

**IMPLEMENTASI PEMODELAN MATEMATIKA LAJU ALIRAN AIR
TERHADAP PEMBANGKIT LISTRIK TENAGA MIKRO HIDRO DENGAN
METODE BEDA HINGGA**

(Skripsi)

Oleh
NI KADEK DEA CHANTIKA PUTRI



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024**

ABSTRACT

IMPLEMENTATION OF MATHEMATICAL MODELING OF WATER FLOW RATES FOR MICRO HYDRO POWER PLANTS USING THE FINITE DIFFERENCE METHOD

By

Ni Kadek Dea Chantika Putri

Mathematical modeling is a field of mathematics that attempts to present and explain real-world problems in mathematical statements. So that a more precise understanding of real word problems is obtained. The finite difference method is a method used to solve ordinary differential equations, especially first order ordinary differential equations. Finite difference method are used to solve technical problems from physical phenomena. In this research, water and rate calculations will be carried out in micro-hydro power plants using the finite difference method and with the help of the lindo application. As a simulation, using primary rainfall data for water flow in a micro-hydro power plants. By forming a simultaneous the equation into the lindo application, it will produce a water flow value and is calculated using the finite difference method to produce the water rate. The results of this research show a simultaneous equations model, producing water flow and speed in nine areas, namely rate between manual calculations using *Lindo Software*.

Keywords : Mathematical modeling, finite difference method, water flow.

ABSTRAK

IMPLEMENTASI PEMODELAN MATEMATIKA LAJU ALIRAN AIR TERHADAP PEMBANGKIT LISTRIK TENAGA MIKRO HIDRO DENGAN METODE BEDA HINGGA

Oleh

Ni Kadek Dea Chantika Putri

Pemodelan matematika adalah bidang matematika yang berusaha untuk mempresentasikan dan menjelaskan permasalahan dunia nyata dalam pernyataan matematika. Sehingga diperoleh pemahaman masalah dari dunia nyata menjadi lebih tepat. Metode beda hingga merupakan metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa, khususnya persamaan diferensial biasa orde satu. Metode beda hingga digunakan untuk menyelesaikan persoalan teknis dan masalah matematis dari suatu gejala fisis. Dalam penelitian ini akan dilakukan perhitungan aliran dan laju air pada PLTMH dengan menggunakan metode beda hingga dan bantuan aplikasi *Lindo*. Sebagai simulasi, menggunakan data primer curah hujan untuk aliran air pada PLTMH. Dengan membentuk model persamaan simultan kemudian *menginput* persamaan tersebut ke dalam *Software Lindo* lalu menghasilkan nilai aliran air dan dihitung menggunakan metode beda hingga untuk menghasilkan laju air. Hasil penelitian ini menunjukkan model 9 persamaan simultan, menghasilkan aliran dan laju air pada sembilan daerah yaitu $w_1 - w_9$ pada PLTMH dan membandingkan hasil aliran dan laju air antara perhitungan manual dengan menggunakan *Software Lindo*.

Kata Kunci : Pemodelan matematika, metode beda hingga, laju aliran air.

**IMPLEMENTASI PEMODELAN MATEMATIKA LAJU ALIRAN AIR
TERHADAP PEMBANGKIT LISTRIK TENAGA MIKRO HIDRO
DENGAN METODE BEDA HINGGA**

Oleh

Ni Kadek Dea Chantika Putri

Skripsi

**Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA**

Pada

**Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024**

Judul Skripsi : **IMPLEMENTASI PEMODELAN
MATEMATIKA LAJU ALIRAN AIR
TERHADAP PEMBANGKIT LISTRIK
TENAGA MIKRO HIDRO DENGAN
METODE BEDA HINGGA**

Nama Mahasiswa : **Ni Kadek Dea Chantika Putri**

Nomor Pokok Mahasiswa : **2057031016**

Jurusan : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**



1. **Komisi Pembimbing**

Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.
NIP. 19620704-198803 1 002

Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si.
NIP. 19930601201903 2 021

2. **Ketua Jurusan Matematika**

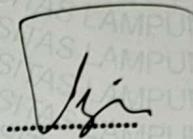
Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

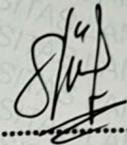
Ketua

: Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.



Sekretaris

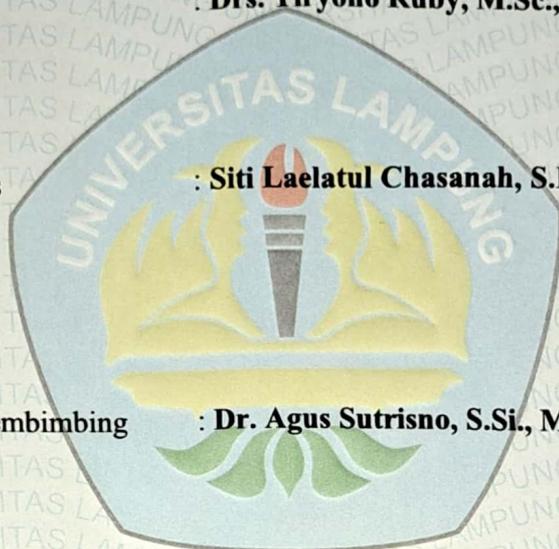
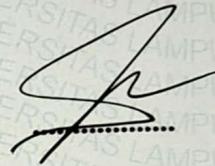
: Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si.



Penguji

Bukan Pembimbing

: Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.



**2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung**



Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 19711001 200501 1 002



Tanggal Lulus Ujian Skripsi: 18 April 2024

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **Ni Kadek Dea Chantika Putri**

Nomor Pokok Mahasiswa : **2057031016**

Jurusan : **Matematika**

Judul Skripsi : **IMPLEMENTASI PEMODELAN
MATEMATIKA LAJU ALIRAN AIR
TERHADAP PEMBANGKIT LISTRIK
TENAGA MIKRO HIDRO DENGAN
METODE BEDA HINGGA**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila di kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 18 April 2024

Penulis,



Ni Kadek Dea Chantika Putri
NPM. 2057031016

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **Ni Kadek Dea Chantika Putri**

Nomor Pokok Mahasiswa : **2057031016**

Jurusan : **Matematika**

Judul Skripsi : **IMPLEMENTASI PEMODELAN
MATEMATIKA LAJU ALIRAN AIR
TERHADAP PEMBANGKIT LISTRIK
TENAGA MIKRO HIDRO DENGAN
METODE BEDA HINGGA**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila di kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 18 April 2024
Penulis,

Ni Kadek Dea Chantika Putri
NPM. 2057031016

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Ni Kadek Dea Chantika Putri dilahirkan di Kabupaten Lampung Tengah, Provinsi Lampung pada 29 Mei 2002. Penulis merupakan anak pertama dari tiga bersaudara pasangan Bapak I Made Gustak dan Ibu Ni Nyoman Lestari.

Penulis mengawali pendidikan di Taman Kanak-kanak (TK) Fransiskus pada tahun 2007-2008. Kemudian menempuh pendidikan Sekolah Dasar (SD) di SD Negeri 2 Qurnia Mataram pada tahun 2008-2014. Kemudian melanjutkan ke Sekolah Menengah Pertama di SMPN 2 Seputih Mataram pada tahun 2014-2017. Selanjutnya belajar pada jenjang Sekolah Menengah Atas di SMAN 2 Seputih Mataram pada tahun 2017-2020.

Pada tahun 2020 penulis terdaftar sebagai mahasiswa Program Studi S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung melalui jalur seleksi mandiri masuk Perguruan Tinggi Negeri (SMMPTN). Pada tahun 2023 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Negeri Ngarip, Kecamatan Wonosobo, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat. Pada tahun yang sama penulis juga melaksanakan Kuliah Kerja Praktik (KP) di Taspen KCU Bandar Lampung sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu di dunia kerja.

KATA INSPIRASI

“Ananyas cintayanto mam, ye janah paryupasate, tesam nityabhiyuktanam, yoga ksemam vahamy aham. “

(Bhagawadgita IX.22)

Artinya

“tetapi orang yang selalu menyembah-ku dengan bhakti tanpa tujuan yang lain dan bersemadi pada bentuk rohani-ku, aku bawakan apa yang dibutuhkannya, dan ku memelihara apa yang dimilikinya. “

“ Orang hebat itu dibentuk dari kegagalan, tangisan, dan air mata. “
(Ni Kadek Dea Chantika Putri).

PERSEMBAHAN

Om awighnam astu tat astu namah svaha, rasa syukur yang melimpah kepada Ida Sang Hyang Widhi Wasa, atas karunia dan anugerah-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktu. Dengan rasa syukur dan wujud bakti saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada :

Bapak I Made Gustak dan Ibu Ni Nyoman Lestari.

Terima kasih kepada Papa, Mama, dan kedua adik tersayang yang sangat berharga dihidup saya karena telah memberikan dukungan, kasih sayang, ilmu agama, saran dalam setiap keputusan, materi yang berharga beserta kepercayaan untuk saya sehingga bisa sampai dititik saat ini. Oleh karena itu, terimalah bukti sederhana sebagai tanggung jawab saya untuk menepati janji kepada kedua orang tua sebagai rasa kasih sayang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terima kasih kepada bapak dan ibu dosen yang sangat berjasa, membantu, memberikan arahan serta waktu dan ilmu yang bermanfaat.

Sahabat dan Teman-teman Seperjuanganku

Terima kasih atas dukungan dan keceriaan yang telah diberikan.

Almamater Tercinta, Universitas Lampung

SANWACANA

Puji syukur Ida Sang Hyang Widhi Wasa atas segala kasih dan anugerah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul “Implementasi Pemodelan Matematika Laju Aliran Air Terhadap Pembangkit Listrik Tenaga Mikro Hidro Dengan Metode Beda Hingga“ yang disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika (S.Mat) pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

Dalam penyusunan skripsi ini banyak pihak yang telah membantu penulis. Oleh karena, itu penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing I yang telah bersedia membimbing, memberikan saran, motivasi, arahan, serta waktu dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si., selaku Dosen Pembimbing II yang telah banyak membantu, memberikan saran, waktu, serta arahan dalam proses penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Agus Sutrisno S.Si., M.Si., selaku Dosen Penguji atas ketersediannya menguji dan memberikan kritik serta saran yang dapat membantu dalam proses penyusunan skripsi ini.
4. Bapak Dr. Subian Saidi, S.Si., M.Si., selaku dosen Pembimbing Akademik.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika.
6. Bapak Dr. Eng Heri Satria, S.Si., M.Si., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.
7. Seluruh dosen, staff, karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.
8. Papa, Mama, dan Adik-adikku tersayang yang selalu mendoakan, mendukung dan memberi semangat selama proses penyusunan skripsi ini.

9. Putu Putra Eka Persada yang selalu memberikan waktu dan dukungan serta membantu selama proses penyusunan skripsi ini.
10. Teman-teman Matematika 2020 atas kebersamaa serta kegembiraan yang telah diberikan kepada penulis selama menempuh pendidikan di Universitas Lampung.
11. Semua pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan skripsi ini yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu.
12. Terakhir untuk Ni Kadek Dea Chantika Putri karena mampu dan yakin untuk berjuang sampai titik ini. Sudah berhasil mengendalikan diri, pikiran, batin, mental dari berbagai tekanan diluar keadaan dan tak pernah memutuskan untuk berhenti sesulit apapun proses penyusunan skripsi, ini adalah suatu pencapaian yang patut dibanggakan untuk diri sendiri.

Dalam penyusunan skripsi ini tentu saja terdapat kekurangan karena keterbatasan pengalaman, kemampuan, dan pengetahuan. Oleh karena itu, saya mengharapkan kritik serta saran dari semua pihak. Semoga apa yang penulis tulis bermanfaat dan memberikan wawasan baru bagi yang membacanya.

Bandar Lampung, 18 April 2024
Penulis,

Ni Kadek Dea Chantika Putri
NPM. 2057031016

DAFTAR ISI

	Halaman
DAFTAR GAMBAR	vii
DAFTAR TABEL	viii
I. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang dan Masalah.....	1
1.2 Tujuan Penelitian	2
1.3 Manfaat Penelitian	3
II. TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Pemodelan Matematika.....	4
2.2 Persamaan Diferensial.....	5
2.3 Persamaan Diferensial Biasa.....	5
2.4 Persamaan Diferensial Parsial.....	6
2.5 Metode Beda Hingga	7
2.6 Fluida Dinamis.....	12
2.7 Pembangkit Listrik Tenaga Mikro Hidro.....	12
III. METODOLOGI PENELITIAN	15
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian.....	15
3.2 Data Penelitian	15
3.3 Metode Penelitian	15
IV. HASIL DAN PEMBAHASAN	17
4.1 Deskripsi Data Penelitian.....	17
4.2 Perhitungan Manual dengan Metode Beda Hinga	18
4.3 Perhitungan Menggunakan <i>Software Lindo</i>	23
4.4 Perbandingan Nilai Aliran dan Laju Air	27
V. KESIMPULAN	30
5.1 Kesimpulan	30
5.2 Saran	31

DAFTAR PUSTAKA	32
LAMPIRAN.....	34

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Halaman
2.1 Diskritisasi selang ruang dan waktu.	9
2.2 Metode beda hingga pada geometri.	9
2.3 Ilustrasi laju Tc	9
2.4 Koordinat Tc	10
2.5 Garis persamaan simultan.	10
2.6 Grafik aproksimasi metode beda hingga.	11
2.7 Skema perjalanan air pada PLTMH.	13
2.8 Bagan sistem PLTMH.	14
4.1 Titik koordinat wilayah BMKG di Provinsi Lampung.	18
4.2 Ilustrasi daerah aliran dan laju air.	19
4.3 Grafik perbandingan nilai aliran air antara perhitungan manual dengan <i>Software Lindo</i>	27
4.4 Grafik laju air antara metode beda hingga dengan <i>Software Lindo</i>	28

DAFTAR TABEL

Tabel	Halaman
2.1 Bentuk-bentuk persamaan diferensial parsial	6
2.2 Rumus nilai dan laju Tc	10
2.3 Formula metode beda hingga	11
4.1 Data jumlah curah hujan 4 titik Provinsi Lampung tahun 2023.	17
4.2 Nilai aliran dan laju air dengan metode beda hingga.....	23
4.4 Aliran air dengan <i>Software Lindo</i>	24
4.5 Nilai aliran air dan laju air dengan bantuan <i>Software Lindo</i>	27

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Matematika merupakan salah satu ilmu yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan nyata. Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut, dapat dilakukan dengan membentuk suatu model matematika. Pemodelan matematika adalah salah satu ilmu untuk mempresentasikan sistem yang kompleks dalam model matematika. Pemodelan matematika merupakan suatu bidang matematika yang berusaha untuk mempresentasikan dan menjelaskan masalah dunia nyata (Widiowati & Sutimin, 2007). Salah satu penerapan dari pemodelan matematika dalam kehidupan nyata yaitu pada pembangkit listrik tenaga mikro hidro (PLTMH).

Pembangkit listrik tenaga mikro hidro adalah pembangkit listrik berskala kecil (kurang dari $200kW$) yang memanfaatkan tenaga (aliran) air sebagai sumber energi terbarukan dan layak disebut *clean energy* karena ramah lingkungan (Damastuti, 1997). Mikro hidro merupakan istilah yang digunakan untuk instalasi pembangkit listrik yang menggunakan energi air (Subandono, 2013).

Di era modern ini, kebutuhan listrik merupakan hal yang penting bagi masyarakat. Seiring berjalannya waktu, pembangkit listrik tenaga mikro hidro dapat digunakan oleh masyarakat dengan memanfaatkan aliran air. Akan tetapi, listrik yang dihasilkan pembangkit listrik tenaga mikro hidro belum optimal. Untuk mengatasi masalah tersebut perlu dilakukan analisis untuk meningkatkan laju aliran air pada pembangkit listrik tenaga mikro hidro agar listrik yang dihasilkan optimal.

Damastuti (1997) melakukan penelitian tentang pembangkit listrik tenaga mikro hidro mengenai debit aliran air dan beda ketinggian. Penelitian selanjutnya dilakukan oleh Hasan (2016) tentang penerapan metode beda hingga pada model matematika aliran banjir dari persamaan Saint Venant. Ruby (2023) mengkaji pemodelan matematika laju aliran panas pada wajan pembuatan arang aktif-13 dengan menggunakan metode beda hingga (*finite difference method*). Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui penyebaran panas yang bergerak pada wajan pembuatan arang aktif.

Subandono (2013) meneliti tentang aplikasi metode beda hingga skema eksplisit pada persamaan konduksi panas. Ilmah dkk. (2021) meneliti tentang pemodelan matematis dari sifat fisis aliran fluida pada saluran pipa menggunakan metode beda hingga 2 dimensi. Dari penelitian tersebut diperoleh hasil perubahan luas penampang saluran memengaruhi jarak antara garis terhadap kecepatan alir. Pada daerah yang sempit, jarak antara garis alir rapat sehingga kecepatan maksimum. Sedangkan, pada daerah yang meluas jarak garis alir merenggang yang menunjukkan bahwa kecepatan minimum.

Bedasarkan latar belakang tersebut, penulis tertarik untuk menganalisis laju aliran air pada pembangkit listrik tenaga mikro hidro dengan menggunakan metode beda hingga. Dengan demikian, dipilih judul penelitian “Implementasi Pemodelan Matematika Laju Aliran Air terhadap Pembangkit Listrik Tenaga Mikro Hidro dengan Metode Beda Hingga”.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk :

1. Memodelkan suatu persamaan aliran air PLTMH di Lampung.
2. Menganalisis dan menghitung aliran dan laju air PLTMH di Lampung.
3. Membandingkan hasil nilai aliran dan laju air antara perhitungan manual dengan *Software Lindo*.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dalam penelitian ini sebagai berikut :

1. Memperluas wawasan tentang pemahaman metode beda hingga terkait laju aliran air pada PLTMH.
2. Sebagai referensi bagi para peneliti yang ingin mengkaji perhitungan matematika dalam pemodelan laju aliran air pada PLTMH.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang berusaha untuk mempresentasikan dan menjelaskan masalah dunia nyata dalam pernyataan matematika (Widiowati & Sutimin, 2007). Sehingga, diperoleh pemahaman dari masalah dunia nyata menjadi lebih tepat. Model matematika dapat digunakan dalam banyak disiplin ilmu dan bidang studi yang berbeda. Pengembangan model matematika dari suatu fenomena didasarkan pada asumsi-asumsi yang ada. Menurut Cahyono (2013), terdapat tiga tahap dalam pemodelan matematika untuk menganalisis suatu fenomena yaitu:

1. Pemodelan matematika suatu fenomena atau perumusan masalah. Langkah ini untuk menerjemahkan data maupun informasi yang diperoleh tentang suatu fenomena dari masalah nyata menjadi model matematika. Data maupun informasi tentang suatu fenomena dapat diperoleh melalui eksperimen di laboratorium, pengamatan di industri ataupun dalam kehidupan sehari-hari. Dalam model matematika, suatu fenomena dapat dipelajari secara lebih terukur (kuantitatif) dalam bentuk (sistem) persamaan/pertidaksamaan matematika maupun ekspresi matematika.
2. Pencarian solusi/kesimpulan matematika. Setelah model matematika diperoleh, solusi atas model tersebut dicari dengan menggunakan metode-metode matematika yang sesuai. Solusi matematika ini sering dinyatakan dalam fungsi-fungsi matematika, angka-angka maupun grafik.
3. Interpretasi solusi/kesimpulan matematika pada fenomena yang dipelajari. Dalam matematika, solusi yang berupa fungsi, angka-angka maupun grafik tidak berarti banyak apabila solusi tersebut tidak menjelaskan permasalahan

awalnya. Oleh karena itu, interpretasi penyelesaian penting dan implikasi solusi tersebut dari mana awal fenomena masalahnya berasal.

2.2 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial biasanya digunakan untuk memahami bagaimana suatu sistem berubah terhadap waktu atau bagaimana suatu sistem merespon terhadap perubahan dalam variabel tertentu. Persamaan ini menggambarkan hubungan antara suatu fungsi dan turunannya. Bentuk umum persamaan diferensial adalah sebagai berikut :

$$\sum_{i=1}^N A_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^N B_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + Cf + D = 0. \quad (2.1)$$

dengan koefisien A_i dihitung pada titik $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$ bernilai 1, -1, atau 0. Pada persamaan (2.1), f adalah besaran yang dicari dan x_i adalah besaran bebas dengan catatan dalam persamaan (2.1) tidak terdapat suku $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ (Djoko, 2003).

Persamaan diferensial pada (2.1) terbagi menjadi tiga jenis yaitu eliptik, hiperbolik, dan parabolik. Menurut Murtafi'ah & Apriandi (2018), persamaan diferensial adalah persamaan yang menyatakan hubungan antara suatu fungsi yang tidak diketahui, dengan satu atau lebih turunan dari fungsi tersebut.

Contoh 2.1:

1. $y - x^2 + \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}$.
2. $\frac{d^2 y}{dx^2} = x - 5y + \frac{dy}{dx}$.

2.3 Persamaan Diferensial Biasa

Menurut Ross (1984), persamaan diferensial biasa (PDB) adalah suatu persamaan diferensial jika fungsi yang tidak diketahui hanya bergantung pada satu peubah/hanya melibatkan satu variabel bebas (Murtafi'ah & Apriandi, 2018).

Persamaan diferensial biasa memiliki bentuk umum yaitu :

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.2)$$

Contoh 2.2:

1. $\frac{dy}{dx} = x + 10$.
2. $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x + 5$.
3. $\frac{dy}{dx} = 4e^{-x}$.

2.4 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah persamaan diferensial yang menyangkut turunan parsial dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas (Ross, 1984). Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan dua/lebih peubah/variabel bebas dan memuat turunan parsial dari fungsi yang tak diketahui (Murtafi'ah & Apriandi, 2018). Berikut persamaan diferensial parsial :

$$a(t, x, y)U_t + b(t, x, y)U_x + c(t, x, y)U_{yy} = f(t, x, y) \quad (2.3)$$

Order dari suatu PDP adalah orde dari turunan parsial tertingginya. PDP dikatakan linear jika U dan turunan-turunan parsial nya memiliki hubungan linear. Dimensi dari suatu PDP adalah banyaknya variabel bebas parsial. Adapun bentuk dari tipe-tipe PDP sebagai berikut :

Tabel 2.1 Bentuk-bentuk persamaan diferensial parsial.

Tipe Persamaan	Bentuk Persamaan
PDP Eliptik	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$
PDP Parabolik	$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial u^2}{\partial x^2}$
PDP Hiperbolik	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(Maulidi, 2018).

Contoh 2.3:

Tentukan nilai $\frac{\partial u}{\partial x}$ dari masing-masing fungsi berikut :

1. $u = x^2 + 4t^2$

$$2. u = x^3 + 3xt^2$$

$$3. u = e^{-2t} + \cos x$$

Penyelesaian :

$$1. u = x^2 + 4t^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 4t^2) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial x}(4t^2) \\ &= 2x + 0 \\ &= 2x \end{aligned}$$

$$2. u = x^3 + 3xt^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + 3xt^2) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial x}(3t^2x) \\ &= 3x^2 + \frac{\partial}{\partial x}(3t^2x) \\ &= 3x^2 + 3t^2 \end{aligned}$$

$$3. u = e^{-2t} + \cos x$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{-2t} + \cos x) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{-2t}) + \frac{\partial}{\partial x}(\cos x) \\ &= 0 + \frac{\partial}{\partial x}(\cos x) \\ &= 0 - \sin(x) \\ &= -\sin(x) \end{aligned}$$

2.5 Metode Beda Hingga

Metode beda hingga adalah suatu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa, khususnya persamaan diferensial biasa orde pertama. Metode beda hingga memiliki banyak bentuk yaitu seperti metode Euler, metode Runge-Kutte, dan banyak lainnya, yang masing-masing mempunyai tingkat akurasi yang berbeda. Secara umum, metode beda hingga merupakan suatu pendekatan yang mudah digunakan untuk menyelesaikan masalah fisis yang memiliki bentuk geometri yang teratur, seperti interval dalam satu dimensi, domain kotak dalam dua dimensi, dan kubik dalam ruang tiga dimensi (Li, 2010).

Metode beda hingga adalah metode numerik yang umum digunakan untuk menyelesaikan persoalan teknis dan problem matematis dari suatu gejala fisis (Hasan, 2016). Prinsipnya adalah mengganti suatu turunan yang ada pada persamaan diferensial dengan diskritisasi beda hingga berdasarkan deret Taylor. Andai f dan semua turunannya $f', f'', f''', \dots, f_n$ dalam selang $[a, b]$. Misalkan $x_0 \in [a, b]$, maka nilai x di sekitar x_0 dan $x \in [a, b]$, $f(x)$ dapat diekspansi ke dalam deret Taylor :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^m}{m!} f^m(x_0) + \dots \quad (2.4)$$

Jika $x - x_0 = h$, maka $f(x)$ dapat dilihat dari persamaan sebagai berikut :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(h)^m}{m!} f^m(x_0) + \dots \quad (2.5)$$

Menurut Sinopa, dkk. (2020), jika diberikan suhu $u(x, t)$ dengan ruang x dan waktu t dibagi atau dipotong menjadi bagian-bagian berhingga (disebut *grid* atau *mesh*). Dalam metode beda hingga, hal tersebut dinamakan diskritisasi. Apabila ruang x pada interval $0 \leq x \leq \pi$ dibagi menjadi sejumlah titik-titik terpisah selang ukur Δx yang sama. Nilai titiknya adalah :

$$x_0 = 0, x_1 = \Delta x, x_2 = 2\Delta x, \dots, x_m = \pi \quad (2.5)$$

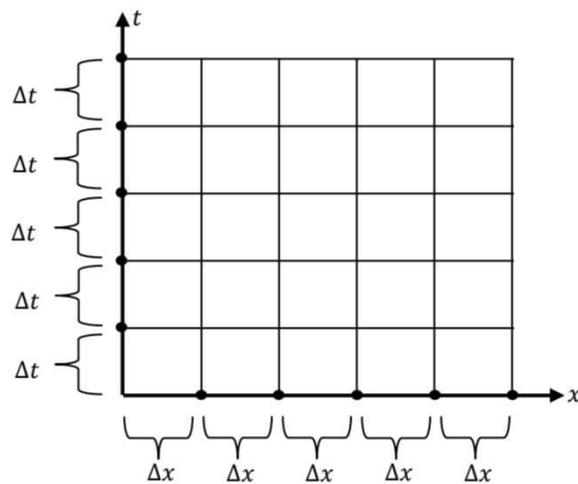
Atau secara umum ditulis :

$$x_j = j\Delta x, j = 0, 1, 2, \dots, M \quad (2.7)$$

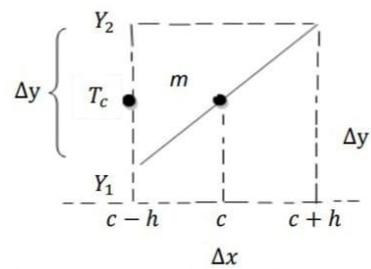
Jika N adalah jumlah total dari selang ukur Δt pada langkah waktu yang membagi $0 \leq t \leq T$, diperoleh :

$$\Delta t = \frac{T}{N} \quad (2.8)$$

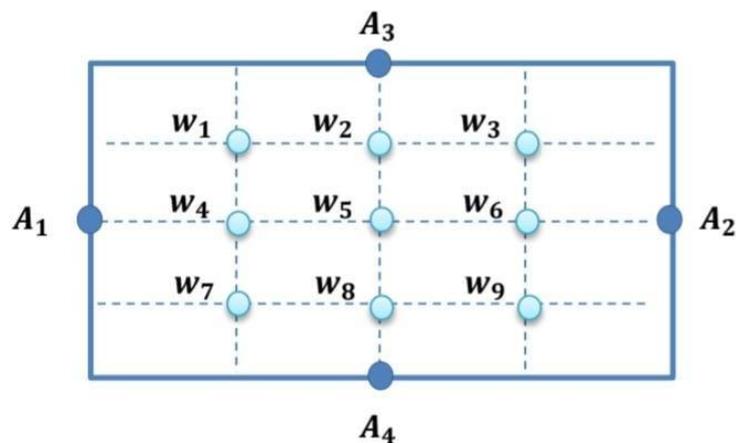
Diskritisasi suhu $u(x, t)$ di sepanjang interval ruang x dan waktu t dapat dilihat pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Diskritisasi selang ruang dan waktu.



Gambar 2.2 Metode beda hingga pada geometri.



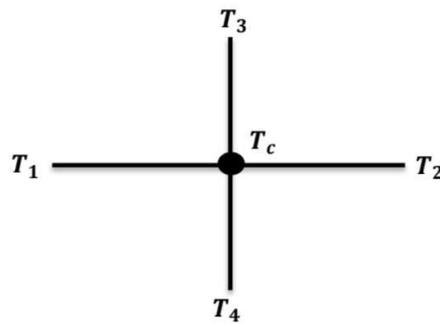
Gambar 2.3 Ilustrasi laju T_c .

Titik tengah garis yang dilambangkan dengan m dan didapat persamaan yakni:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{2h} \quad (2.9)$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 \quad (2.10)$$

dengan m adalah gradien.

Gambar 2.4 Koordinat T_c .

Pada Gambar 2.3 diambil garis horizontal yaitu sisi kanan dan sisi kiri sedangkan pada garis vertikal yaitu sisi atas dan sisi bawah maka akan didapatkan garis koordinat T_c pada Gambar 2.4.

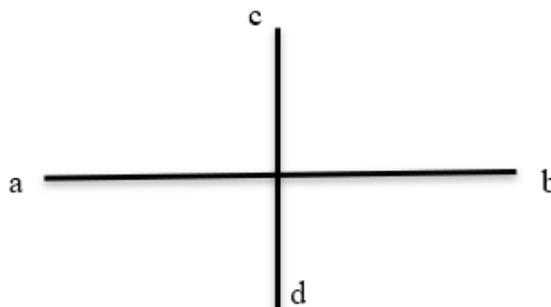
Tabel 2.2 Rumus nilai dan laju T_c .

	Nilai	Laju
Horizontal	$T_c = \frac{T_1 + T_2}{2}$	$\partial T_c = \frac{T_1 - T_2}{2}$
Vertikal	$T_c = \frac{T_3 + T_4}{2}$	$\partial T_c = \frac{T_3 - T_4}{2}$

Persamaan simultan nilai T_c :

$$T_c = \frac{T_2 + T_3 + T_4 + T_1}{4} \quad (2.11)$$

Setelah mendapatkan nilai T_c , maka akan dibentuk suatu garis persamaan simultan yaitu sebagai berikut :

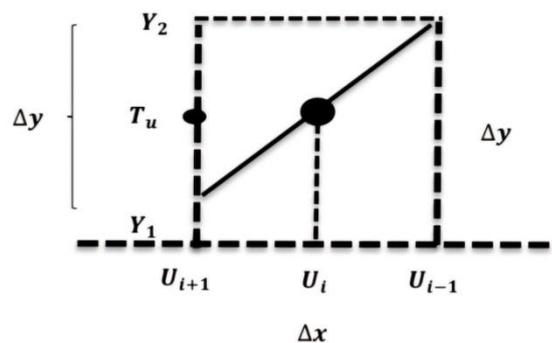


Gambar 2.5 Garis persamaan simultan.

Persamaan simultan yang diperoleh dari persamaan simultan pada Gambar 2.5 adalah :

$$\begin{aligned}
 T_{c1} &= \frac{a + b + c + d}{4} \\
 4T_{c1} &= a + b + c + d \\
 a + b + c + d - 4T_{c1} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Grafik aproksimasi metode beda hingga dengan 3 tipe turunan parsial yaitu beda maju, beda mundur, dan beda pusat ditunjukkan pada Gambar 2.6.



Gambar 2.6 Grafik aproksimasi metode beda hingga

Menurut Maulidi (2018), terdapat beberapa formula metode beda hingga yang akan ditunjukkan pada Tabel 2.3.

Tabel 2.3 Formula metode beda hingga.

Turunan Parsial	Aproksimasi Beda Hingga	Tipe
$\frac{\partial U}{\partial x} = U_x$	$\frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{\Delta x}$	Beda Maju
$\frac{\partial U}{\partial x} = U_x$	$\frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{\Delta x}$	Beda Mundur
$\frac{\partial U}{\partial x} = U_x$	$\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x}$	Beda Pusat

2.6 Fluida Dinamis

Berikut ini merupakan definisi fluida dinamis dari Setiawan (2015). Fluida dinamis adalah fluida (bisa berupa zat cair, gas) yang bergerak.

Untuk memudahkan dalam mempelajari, fluida disini dianggap mempunyai kecepatan yang konstan terhadap waktu, tak termampatkan (tidak mengalami perubahan volume), tidak kenal, tidak turbulen (tidak mengalami putaran-putaran). Aliran fluida sering dinyatakan dalam debit. Debit adalah banyaknya volume zat cair yang mengalir pada tiap satu satuan waktu, biasanya dinyatakan dalam satuan liter/detik atau dalam satuan meter kubik (m^3) per detik.

$$Q = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (2.13)$$

Keterangan :

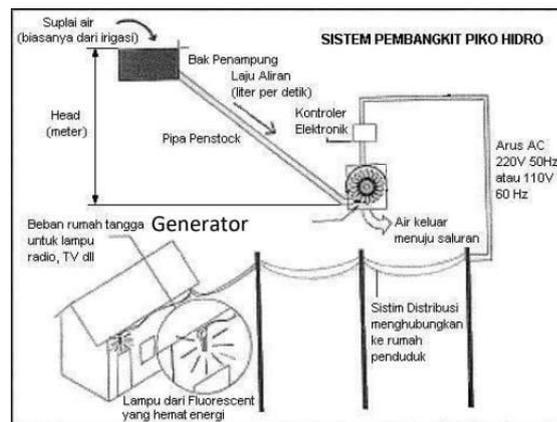
Q = debit aliran (m^3/s).

v = volume (m^3).

t = selang waktu (s).

2.7 Pembangkit Listrik Tenaga Mikro Hidro

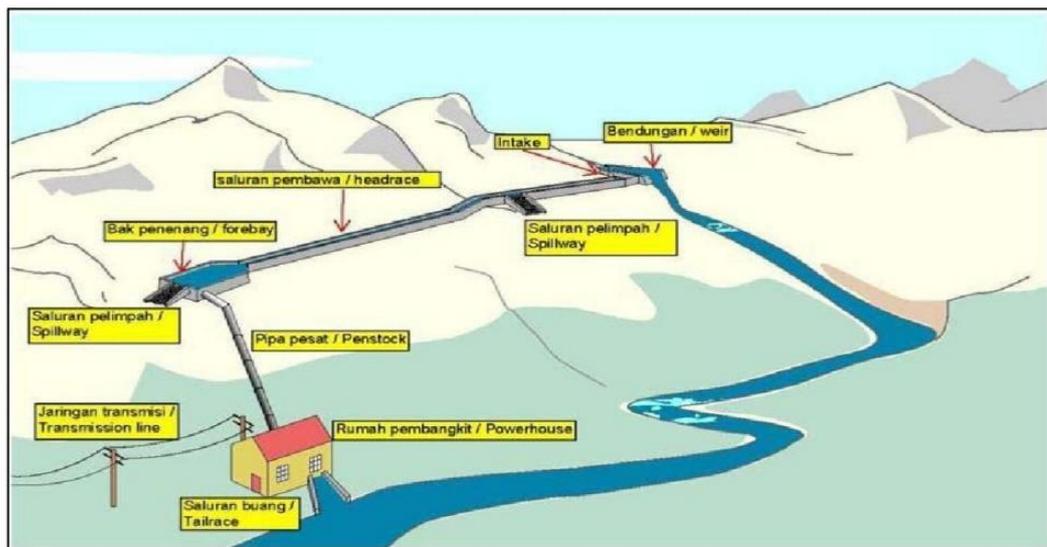
Pembangkit listrik tenaga mikro hidro (PLTMH) adalah pembangkit listrik berskala kecil (kurang dari 200 kW), yang memanfaatkan tenaga (aliran) air sebagai sumber penghasil energi (Damastuti, 1997). Mikro hidro merupakan suatu istilah yang digunakan untuk instalasi pembangkit listrik yang menggunakan energi air. Kondisi air yang bisa dimanfaatkan sebagai sumber daya (*resources*) penghasil listrik yang memiliki kapasitas aliran dan ketinggian tertentu dan instalasi. Semakin besar kapasitas aliran maupun ketinggiannya dari instalasi maka semakin besar energi yang bisa dimanfaatkan untuk menghasilkan energi listrik (Subandono, 2013). Proses perjalanan air menjadi tenaga listrik dapat dilihat pada Gambar 2.7 (Maher & Smith, 2001).



Gambar 2.7 Skema perjalanan air pada PLTMH.

Prinsip kerja PLTMH adalah memanfaatkan beda tinggi dan jumlah air per detik yang ada pada aliran sungai. Air yang mengalir melalui *intake* dan diteruskan oleh saluran pembawa dan *penstock*, akan memutar poros turbin sehingga menghasilkan energi (Hanggara & Irvani, 2017).

Pada prinsipnya pembangkit listrik tenaga air adalah suatu bentuk perubahan tenaga air dengan ketinggian dan debit air tertentu menjadi tenaga listrik dengan menggunakan turbin air dan generator. Daya teoritis (Munandar & Kuwara, 1991). Pembangkit listrik tenaga mikro hidro pada dasarnya memanfaatkan energi potensial air. Semakin tinggi jatuhnya maka semakin besar energi potensial yang dapat diubah menjadi energi listrik (Subandono, 2013). Menurut Damastuti (1997), pembangunan PLTMH perlu diawali dengan pembangunan bendungan untuk mengatur aliran air yang akan dimanfaatkan sebagai tenaga penggerak PLTMH.



Gambar 2.8 Bagan sistem PLTMH.

Bagan sistem pada PLTMH dapat dilihat pada Gambar 2.8, terdapat bendungan yang mengalir melewati rumah pembangkit atau *powerhouse* menuju bak penampung melalui *penstock* (Hanggara & Irvani, 2017). Lalu air yang mengalir melalui *intake* dan diteruskan oleh saluran pembawa dan *penstock*, kemudian akan memutar poros turbin sehingga menghasilkan energi.

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung, pada Semester Ganjil tahun akademik 2023/2024 dengan melakukan penelitian secara studi pustaka dan pengamatan di lapangan.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data curah hujan pada 4 cabang BMKG yaitu Klimatologi Lampung di Pesawaran, Stasiun Geofisika Lampung Utara di Lampung Utara, Stasiun Meteorologi Raden Inten II di Lampung Selatan, dan Stasiun Meteorologi Maritim Panjang di Bandar Lampung yang diperoleh melalui *website* resmi https://dataonline.bmkg.go.id/data_iklim.

3.3 Metode Penelitian

Langkah pertama menentukan debit air dengan metode beda hingga kemudian data debit air tersebut akan dimodelkan dalam persamaan matematika :

1. Studi pustaka yaitu mempelajari buku-buku teks yang terdapat di perpustakaan jurusan matematika dan juga jurnal-jurnal yang dapat menunjang proses penelitian ini.
2. Pengambilan data sekunder berupa data curah hujan pada *website* BMKG.
3. Menetapkan 4 titik koordinat wilayah sebagai acuan.

4. Menghitung jumlah curah hujan tahun 2023 pada 4 koordinat wilayah acuan.
5. Menghitung aliran dan laju air secara manual dengan metode beda hingga.
6. Membentuk persamaan simultan berdasarkan 4 titik koordinat wilayah acuan yaitu $A_1 - A_4$ dan 9 daerah aliran dan laju air yaitu $w_1 - w_9$.
7. Menganalisis persamaan simultan dengan bantuan *Software Lindo* untuk menghasilkan nilai aliran air.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Bedasarkan hasil dan pembahasan diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Model persamaan aliran air PLTMH di Provinsi Lampung yaitu:

$$4w_1 = w_2 + w_4 + 3335,7$$

$$4w_2 = w_1 + w_3 + w_5 + 1754,6$$

$$4w_3 = w_2 + w_6 + 3387,4$$

$$4w_4 = w_1 + w_5 + w_7 + 1581,1$$

$$4w_5 = w_2 + w_4 + w_6 + w_8$$

$$4w_6 = w_3 + w_5 + w_9 + 1632,8$$

$$4w_7 = w_4 + w_8 + 2740,7$$

$$4w_8 = w_5 + w_7 + w_9 + 1159,6$$

$$4w_9 = w_6 + w_8 + 2792,4$$

2. Nilai aliran dan laju air pada PLTMH di 8 daerah pada 4 titik kabupaten/kota Provinsi Lampung dengan menggunakan perhitungan manual yaitu daerah $w_1 = 1532,025$ dan $\partial w_1 = 161,675$, daerah $w_2 = 1519,756$ dan $\partial w_2 = 516,531$, daerah $w_3 = 1516,689$ dan $\partial w_3 = 427,817$, daerah $w_4 = 1476,381$ dan $\partial w_4 = 262,406$, daerah $w_5 = 1447,134$ dan $\partial w_5 = 503,365$, daerah $w_6 = 1439,055$ dan $\partial w_6 = 465,304$, daerah $w_7 = 1462,470$ dan $\partial w_7 = 237,223$, daerah $w_8 = 1425,501$ dan $\partial w_8 = 512,952$, daerah $w_9 = 1414,238$ dan $\partial w_9 = 453,536$.
3. Dari hasil perbandingan nilai aliran dan laju air daerah $w_1 - w_9$ terjadi perbedaan yang signifikan antara perhitungan manual dengan menggunakan *Software Lindo*. Nilai aliran yang dihasilkan oleh *Software Lindo* lebih tinggi dipengaruhi oleh persamaan simultan yg dibentuk berdasarkan 4 titik koordinat wilayah.

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan menggunakan data primer atau data hasil observasi pengamatan aliran air PLTMH agar dapat mengetahui nilai terbaik antara perhitungan manual dengan menggunakan *Software Lindo*.

DAFTAR PUSTAKA

- BMKG. 2015. *Akses_data*. Diakses pada 12 20, 2024, dari dataonline.bmkg.go.id:
https://dataonline.bmkg.go.id/data_iklim
- Cahyono. 2013. *Pemodelan Matematika*. Bandung: Graha Ilmu.
- Damastuti, A. P. 1997. Pembangkit Listrik Tenaga Mikro Hidro. *Teknologi*, 8(1): 11-12.
- Djoko, L. 2003. *Model Matematika*. Yogyakarta: Jurusan Teknik Sipil UGM.
- Hanggara, I., & Ivani, H. 2017. Potensi PLTMH (Pembangkit Listrik Tenaga Mikro Hidro) di Kecamatan Ngantang kabupaten Malang Jawa Timur. *Journal Reka Buana*, 2(2) : 149-151.
- Hasan. 2016. Penerapan Metode beda Hingga pada Model Matematika Aliran Banjir dari Persamaan Saint Venant. *Zeta - Math Journal*, ISSN :2459 - 9948. 2(1): 6-7.
- Ilmah, A. M., Syarifuddin, A., & Abdullah, M. 2021. Pemodelan Matematis dari Sifat Fisis Aliran Fluida pada Saluran Pipa Menggunakan Metode Beda hingga 2 Dimensi. *Journal Inovtek Polbeng*, ISSN : 2088-6225. 11(2) : 146.
- Li, Z. 2010. *Finite Difference method Basics*. California : Scient computation and Departement of Mathematics North California State University.
- Maher, & Smith. 2001. *Pico Hydro for Village Power*. A Pratical Manual for Schemeses Up To, 5.

- Maulidi, I. 2018. *Metode Beda Hingga Untuk Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial*. Aceh : Jurusan Matematika Universitas Syiah Kuala.
- Munandar Aris, A, DR, & Kuwara, S, DR. 1991. *Buku Pegangan Teknik Tenaga Listrik Jilid III*. Jakarta: Pradya Paramita.
- Murtafi'ah, W., & Apriandi, D. 2018. *Persaman Diferensial Parsial dan Aplikasinya*. Jawa Timur: UNIPMA Press.
- Ross, S. L. 1984. *Differential Equations*. New York: Wiley.
- Ruby, T. 2023. Pemodelan Matematika Laju Aliran Panas Pada Wajan Pembuatan Arang Aktif-13 Dengan Menggunakan Metode Beda Hingga (Finite Difference Method). *Journal of Innovation Research and Knowledge*, 3(1).
- Setiawan, T. 2015. *Fluida Dinamis*. Yudistira : Jakarta.
- Sinopa, L, C, K, V., Noviani, E., Rizki, S, W. 2020. Hampiran Solusi Persamaan Panas Dimensi Satu dengan Metode Beda Hingga Crank-Nicolson. *Buletin Ilmiah Mat.Stat. dan Terapannya (Bimaster)*, 9(1):195-204.
- Siregar, A. D, et al. 2023. Potensi Sumber Daya Air Sebagai Pembangkit Listrik Tenaga Mikrohidro (PLTMH) dalam Mencapai *Sustainable Development Goals* (SDGS) di Desa Rantau Kermas, Kecamatan Jangkat, Kabupaten Merangin, Provinsi Jambi. *Journal Online Of Physics*, 9 (1) : 80-84.
- Subandono, A. 2013. Pembangkit Listrik Tenaga Mikro Hidro (PLTMH). *J. Rekayasa Elektr*, 10(4) : 1-3.
- Widiowati & Sutimin. 2007. *Buku Ajar Pemodelan Matematika*. Semarang: Universitas Diponegoro.