REPRESENTASI OPERATOR LINEAR DARI RUANG BARISAN l_1 KE RUANG BARISAN l_∞

(Skripsi)

Oleh

LAMBUNG SUDRAJAT

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

ABSTRACT

REPRESENTATION OF LINEAR OPERATORS
FROM SEQUENCE SPACE l_1 TO SEQUENCE SPACE l_∞

BY

LAMBUNG SUDRAJAT

A sequence is an order of several numbers formed in the presence of a certain order. In this case, the linear operator representation includes a sequence space l_1 (sequence space containing sequence with convergent absolute numbers) to sequence space l_∞ (sequence space containing a limited sequence). There have been many cases of linear operators from sequence space to sequence space that can be solved using the no-to-matrix concept, where a no-up matrix itself is a matrix that has a size not to times not to. The purposes of this research are as follows: To study the properties of any linear operator that works from linear space l_1 to linear space l_∞, and to look for the representation of linear operators from linear space l_1 to linear space l_∞. A continuous linear operator $A : l_1 \rightarrow l_\infty$ will be an operator-SM if and only if there is a matrix $\left(a_{ij}\right)$ that satisfy:

i. $A(x) = \left\{\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j\right\} \in l_\infty$ for every $x = (x_i) \in l_1$

ii. $\sup_{i \geq 1} \sup_{j \geq 1} |a_{ij}| < \infty$

iii. $\sum_{m=1}^{\infty} \|\sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} d_m\| < \infty$

Then from that, the collection of all operators-SM A $A : l_1 \rightarrow l_\infty$ denoted with $SM(l_1, l_\infty)$ will form the Banach space.

Keywords : *Representation of linear operators, sequence spaces, matrix, banach spaces.*

ABSTRAK

REPRESENTASI OPERATOR LINEAR
DARI RUANG BARISAN l_1 KE RUANG BARISAN l_∞

OLEH

LAMBUNG SUDRAJAT

Barisan adalah susunan dari beberapa bilangan yang terbentuk dengan adanya urutan tertentu. Dalam kasus ini, representasi operator linear mencakup ruang barisan l_1 (ruang barisan yang berisi barisan dengan jumlah mutlak konvergen) ke ruang barisan l_∞ (ruang barisan yang berisi barisan terbatas). Sudah banyak ditemukan kasus operator linear dari ruang barisan ke ruang barisan yang dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep matriks tak hingga, yang mana matriks tak hingga sendiri adalah matriks yang memiliki ukuran tak hingga kali tak hingga. Tujuan dilakukannya penelitian ini diantaranya sebagai berikut: Untuk mempelajari sifat operator linear apa saja yang bekerja dari ruang barisan l_1 ke ruang barisan l_∞, dan untuk mencari representasi operator linear dari ruang barisan l_1 ke ruang barisan l_∞. Suatu operator linear kontinu $A : l_1 \to l_\infty$ akan menjadi operator-SM jika dan hanya jika terdapat matriks (a_{ij}) yang memenuhi:

i. $A(x) = \{\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j\} \in l_\infty$ untuk setiap $x = (x_i) \in l_1$

ii. $\sup_{i\geq 1} \sup_{j\geq 1} |a_{ij}| < \infty$

iii. $\sum_{m=1}^{\infty} \|\sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}d_m\| < \infty$

Maka dari itu, koleksi semua operator-SM $A : l_1 \to l_\infty$ yang dinotasikan dengan $SM(l_1, l_\infty)$ akan membentuk ruang Banach.

Kata Kunci : *Representasi operator linear, ruang barisan, matriks, ruang banach.*

Judul : **REPRESENTASI OPERATOR LINEAR DARI RUANG BARISAN l_1 KE RUANG BARISAN l_∞**

Nama Mahasiswa : **Tambung Sudrajat**

Nomor Pokok Mahasiswa : **2017031041**

Jurusan/Program Studi : **Matematika/S1-Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI,

1. Komisi Pembimbing

Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.	**Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.**
NIP. 19720227 199802 1 001	NIP. 19700831 199903 1 001

MENGETAHUI,

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.

NIP. 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Drs. Tiryono, M.Sc., Ph.D.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 19711001 200501 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **9 Agustus 2024**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: **Lambung Sudrajat**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **2017031041**
Jurusan/Program Studi	: **Matematika/S-1 Matematika**
Judul Skripsi	: **Representasi Operator Linear Dari Ruang Barisan l_1 Ke Ruang Barisan l_∞**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil dari pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung. Jika dikemudian hari terbukti apabila pernyataan saya ini tidak benar, saya bersedia untuk menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 9 Agustus 2024

Penulis,

METERAI TEMPEL

3474DALX286724961

Lambung Sudrajat

NPM. 2017031041

DAFTAR ISI

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Menurut pendapat (Abdurrahman, 2002), matematika adalah bahasa simbolis yang digunakan untuk mengekspresikan suatu hubungan antara kuantitatif dan keruangan. Namun (Maryati dan Priatna, 2017: 336) berpendapat bahwa, matematika adalah ilmu deduktif, apabila belum didapatkan kebenarannya, maka penulis harus menemukan pembuktian teorema, lemma, dan sifat yang nantinya digunakan untuk mencari kebenaran.

Banyak sekali ilmu yang dapat dipelajari di dalam Matematika, salah satunya yaitu barisan. Barisan adalah susunan dari beberapa bilangan yang terbentuk dengan adanya urutan tertentu. Dalam kasus ini, kita ingin merepresentasikan operator linear dari ruang barisan l_1 (ruang barisan yang berisi barisan dengan jumlah mutlak konvergen) ke ruang barisan l_∞ (ruang barisan yang berisi barisan terbatas). Sudah banyak ditemukan kasus operator linear dari ruang barisan ke ruang barisan yang dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep matriks tak hingga, yang mana pengertian matriks tak hingga sendiri adalah matriks yang memiliki ukuran tak hingga kali tak hingga.

Barisan yang berisikan bilangan real merupakan suatu fungsi yang bernilai real dan dapat didefinisikan sebagai himpunan $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$. Hal ini berarti bahwa barisan bilangan real yaitu suatu fungsi x: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, maka dapat dilambangkan dengan $x = (x_j)$. Contoh bentuk dari ruang barisan klasik rata-rata hampir mirip dengan contoh ruang barisan, yaitu ruang barisan yang konvergen (c), ruang barisan yang konvergen ke 0 ($c0$), dan ruang barisan yang terbatas (l_1). Untuk setiap bilangan *real* p dengan $1 \leq p < \infty$ didefinisikan.

$$l_1 = \left\{ x \in (x_j) \left| \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < \infty \right. \right\}$$

$$\|x\|_1 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j| \right)$$

Sebagai contoh suatu matriks $A : l_1 \rightarrow l_\infty$ dengan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$
dan $x = (x_j) \in l_1$ maka:

$$A(x) = Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots \\ \dots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j}x_j \\ \dots \end{bmatrix}$$

Maka dari itu, terdapat suatu permasalahan yang harus diselesaikan dengan memenuhi syarat $A(x) \in l_\infty$.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian pada skripsi ini diantaranya sebagai berikut:

1. Untuk memahami sifat operator linear apa saja yang bekerja dari ruang barisan l_1 ke ruang barisan l_∞.
2. Untuk mencari dan membuktikan representasi operator linear dari ruang barisan l_1 ke ruang barisan l_∞.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian pada skripsi ini diantaranya sebagai berikut:

1. Untuk mempelajari sifat operator linear apa saja yang bekerja dari ruang barisan l_1 ke ruang barisan l_∞.
2. Untuk mengetahui representasi operator linear dari ruang barisan l_1 ke ruang barisan l_∞.
3. Untuk memberi referensi dan ide bagi penulis lainnya yang ingin meneliti hal-hal lebih lanjut mengenai operator.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Operator

Definisi 2.1.1

Suatu pemetaan yang terjadi pada ruang vektor terkhusus pada ruang bernorma disebut dengan operator (Kreyszig, 1989).

Definisi 2.1.2

Diberikan contoh ruang Bernorm X dan Y atas *field* yang sama.

a. Pemetaan yang terjadi dari X dan Y disebut dengan operator.

b. Operator $A : X \rightarrow Y$ dapat dikatakan linear apabila untuk setiap $x, y \in X$ dan setiap skalar α berlaku $A(\alpha x) = \alpha Ax$ dan $A(x + y) = Ax + Ay$ (Kreyszig, 1989).

Definisi 2.1.3

Diberikan $(X, \|.\|)$ dan $(Y, \|.\|)$ yang merupakan ruang bernorm.

a. Operator $A : X \rightarrow Y$ dapat dikatakan terbatas apabila terdapat bilangan $M \in R$ dengan $M \geq 0$ sehingga untuk setiap $x \in X$ akan berlaku $\|Ax\| \leq M\|x\|$.

b. Operator A dapat dikatakan kontinu di $x \in X$ apabila diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ dan jika bilangan $\delta > 0$ jadi untuk setiap $y \in X$ dengan $\|x - y\| \leq \delta$ akan berlaku $\|Ax - Ay\| \leq \varepsilon$.

c. Apabila A kontinu di setiap $x \in X$, A dapat dikatakan kontinu pada X (Kreyszig, 1989).

2.2 Barisan

Definisi 2.2.1

Barisan ialah suatu daftar urutan bilangan dari kiri ke kanan yang mempunyai karakteristik, pola ataupun syarat tertentu, contohnya a_1, a_2, a_3, … , a_n, …
a_1 merupakan suku urut pertama, a_2 suku urut kedua dan a_n merupakan suku urut ke n. Barisan dapat dianggap sebagai fungsi dengan $f\colon N \to R$, dimana N adalah domain dari f dan N merupakan himpunan semua bilangan bulat positif, sedangkan R yaitu himpunan bilangan real (Suparyana, 2021).

Definisi 2.2.2

Diberikan ω sebagai kumpulan atau koleksi dari semua barisan bilangan real, jadi:

$$\omega = \{\bar{x} = (x_i) \colon x_i \in \mathbb{R}\}$$

a. Untuk setiap bilangan real 1 dengan $1 < \infty$ maka didefinisikan:

$$l_1 = \left\{ x \in (x_i) \in \omega; \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < \infty \right\}$$

Norm pada l_1 yaitu

$$\|x\|_1 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j| \right)$$

b. Untuk $l_1 = \infty$ maka didefinisikan:

$$l_\infty = \{\bar{x} = (x_i) \in \omega \colon sup_{i \geq 1} |x_i| < \infty\}$$

Norm pada l_∞ yaitu

$$\|x\|_\infty = sup_{i \geq 1} |x_i|$$

(Darmawijaya, 2007).

2.3 Ruang Barisan

Definisi 2.3.1

Ruang barisan adalah suatu ruang linear yang didalam ruangannya terdapat barisan-barisan dengan karakteristik tertentu, karakteristik tersebut diantaranya adalah l_p, l_∞, c dan c_0.

Diberikan $\omega(R)(c) = \{\bar{x} = (x_i): x_i \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{N}\}$ dan $n \in \mathbb{N}$.

$$l_1 = \{\bar{x} = (x_i) \in \omega(R) : \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \ < \infty$$

Dan

$$l_\infty = \{\bar{x} = (x_i) \in \omega\ (R) : \ \|x\|_\infty = \|x\|_\infty = sup_{i\geq 1}|x_i|$$

2.4 Ruang Vektor

Definisi 2.4.1

Ruang vektor diatas lapangan (F) merupakan himpunan yang tak kosong (X) dan dilengkapi dengan adanya fungsi penjumlahan $(+) : X \times X \rightarrow X$ serta dengan adanya fungsi perkalian skalar $(\cdot) : F \times X \rightarrow X$ sehingga untuk setiap skalar λ, μ dengan elemen $x, y, z \in X$ akan berlaku:

i. $x + y = y + x$
ii. $(x + y) + x = x + (y + z)$
iii. Ada $0 \in X$, sehingga $x + 0 = x$
iv. Ada $-x \in X$, sehingga $x + (-x) = 0$
v. $1 \cdot x = x$
vi. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
vii. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
viii. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

(Maddox, 1970).

2.5 Basis

Definisi 2.5.1

Ruang vektor V akan terbangkitkan dengan hingga (*finitely generated*) apabila terdapat vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \epsilon\ V$ sehingga $V = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$. Pada keadaan seperti itu $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ berperan sebagai pembangkit atau generator dari ruang vektor V. Berdasarkan definisi tersebut, ruang vektor V akan terbangkitkan dengan hingga jika dan hanya jika terdapat vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \epsilon\ V$ sehingga untuk setiap vektor $x \epsilon\ V$ terdapat skalar-skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, a_n$ sehingga:

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

Dalam bentuk umum, jika $B \subset V$ dan V terbangkitkan oleh B, maka setiap $x \in V$ terdapat vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$ dan skalar $a_1, a_2, \dots, a_n$ sehingga:

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

(Darmawijaya, 2007).

Definisi 2.5.2

Diberikan contoh ruang vektor V**,** maka himpunan $B \subset V$ dapat dikatakan bebas linear apabila setiap himpunan bagian hingga yang terdapat di dalam B bebas linear (Darmawijaya, 2007).

Definisi 2.5.3

Diberikan contoh ruang vektor V atas lapangan F, maka himpunan $B \subset V$ dapat dikatakan basis atau *base* V apabila B bebas linear dan $|V| = B$.

Contoh :

Himpunan $\{\breve{e}_1, \breve{e}_{2,} \dots, \breve{e}_n\}$ dengan $\widetilde{e_n}$ vektor yang terdapat di dalam R^n dengan komponen ke-i sama dengan 1 dan semua komponen yang lainnya sama dengan 0, merupakan basis pada ruang vektor R^n (Darmawijaya, 2007).

2.6 Matriks

Definisi 2.6.1

Matriks merupakan jajaran bilangan berbentuk segi empat yang diapit dengan tanda kurung.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Disebut matriks tak hingga baris dan tak hingga kolom, atau matriks tak hingga. Tiap baris dalam jajaran bilangan tersebut dinamakan sebagai vektor baris, dan tiap kolom dalam jajaran bilangan tersebut dinamakan vektor kolom.

Bilangan $a_{11},\ a_{12}, \ldots$ disebut unsur-unsur matriks tak hingga kolom ditulis dengan $A = \left(a_{ij}\right) \qquad i = 1,2, \ldots , \qquad j = 1,2, \ldots ,$
(Nuril dan Novia, 2020).

2.7 Ruang Metrik

Definisi 2.7.1

Ruang metrik adalah suatu ruang abstrak yang mengandung aksioma-aksioma tertentu. Ruang metrik adalah suatu hal yang berkaitan dengan analisis fungsional karena hal memegang peranan penting pada jarak real line R.

Dimisalkan X adalah himpunan yang tak kosong, metrik pada X ialah suatu fungsi $d: X \times X \to (0, \infty)$ maka untuk setiap pasangan $(x, y) \in X \times X$ berlaku:

i. d$(x, y) \geq 0$, untuk setiap $x, y \in X$
ii. d$(x, y) = 0$, jika dan hanya jika x = y
iii. d$(x, y\ ) =$ d$(y, x\ )$, untuk setiap $x, y \in X$ (sifat simetri)
iv. d$(x, y\ ) \leq$ d $(x, z\ ) +$ d$(z, y\ )$, untuk setiap $x, y \in X$ (ketidaksamaan segitiga)

Lalu pasangan (X, d) dengan d merupakan metrik di X dapat dikatakan sebagai ruang metrik. Setiap anggota pada X dinamakan titik dan nilai d (x, y) dinamakan jarak (*distance*) dari titik x ke titik y atau jarak antara titik x dan titik y (Kreyszig, 1989).

2.8 Ruang Bernorma

Definisi 2.8.1

Diberikan contoh ruang linear X. Fungsi ‖ ‖ yang memiliki sifat-sifat berikut:

i. $\|x\| \geq 0$, untuk setiap $x \in X$
ii. $\|x\| = 0$, jika dan hanya jika $x = 0$, (0 vektor nol)
iii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot |x|$, untuk setiap skalar α dan $x \in X$
iv. $\|\ x + y\| \leq \|\ x\| + \|y\ \|$, untuk setiap $x, y \epsilon X$

Dikatakan norma pada ruang linear X dan bilangan non negatif $\|x\|$ dinamakan norma vektor x. Ruang linear X yang mengandung norma $\| \cdot \|$ disebut dengan ruang bernorma ($norm\ space$) dan dapat ditulis dengan singkat menjadi $(X, \| \cdot \|)$ atau hanya X saja apabila normanya sudah diketahui (Darmawijaya, 1970).

2.9 Ruang Banach

Definisi 2.9.1

Ruang Banach (*Banach space*) merupakan suatu ruang yang memiliki norma secara lengkap (sebagai ruang metrik yang lengkap) apabila pada suatu ruang bernorm X berlaku kondisi bahwa pada setiap barisan *Cauchy* yang terdapat di ruang bernorm X bersifat konvergen (Darmawijaya, 2007).

2.10 Operator-SM

Definisi 2.10.1

Operator-SM adalah operator yang digunakan dalam ilmu pemodelan matematika untuk menganalisis dinamika sistem berupa sistem kontrol, sistem dinamis, dan aplikasi di berbagai bidang teknik dan sains. Namun, dalam hal lainnya, Operator-SM digunakan dalam merepresentasikan pemodelan matematis dari dinamika sistem, seperti operator transfer dalam domain Laplace atau operator dalam ruang keadaan. Contohnya, dalam kontrol linier, operator-SM digunakan untuk menggambarkan hubungan antara input dan output sistem.

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitian ini sepenuhnya dikerjakan di lingkungan jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Lampung (UNILA), dan waktu penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil tahun akademik 2023/2024.

3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang akan digunakan pada penelitian ini diantaranya yaitu:

1. Akan mengkonstruksi operator A dari ruang barisan l_1 ke ruang barisan l_∞ dengan basis standar $\{e_k\}$ dengan $e_k = (0,0, \dots, 1_{(k)}, \dots)$.
2. Akan mengkonstruksi norma yang terdapat pada operator A.
3. Akan menyelidiki kumpulan atau koleksi dari semua operator yang nantinya dapat membentuk ruang Banach.
4. Akan merepresentasikan operator A sebagai matriks tak hingga yang dikerjakan pada barisan l_1 ke ruang barisan l_∞ dengan basis standar $\{e_k\}$ dengan $e_k = (0,0, \dots, 1_{(k)}, \dots)$.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Suatu operator linear kontinu $A : l_1 \to l_\infty$ akan menjadi operator-SM jika dan hanya jika terdapat matriks $\left(a_{ij}\right)$ yang memenuhi:

i. $A(x) = \left\{\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j\right\} \in l_\infty$ untuk setiap $x = (x_i) \in l_1$

ii. $\sup_{i \geq 1} \sup_{j \geq 1} |a_{ij}| < \infty$

iii. $\sum_{m=1}^{\infty} \|\sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} d_m\| < \infty$

Maka dari itu, koleksi semua operator-SM $A : l_1 \to l_\infty$ yang dinotasikan dengan $SM(l_1, l_\infty)$ akan membentuk ruang Banach.

5.2 Saran

Kepada para peneliti yang ingin meneliti topik ini, diharapkan untuk mengembangkan penelitian terhadap Operator Linear pada Ruang yang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Berberian, S. K. 1996.*Fundamentals of Real Analysis*.Springer, Texas.

Darmawijaya, S. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*. Universitas Gajah Mada,Yogyakarta.

Fuhrmann, P. A. 1981. *Linear Syatem and Operator in Hilbert Space*.McGrawHill and Sons, New York.

Gozali, S. M. 2010. Norm Vektor dan Norm Matriks. Juni 2010.

Kamthan, P. K dan Gupta, M. 1981.*Sequence Spaces and Series*. Marcel DekkerInc, New York.

Kreyszig, E. 1989.*Introductory Function Analysis with Application*. Willey Classic Library, New York.

Maddox,I.J. 1970. *Element of Functional Analysis*. Cambridge Univercity Press, London.

Martono, K. 1984. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik 2*. Angkasa, Bandung.
Mizrahi, A. dan Sullivan, M. 1982. *Calculus and Analytic Geometry*.Wadsworth

Nuril dan Novia. 2020 *Dasar-dasar aljabar linear.* Universitas Muhammadiyah Sidoarjo. Sidoarjo, Jawa Timur.

Ruckle, W. H. 1991. *Modern Analysis*. PWS-KENT Publishing Company, Boston.

Yahya, Y., Suryadi, D. H. S. dan Agus, S. 1990. *Matematika Dasar Untuk Perguruan Tinggi*. Ghalia Indonesia, Jakarta.