ (Potucek, 2016).

2.3.3. Deret Tak Hingga

Jumlah suku-suku yang tak hingga banyaknya disebut deret tak hingga, sedangkan deret berhingga adalah jumlah suku-suku yang berhingga banyaknya. Bentuk umum untuk deret tak hingga adalah $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Deret tak hingga memiliki jumlah parsial ke-n, yang diwakili oleh $\{s_n\}$, yang merupakan penjumlahan n suku pertama dari barisan (Bartle & Sherbert, 2010).

Suatu deret dengan suku ke-*n* menunjukkan aturan atau formula untuk mendapatkan nilai dari suku berikutnya. Contohnya $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$ yang memiliki rumus umum suku ke-*n* adalah $\frac{1}{2^n}$ (Bartle & Sherbert, 2010). Jika barisan jumlah-jumlah parsialnya $\{s_n\}$ konvergen ke s, maka deret konvergen dan sebaliknya, apabila $\{s_n\}$ divergen maka deret divergen.

2.3.4. Deret Harmonik

Deret harmonik adalah deret takhingga divergen.

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

untuk $n \in \mathbb{N}$. Karena $h_{n+1} = h_n + \frac{1}{(n+1)} > h_n$, maka dapat dilihat bahwa $\{h_n\}$ adalah barisan yang meningkat serta barisan tersebut divergen sehingga dapat dibuktikan dengan cara berikut

$$
\begin{aligned}
h_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} \\
&= 1 + \frac{n}{2}
\end{aligned}
$$

Deret harmonik $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergen ke S, maka dapat dibuktikan dengan

$$
\begin{aligned}
S &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) + \cdots \\
&> \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\right) + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \\
&= S
\end{aligned}
$$

Maka dari pembuktian ini menunjukkan bahwa deret harmonik tidak konvergen ke-S.

Deret p $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergen ketika $p > 1$. Karena jumlah parsialnya monoton, untuk menunjukkan bahwa beberapa suburutan (s_k) dibatasi. Jika $k_1 := 2^1 - 1 = 1$, maka $s_{k_1} = 1$. Jika $k_2 := 2^2 - 1 = 3$, karena $2^p < 3^p$, maka didapatkan

$$
s_{k_2} = \frac{1}{1^p} + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) < 1 + \frac{2}{2^{p-1}} = 1 + \frac{1}{2^{p-1}}
$$

Sehingga didapatkan $r := \frac{1}{2^{p-1}}$: karena $p > 1$, maka diperoleh $0 < r < 1$. Menggunakan induksi matematika, dapat ditunjukkan bahwa jika $k_j := 2^j - 1$, maka

$$
0 < s_{k_j} < 1 + r + r^2 + \cdots + r^{j-1} < \frac{1}{1-r}
$$

Maka dari itu, deret p konvergen ketika $p > 1$.

Deret p $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ divergen ketika $0 < p \leq 1$. Pertidaksamaan elementer akan digunakan untuk $n^p \leq n$ ketika $n \in \mathbb{N}$ dan $0 < p \leq 1$. Maka

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p}$$

untuk $n \in \mathbb{N}$. Jumlah deret parsial dari deret harmonik tidak terbatas, menurut pertidaksamaan ini, ketika $0 < p \leq 1$, jumlah deret parsial dari deret p tidak terbatas. Akibatnya, deret p divergen untuk nilai-nilai p ini (Bartle & Sherbert, 2010).

Deret harmonik ke-*n* merupakan deret kebalikan dari *n* yang dengan bilangan asli pertama

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Bilangan harmonik umum orde *n* pangkat *r* adalah

$$H_{n,r} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r}$$

di mana $H_{n,1} = H_n$ adalah bilangan harmonik. Setiap bilangan harmonik umum orde *n* pangkat *m* dapat ditulis menjadi fungsi umum bilangan harmonik orde ke-*n* pangkat $m - 1$ dalam bentuk sebagai berikut.

$$H_{n,m} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{H_{k,m-1}}{k(k+1)} + \frac{H_{n,m-1}}{n},$$

maka

$$H_{n,2} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{H_k}{k(k+1)} + \frac{H_n}{n}$$

di mana $r = 1,2, \ldots$ dan $n = 1,2, \ldots, 10$ (Potucek, 2016).

2.3.5. Deret Kebalikan

Deret yang dibentuk dari kebalikan nilai-nilai dalam suatu barisan kebalikan merupakan deret kebalikan. Barisan sering didefinisikan dengan memberikan rumus untuk suku ke-n dari $\{x_n\}$. Sehingga lebih mudah untuk mencantumkan suku-suku barisan secara berurutan, akan berhenti ketika aturan pembentuknya tampak jelas. Barisan kebalikan dari bilangan genap dapat didefinisikan dalam bentuk

$$X := \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots\right\}$$

atau dapat ditulis dalam bentuk

$$X := \left\{\frac{1}{2n}\right\} : n \in \mathbb{N}$$

(Bartle & Sherbert, 2010).

Deret kebalikan dari beberapa barisan kebalikan bilangan genap umumnya berbentuk pecahan satuan. Deret kebalikan s untuk semua bilangan *nonzero triangular*

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

(Potucek, 2018).

2.3.6. Deret *Telescoping*

Suatu deret *telescoping*, setiap suku dapat saling meniadakan dengan suku sebelumnya atau sesudahnya. Oleh karena itu, hanya suku-suku yang telah ditiadakan yang termasuk dalam jumlah parsialnya. Suatu deret yang memiliki suku-suku berbentuk fungsi rasional dapat diubah menjadi deret *telescoping* dengan menggunakan metode pecahan parsial. Misalnya, suku ke-n terdiri dari $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k}$, dengan $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$. Ketika persamaan $1 = A(n+1) + Bn$ diuraikan, maka diperoleh $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$. Selanjutnya, definisikan persyaratan untuk n yang merepresentasikan jumlah parsial menjadi $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Selanjutnya, tentukan limit deret jumlah parsial $\{s_n\}$ untuk menentukan jumlah dari deret teleskopik tak terhingga, yang ditulis sebagai $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Contoh berikut ini menunjukkan,

$$s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)}$$

Jadi, diperoleh $\lim_{n\to\infty} \mathrm{s}_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{(\mathrm{n}+1)}\right) = 1$ (Potucek, 2018).

2.4 Fungsi Zeta Riemann

Fungsi *Zeta Riemann* $\zeta(\mathrm{S})$ memiliki bentuk akar bilangan genap negatif dan bilangan kompleks dengan bagian riil $\frac{1}{2}$ (Riemann & Wilkins, 1998). Fungsi ini didefinisikan sebagai berikut:

$$\zeta(\mathrm{S}) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Pada awalnya didefinisikan dengan asusmsi bahwa $\mathrm{S} \in \mathbb{C}$ dan $\mathrm{Re}(\mathrm{S}) > 1$. Kemudian, melalui kontinuasi analitik, dapat diperluas ke seluruh struktur yang telah selesai.

Perhitungan dari $\zeta(2)$ dikenal sebagai *Basel Problem*. Nilai $\zeta(3)$ dikenal juga dengan sebutan *Apéry's Constant*. Sedangkan untuk nilai $\zeta(4)$ terkait dengan *Stefan-Boltzmann law* dan *Wien aproximation* di fisika. Nilai dari $\zeta(\mathrm{n})$ untuk bilangan positif kecil dari n adalah $\zeta(1) = \infty$, $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(3) = 1.2020569032 \ldots$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(5) = 1.0369277551 \ldots$, $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$, $\zeta(7) = 1.0083492774 \ldots$, $\zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}$, $\zeta(9) = 1.0020083928 \ldots$, dan $\zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555}$ (Heinbockel, 2021).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini di lakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2024/2025 di jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Menghitung nilai dari bilangan harmonik H_n dan bilangan harmonik umum $H_{n,r}$.
2. Menentukan bentuk fraksi dari jumlah parsial
$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq a}}^{\infty} a_k = \sum_{\substack{k=1\\k\neq a}}^{\infty} \frac{1}{k(k-a)^3}$$
3. Membentuk susun suku-suku dari jumlah parsial ke-n $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ dalam bentuk yang dapat dilihat apakah saling meniadakan.
4. Mencari nilai dari $\lim_{n\to\infty} s_n$ untuk mencari jumlah deret teleskopik tak terhingga.
5. Menghitung nilai dari deret
$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq a}}^{\infty} \frac{1}{k(k-a)^3}$$

V. KESIMPULAN

5.1. Kesimpulan

Jumlah deret kebalikan dari polinomial kuartik yang memiliki satu akar bilangan bulat nol dan tiga akar bilangan bulat bukan nol yaitu dari deret

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq a}}^{\infty} \frac{1}{k(k-a)^3}$$

Didapatkan rumus jumlah deret adalah

$$s(0,a_3) = \frac{\zeta(3)}{a} + \frac{H\left(1+\frac{\operatorname{sgn}(a)}{2}-|a|,3\right)}{|a|} - \frac{\pi^2}{6a^2} - \frac{H\left(1+\frac{\operatorname{sgn}(a)}{2}-|a|,2\right)}{a^2} + \frac{H\left(1+\frac{\operatorname{sgn}(a)}{2}-|a|\right)}{a^3} + \frac{1}{a^4}$$

di mana $H(n)$ adalah bilangan harmonik dan $H(n,3)$, $H(n,2)$ adalah bilangan harmonik umum dengan $n = 1 + \frac{\operatorname{sgn}(a)}{2} - |a|$.

DAFTAR PUSTAKA

Ayres, F. & Schmidt, P.A.. 2004. *Schaum's Outlines: Matematika Universitas,* (3rd ed.). Erlangga, Jakarta.

Bartle, R.G., & B, D. R. 2010. *Intoduction to Reall Analysis* (4^{th} ed.). New York: John Wiley & Sons.

Harris, J. W., & Stocker, H. 1998. Handbook of Mathematics and Computational Science. *Handbook of Mathematics and Computational Science, January 1998*. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5317-4

Heinbockel, J. H. 2021. Special Values for the Riemann Zeta Function. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, *09*(05), 1108–1120. https://doi.org/10.4236/jamp.2021.95077

Potucek, R. 2016. The Sum of the Series of Reciprocals of The Quadratic Polynomial with Different Negative Integer Roots. *Ratio Mathematica*. ISSUE N. 30(2016), pp. 59-66.

Potucek, R. 2018. The Sum of the Series of Reciprocals of the Quadratic Polynomials with Integer Roots. *17th Conference on Applied Mathematics, APLIMAT 2018 - Proceedings*, *2018-Febru*(2), 853–860.

Potucek, R. 2019. The Sum of the Series of Reciprocals of the Cubic Polynomials with One Zero and Double Non-Zero Integer Root. *Mathematics in Education, Research and Applications*, 5(1), 9-15. https://doi.org/10.15414/meraa.2019.05.01.9-15

Purcell, E. J., & Varberg, D. 1995. *Kalkulus dan Geometri Analitis Edisi* 5 *Jilid 2*. Erlangga.

Rahmah, Y. (2016). *Development of Calculator for Finding Complex Roots of n th Degree Polynomials*. *5*(2), 57–66.

Riemann, B., & Wilkins, D. R. (Traslator). (1998). On the Number of Prime Numbers less than a Given Quantity . (Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Groesse). *Monatsberichte Der Berliner Akademie*, *2*(November 1859), 145–155.

Setiyawan, R. P., & Hartono. (2017). Analisis Kekonvergenan Pada Barisan Fungsi. *Jurnal Kajian Dan Terapan Matematika*, *6*(1), 34–39. https://journal.student.uny.ac.id/index.php/jktm/article/download/6181/5890