PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN *FULLY FUZZY* DAN *DUAL FULLY FUZZY* NON LINEAR DENGAN MENGGUNAKAN ALGORITMA OPTIMASI *CHAOS* DAN METODE NEWTON RAPHSON GANDA

(Skripsi)

Oleh

RAFIQ ARSSY ARIFA
NPM 2017031056

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
2024

ABSTRACT

SOLVING FULLY FUZZY AND DUAL FULLY FUZZY NON LINEAR EQUATION SYSTEMS USING CHAOS OPTIMIZATION ALGORITHM AND DOUBLE NEWTON RAPHSON METHOD

By

RAFIQ ARSSY ARIFA

Fully fuzzy and dual fully fuzzy non linear equation systems are sets of non linear equations where all parameters are fuzzy numbers. Non linear equation systems are inherently difficult to solve analytically, making numerical methods one of the viable alternatives for their solution. In this research, a combination of the Chaos Optimization Algorithm and the Double Newton Raphson method is used to solve fully fuzzy and dual fully fuzzy non linear equation systems. The solution from the Chaos Optimization Algorithm is used as the initial value in the Double Newton-Raphson method. As an illustration, several case studies from previous research related to fully fuzzy and dual fully fuzzy non linear systems using triangular and trapezoidal fuzzy numbers, solved with the proposed method, are presented. The research results show that this combined method is effective in solving fully fuzzy and dual fully fuzzy non linear equation systems. The numerical solutions obtained are close to the exact solutions, have small errors, require fewer iterations, and have fast computation times.

Keywords: fully fuzzy and dual fully fuzzy nonlinear equation system, chaos optimization algorithm, double newton raphson method.

ABSTRAK

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN *FULLY FUZZY* DAN *DUAL FULLY FUZZY* NON LINEAR DENGAN MENGGUNAKAN ALGORITMA OPTIMASI *CHAOS* DAN METODE NEWTON RAPHSON GANDA

Oleh

RAFIQ ARSSY ARIFA

Sistem persamaan *fully fuzzy* dan *dual fully fuzzy* non linear adalah kumpulan persamaan non linear dengan semua parameternya berupa bilangan *fuzzy*. Sistem persamaan non linear pada dasarnya sulit untuk diselesaikan secara analitik, sehingga metode numerik menjadi salah satu alternatif untuk menyelesaikannya. Pada penelitian ini dilakukan penggabungan antara Algoritma Optimasi *Chaos* dan metode Newton Raphson Ganda untuk menyelesaikan sistem persamaan *fully fuzzy* dan *dual fully fuzzy* non linear. Solusi dari Algoritma Optimasi *Chaos* dijadikan sebagai nilai awal pada metode Newton Raphson Ganda. Sebagai ilustrasi, disajikan beberapa contoh kasus dari penelitian terdahulu terkait dengan sistem persamaan *fully fuzzy* dan *dual fully fuzzy* non linear menggunakan bilangan *fuzzy* segitiga dan bilangan *fuzzy* trapesium yang diselesaikan dengan metode yang diajukan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa gabungan metode ini efektif untuk menyelesaikan sistem persamaan *fully fuzzy* dan *dual fully fuzzy* non linear. Solusi numerik yang dihasilkan mendekati solusi eksak, memiliki galat yang kecil, jumlah iterasi yang lebih sedikit dan waktu komputasi yang cepat.

Kata kunci : sistem persamaan *fully fuzzy* dan *dual fully fuzzy* non linear, algoritma optimasi *chaos*, metode newton raphson ganda.

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN *FULLY FUZZY* DAN *DUAL FULLY FUZZY* NON LINEAR DENGAN MENGGUNAKAN ALGORITMA OPTIMASI *CHAOS* DAN METODE NEWTON RAPHSON GANDA

Oleh

RAFIQ ARSSY ARIFA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
2024

Judul Skripsi : **PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN *FULLY FUZZY* DAN *DUAL FULLY FUZZY* NON LINEAR DENGAN MENGGUNAKAN ALGORITMA OPTIMASI *CHAOS* DAN METODE NEWTON RAPHSON GANDA**

Nama Mahasiswa : ***Rafiq Arssy Arifa***

Nomor Pokok Mahasiswa : **2017031056**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 19740316 2005011001

Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si.
NIP. 199306012019032001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.**	....
Sekretaris	: **Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **11 Juli 2024**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama	: **Rafiq Arssy Arifa**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **2017031056**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **Penyelesaian Sistem Persamaan *Fully Fuzzy* dan *Dual Fully Fuzzy* Non Linear dengan Menggunakan Algoritma Optimasi *Chaos* dan Metode Newton Raphson Ganda**

Dengan ini menyatakn bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 18 Juli 2024

Penulis

Rafiq Arssy Arifa

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Rafiq Arssy Arifa, lahir di Bandar Lampung pada tanggal 29 September 2002. Penulis merupakan anak kedua dari pasangan Bapak Bukhori dan Ibu Eva Yani, S.Pd.

Penulis menyelesaikan pendidikan di TK Handayani pada tahun 2008. Kemudian menempuh pendidikan dasar di SD Negeri 2 Gedong Air pada tahun 2008-2014, dan melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 23 Bandar Lampung pada tahun 2014-2017. Kemudian, penulis melanjutkan tingkat menengah atas di MAN 2 Bandar Lampung pada tahun 2017-2020.

Pada tahun 2020, penulis terdaftar sebagai mahasiswa S1 Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SBMPTN. Selama menjadi mahasiswa, penulis bergabung di UKM Penelitian Universitas Lampung sebagai Anggota Departemen Informasi dan Komunikasi tahun 2021.

Pada awal tahun 2023, penulis menjalani kerja praktik (KP) di Kantor Wilayah Lampung AJB Bumiputera 1912. Selanjutnya, pada tahun yang sama mengikuti program MBKM, yaitu Magang dan Studi Independen Bersertifikat (MSIB) Batch 4 di PT Revolusi Cita Edukasi. Selanjutnya, penulis kembali mengikuti program Magang dan Studi Independen Bersertifikat (MSIB) Batch 5 di PT Sumber Alfaria Trijaya Tbk untuk posisi *Logistic Performance*.

KATA INSPIRASI

“Dan bersabarlah, karena sesungguhnya Allah tidak menyia-nyiakan pahala orang yang berbuat kebaikan”

(Q.S. Al Hud Ayat 115)

“Ketika engkau meyakini bahwa setelah kesengsaraan adalah sebuah kebahagiaan dan setelah air mata yang mengalir adalah senyuman, maka sesungguhnya engkau telah melaksanakan ibadah yang amat agung, yakni berprasangka baik kepada Allah SWT”

(Al Habib Umar bin Hafidz)

“Apapun yang menjadi takdirmu pasti akan mencari jalannya sendiri untuk menemukanmu”

(Ali bin Abi Thalib)

“*I know these will all be stories someday, and our pictures will become old photographs*”

(*The Perks of Being a Wallflower*)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirabbil'alamin,
Dengan kerendahan hari dan rasa syukur kepada Allah SWT
Kupersembahkan skripsi ini kepada :

Orang tua tercinta, Papa dan Mama yang telah memberikan doa, dukungan, dan kasih sayang tanpa henti. Kerja keras dan pengorbanan kalian yang membuat penulis menjadi kuat dan bersemangat untuk menyelesaikan tanggung jawab ini. Terima kasih juga kepada abang dan adik yang senantiasa memberikan semangat dan kasih sayang.

Diri sendiri yang telah kuat dan berjuang menghadapi setiap rintangan sehingga mampu menyelesaikan perjalanan skripsi ini.

Dosen pembimbing dan pembahas yang dengan ikhlas telah memberikan ilmu, bimbingan, doa, dan pengalaman yang berharga kepada penulis.

Sahabat-sahabat yang tak kenal lelah dalam memberikan dukungan, pertolongan, dan semangat. Kalian adalah bagian tak terpisahkan dari perjalanan ini.

Almamater Universitas Lampung.

SANWACANA

Dengan mengucapkan *Alhamdulillah*, atas kehadiran Allah SWT berkat rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Penyelesaian Sistem Persamaan *Fully Fuzzy* dan *Dual Fully Fuzzy* Non Linear dengan Menggunakan Algoritma Optimasi *Chaos* dan Metode Newton Raphson Ganda". Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika (S.Mat) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Dalam penyusunan skripsi ini penulis banyak mendapatkan bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Dengan ketulusan hati penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan arahan, bimbingan, saran hingga dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si. selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan, dan masukan selama penyusunan skripsi.
3. Bapak Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc. selaku dosen pembahas yang telah bersedia menguji, mengevaluasi, memberikan kritik, dan saran yang membangun selama penyelesaian skripsi ini.
4. Ibu Dr. Dian Kurniasari, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan bimbingan selama menjalani perkuliahan.
5. Bapak Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si. selaku dekan FMIPA Universitas Lampung.

6. Seluruh dosen, staf, dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Papa, mama, abang, dan adik yang selalu mendoakan, mendukung, dan memberikan kasih sayang serta pengorbanan sehingga memberikan kekuatan kepada penulis untuk dapat menyelesaikan skripsi ini.
8. Alfara, Amanda, Aulia, Farid, Icha dan Rilla yang telah menjadi penyemangat dan banyak memberikan dukungan kepada penulis.
9. Asti, Rizka, Tama dan Ridho yang telah banyak membantu dan memberikan dukukan kepada penulis mulai dari awal perkuliahan hingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
10. *Team* 5 *section* Nusantara RevoU, teman-teman magang di Alfamart Branch Palembang, teman-teman Kerja Praktik serta teman-teman KKN MBKM yang telah menjadi bagian dari cerita perjalanan ini.
11. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2020.
12. Seluruh pihak yang telah berperan dalam penyelesaian skripsi ini yang tidak bisa disebutkan satu per satu.

Bandar Lampung, 18 Juli 2024

Rafiq Arssy Arifa

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matematika sebagai ilmu pengetahuan yang dibutuhkan untuk menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari, telah mengalami kemajuan pesat seiring dengan perkembangan teknologi. Salah satu cara untuk memecahkan permasalahan tersebut yaitu dengan merepresentasikannya ke dalam suatu persamaan non linear. Menurut Pratikno, dkk. (2015), persamaan non linear adalah suatu persamaan yang pangkat variabelnya lebih dari satu atau terdapat suku-suku yang merupakan hasil perkalian dari dua atau lebih variabel.

Sistem persamaan non linear adalah kumpulan dari persamaan non linear. Sistem persamaan non linear dapat diselesaikan dengan berbagai metode numerik, salah satunya yaitu dengan mencari nilai akar-akar persamaan non linear. Akar dari persamaan $f(x) = 0$ merupakan nilai-nilai x yang menyebabkan nilai $f(x)$ sama dengan 0 (Rosidi, 2019).

Salah satu masalah yang sering dihadapi pada persamaan non linear adalah ketidakpastian dalam pengambilan keputusan. Oleh karena itu, diperlukan konsep logika *fuzzy* untuk menyelesaikan permasalahan tersebut. Logika *fuzzy* adalah suatu jenis teori himpunan logika yang dikembangkan dari logika *Boolean*. Jika pada logika *Boolean* menyatakan bahwa segala sesuatu hanya dapat dinyatakan dalam dua nilai yaitu 0 atau 1, pada logika *fuzzy* memungkinkan nilai keanggotaannya rentang antara 0 sampai 1 (Ravita & Alisah, 2012). Permasalahan persamaan non linear dengan logika *fuzzy* dapat dikembangkan menjadi *fully fuzzy* non linear dan selanjutnya diperluas menjadi *dual fully fuzzy* non linear. Sistem persamaan *fully* *fuzzy* dan *dual fully fuzzy* non linear tersebut akan diimplementasikan dalam suatu operasi aritmatika bilangan *fuzzy*.

Terdapat beberapa penelitian yang telah mengkaji mengenai penyelesaian sistem persamaan *fully fuzzy* dan *dual fully fuzzy* non linear. Megarani, dkk. (2020), menyusun suatu algoritma dengan menggunakan metode modifikasi Newton Raphson dalam menyelesaikan persamaan *fuzzy* non linear. Marzuki & Herawati (2015), memperkenalkan metode iterasi Jacobi untuk menyelesaikan sistem persamaan *fully fuzzy* linear. Sari, dkk. (2022), menggunakan algoritma metaheuristik untuk menyelesaikan sistem persamaan *fully fuzzy* linear.

Pada tahun 2007, Dehghan, dkk. menggunakan teknik iteratif untuk mendapatkan solusi sistem persamaan *fully fuzzy* linear. Mosleh, dkk. (2009), menyelesaikan suatu sistem persamaan *fully fuzzy* linear dengan menggunakan metode dekomposisi. Selain itu, pada penelitian Kumar, dkk. (2010), penyelesaian sistem persamaan *fully fuzzy* linear bilangan *fuzzy* trapezoidal dilakukan dengan mereduksi eselon baris.

Pada kasus sistem persamaan *fully fuzzy* non linear terdapat beberapa penelitian yang telah dilakukan sebelumnya. Pada tahun 2017, Loganathan & Lalitha menyelesaikan sistem persamaan *fully fuzzy* non linear dengan menggunakan batasan ketidaksamaan (*inequality constraints*). Sebaliknya, Jafarian & Jafari (2019) memanfaatkan sistem non linear dengan batasan kesetaraan (*equality constraints*). Pada tahun 2023, Zakaria, Anisa, dan Aziz menyelesaikan sistem persamaan *fully fuzzy* non linear dengan menggunakan metode Newton Raphson Ganda.

Pada kasus *dual fuzzy* non linear, terdapat beberapa penelitian yang telah dilakukan sebelumnya. Pada tahun 2005, Kajani, dkk., dalam penelitiannya menyelesaikan persamaan *dual fuzzy* non linear dengan menggunakan metode iterasi. Selanjutnya, pada tahun 2012, Waziri & Majid dalam penelitiannya memanfaatkan metode Broyden dan Newton dalam menyelesaikan persamaan dual *fuzzy* non linear.

Beberapa penelitian mengenai penyelesaian sistem persamaan *dual fully fuzzy* linear yaitu dengan menggunakan metode dekomposisi QR (Gemawati, dkk., 2018), faktorisasi koefisien matriks (Marni, dkk., 2018) dan mengidentifikasi solusi maksimum dan minimum (Hooshangian & Hashemzehi, 2013). Untuk menyelesaikan sistem persamaan *dual fully fuzzy* non linear matriks, Zakaria, dkk (2023) menggunakan metode Broyden.

Metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan *fully fuzzy* dan *dual fully fuzzy* non linear, diantaranya adalah dengan menggunakan Algoritma Optimasi *Chaos* dan metode Newton Raphson Ganda. Algoritma Optimasi *Chaos* memanfaatkan persamaan logistik yang sensitif terhadap kondisi awal, sehingga pergerakan *chaos* dapat berubah secara dinamis dalam setiap keadaan, sesuai dengan skala yang telah ditentukan (Luo, dkk., 2008). Sedangkan, metode Newton Raphson Ganda digunakan untuk mencari akar-akar dari suatu persamaan non linear dengan orde konvergensi empat (Devitriani, dkk., 2019). Dalam menerapkan metode Newton Raphson Ganda memerlukan penaksiran nilai awal yang baik. Dengan menggunakan nilai awal dari solusi Algoritma Optimasi *Chaos*, diharapkan dapat meningkatkan konvergensi metode Newton Raphson Ganda.

Berdasarkan latar belakang tersebut, penulis tertarik untuk melakukan penelitian terkait dengan penyelesaian persamaan *fully fuzzy* dan *dual fully fuzzy* non linear dengan menggabungkan Algoritma Optimasi *Chaos* dan metode Newton Raphson Ganda. Kombinasi ini diharapkan dapat memberikan pendekatan yang lebih efisien dan akurat dalam menyelesaikan sistem persamaan *fully fuzzy* dan *dual fully fuzzy* non linear.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk menyelesaikan sistem persamaan *fully fuzzy* dan *dual fully fuzzy* non linear dengan menggabungkan Algoritma Optimasi *Chaos* dan metode Newton Raphson Ganda.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mengetahui kelayakan gabungan antara Algoritma Optimasi *Chaos* dan metode Newton Raphson Ganda dalam menemukan solusi sistem persamaan *fully fuzzy* dan *dual fully fuzzy* non linear.
2. Menjadi referensi penelitian selanjutnya dalam menyelesaikan masalah sistem persamaan *fully fuzzy* dan *dual fully fuzzy* non linear menggunakan metode numerik.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Himpunan *Fuzzy*

Himpunan adalah kumpulan objek-objek yang berbeda dan dapat didefinisikan secara jelas. Objek-objek ini disebut dengan elemen atau anggota dari himpunan (Marsudi, 2010). Jika X adalah sebuah himpunan dan x adalah anggota dari X, maka dapat ditulis $x \in X$. Sebaliknya, jika x bukan anggota dari himpunan X maka $x \notin X$. Suatu nilai yang menunjukkan seberapa besar tingkat keanggotaan dari suatu elemen x dalam suatu himpunan X biasa disebut dengan nilai keanggotaan ($\mu_X(x)$).

Definisi 2.1 (Klir & Yuan, 1995)
Misalkan X adalah himpunan semesta dan $A \subseteq X$. Maka,

$$\mu_A(x) : X \to \{0,1\}$$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

untuk setiap $x \in X$, disebut dengan fungsi karakteristik dari himpunan A.

Berdasarkan Definisi 2.1, pada himpunan *fuzzy*, fungsi karakteristik diperluas sehingga nilai yang dipasangkan untuk unsur-unsur dalam semesta tidak hanya 0 dan 1 saja. Adapun nilai keanggotaannya akan mencakup dari keseluruhan nilai dalam interval [0,1] yang menyatakan keanggotaan suatu unsur pada himpunan. Fungsi karakteristik ini disebut fungsi keanggotaan dan himpunan yang didefinisikan dengan fungsi karakteristik ini disebut himpunan *fuzzy*. Fungsi keanggotaan himpunan *fuzzy* A pada himpunan semesta X dinotasikan dengan μ_A, yaitu :

$$\mu_A : X \to [0,1] \tag{2.1}$$

2.2 Fungsi Keanggotaan

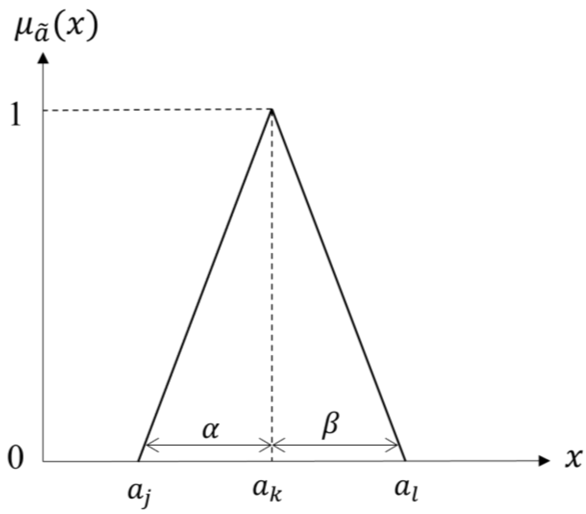
Fungsi keanggotaan (*membership function*) merupakan suatu kurva yang menggambarkan pemetaan titik-titik data *input* ke dalam nilai keanggotaannya atau derajat keanggotannya dalam rentang antara 0 sampai 1 (Wardhani & Haerani, 2011). Salah satu cara yang dapat digunakan untuk mendapatkan nilai keanggotaan ini adalah melalui pendekatan fungsi. Pendekatan fungsi ini memasangkan setiap anggota himpunan dengan tepat suatu derajat keanggotaan. Terdapat beberapa jenis fungsi keanggotaan yang sering digunakan, yaitu fungsi keanggotaan pada bilangan *fuzzy* segitiga dan bilangan *fuzzy* trapesium.

2.2.1 Fungsi Keanggotaan Bilangan *Fuzzy* Segitiga

Definisi 2.2 (Jafarian & Jafari, 2019)
Bilangan *fuzzy* $\tilde{a} = (m-\alpha, m, m+\beta) = (a_j, a_k, a_l)$ disebut bilangan *fuzzy* segitiga, jika fungsi keanggotaannya sebagai berikut.

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-m}{\alpha} + 1, & m-\alpha \leq x \leq m \\ \dfrac{m-x}{\beta} + 1, & m \leq x \leq m+\beta \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases} \tag{2.2}$$

Adapun grafik fungsi keanggotaan $\mu(x)$ disajikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Grafik fungsi keanggotaan bilangan *fuzzy* segitiga.

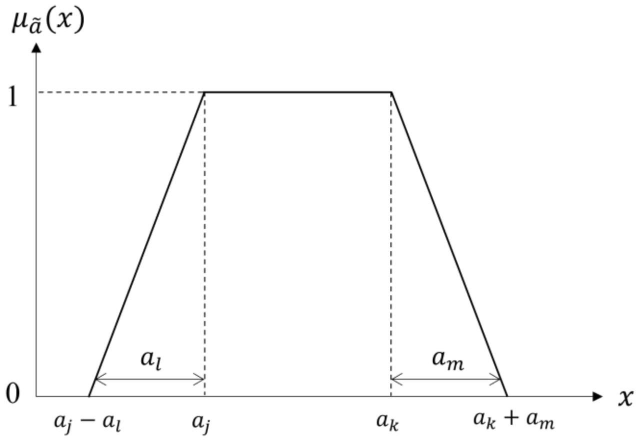
2.2.2 Fungsi Keanggotaan Bilangan *Fuzzy* Trapesium

Definisi 2.3 (Kumar, dkk., 2010)

Bilangan *fuzzy* $\tilde{a} = (a_j, a_k, a_l, a_m)$ disebut bilangan *fuzzy* trapesium dengan interval $[a_j, a_k]$ lebar sebelah kiri a_l dan kanan a_m, jika fungsi keanggotaannya sebagai berikut.

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{a_j - x}{a_l}, & a_j - a_l \leq x \leq a_j,\ \ a_l > 0 \\ 1, & a_j \leq x \leq a_k \\ 1 - \dfrac{x - a_k}{a_m}, & a_k \leq x \leq a_k + a_m, a_m > 0 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases} \tag{2.3}$$

Adapun grafik fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{a}}(x)$ disajikan pada Gambar 2.



Gambar 2. Grafik fungsi keanggotaan bilangan *fuzzy* trapesium.

2.3 Bilangan *Fuzzy*

Definisi 2.4 (Jafarian & Jafari, 2019)

Bilangan *fuzzy* merupakan himpunan *fuzzy* $\tilde{u} : \mathbb{R} \rightarrow I = [0,1]$ yang memenuhi syarat :

1. $\tilde{u}$ adalah semikontinu atas,
2. $\tilde{u}(x) = 0$ berada diluar interval $[a, d]$,
3. Terdapat bilangan real b dan c, misalnya $a \leq b \leq c \leq d$ dan
   a) $\tilde{u}(x)$ monoton naik pada interval $[a, b]$,

b) $\tilde{u}(x)$ monoton turun pada interval $[c, d]$,

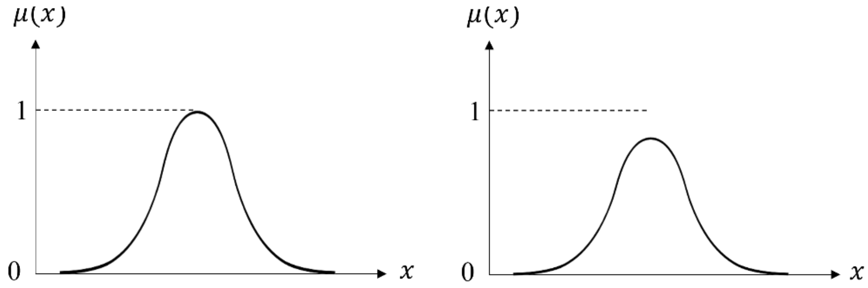
c) $\tilde{u}(x) = 1$, untuk $b \leq x \leq c$.

Himpunan semua bilangan *fuzzy* dilambangkan dengan E.

Susilo (2006), menjelaskan bahwa bilangan *fuzzy* dapat didefinisikan sebagai himpunan *fuzzy* dalam semesta himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$ yang memenuhi 4 sifat berikut ini.

1. Normal

   Misalkan A adalah himpunan *fuzzy* pada X. Himpunan *fuzzy* A disebut normal jika terdapat $x \in A$, sehingga nilai fungsi keanggotaannya sama dengan 1 ($\mu_A(x) = 1$). Himpunan *fuzzy* A disebut subnormal jika nilai fungsi keanggotaannya kurang dari 1, untuk setiap $x \in A$.



Gambar 3. Himpunan *fuzzy* normal dan subnormal.

2. Memiliki pendukung (*support*) yang terbatas

   Misalkan A adalah himpunan *fuzzy* pada X. *Support* dari A merupakan himpunan tegas yang memuat semua anggota A yang mempunyai derajat keanggotaan tidak nol. Pendukung (*support*) dari A dilambangkan dengan $S(A)$ atau $Supp(A)$. Berdasarkan definisi tersebut, secara sistematis ditulis sebagai berikut.

$$S(A) = \{x \in A | \mu_A(x) > 0\} \tag{2.4}$$

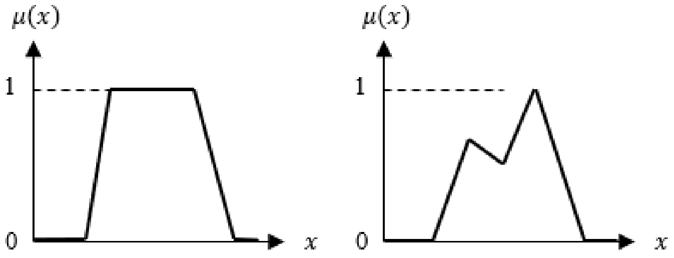
3. Semua potongan-α adalah selang tertutup dalam $\mathbb{R}$

   Semua potongan-α pada himpunan *fuzzy* A, berada pada interval tertutup $\mathbb{R}$ jika α-nya berada pada interval tertutup antara 0 dan 1 atau $\alpha \in [0,1]$.

4. Konvek

   Himpunan *fuzzy* disebut dengan himpunan *fuzzy* konvek jika fungsi keanggotaannya monoton naik, atau monoton turun, atau monoton naik dan turun pada nilai unsur pada himpunan semesta semakin naik. Himpunan *fuzzy*

A disebut dengan himpunan *fuzzy* tak konvek jika fungsi keanggotaannya tidak monoton naik, tidak monoton turun, dan tidak monoton naik dan turun pada nilai unsur pada himpunan semesta yang semakin naik.



Gambar 4. Himpunan fuzzy konvek dan tak konvek.

Berdasarkan 4 sifat tersebut, dapat dipastikan bahwa fungsi keanggotaan bentuk segitiga dan trapesium telah memenuhi syarat keanggotaan bilangan *fuzzy*. Berikut ini akan dijelaskan terkait dengan bilangan *fuzzy* segitiga dan bilangan *fuzzy* trapesium.

2.3.1 Bilangan *Fuzzy* Segitiga

Berikut merupakan penjelasan bilangan *fuzzy* segitiga dari Jafarian & Jafari (2019).

Definisi 2.5

Bilangan *fuzzy* segitiga $\tilde{a} = (a_j, a_k, a_l)$, disebut dengan bilangan *fuzzy* segitiga non negatif jika positif, jika $a_j \geq 0$.

Definisi 2.6

Dua bilangan *fuzzy* segitiga $\tilde{a} = (a_j, a_k, a_l)$ dan $\tilde{b} = (b_j, b_k, b_l)$, dikatakan sama, jika dan hanya jika $a_j = b_j$, $a_k = b_k$, dan $a_l = b_l$.

Definisi 2.7

Diberikan dua bilangan *fuzzy* segitiga $\tilde{a} = (a_j, a_k, a_l)$ dan $\tilde{b} = (b_j, b_k, b_l)$, Maka akan berlaku operasi perhitungan sebagai berikut.

1. $\tilde{a} \oplus \tilde{b} = (a_j + b_j, a_k + b_k, a_l + b_l)$,
2. $-\tilde{a} = (-a_j, -a_k, -a_l)$,

3. $\tilde{a} \ominus \tilde{b} = \left(a_j - b_l, a_k - b_k, a_l - b_j\right)$,
4. Operasi perkalian dalam konteks bilangan *fuzzy* yang dilambangkan dengan $\hat{*}$ mengacu pada prinsip tambahan, tetapi memiliki beberapa perbedaan dibandingkan dengan metode perkalian pada *fuzzy* tradisional.

$$\tilde{a} \hat{*} \tilde{b} = (c_j, c_k, c_l)$$

dengan :

$c_k = a_k \,.\, b_k$

$c_j = \min(a_j \,.\, b_j, a_j \,.\, b_l, a_l \,.\, b_j, a_l \,.\, b_l)$

$c_l = \max(a_j \,.\, b_j, a_m \,.\, b_j, a_l \,.\, b_j, a_l \,.\, b_l)$.

Jika $\tilde{a}$ adalah sembarang bilangan *fuzzy* segitiga dan $\tilde{b}$ non negatif, maka:

$$\tilde{a} \hat{*} \tilde{b} = \begin{cases} \left(a_j \,.\, b_j, a_k \,.\, b_k, a_l \,.\, b_l\right), & a_j \geq 0 \\ \left(a_j \,.\, b_l, a_k \,.\, b_k, a_l \,.\, b_l\right), & a_j < 0, a_l \geq 0 \\ \left(a_j \,.\, b_j, a_k \,.\, b_k, a_l \,.\, b_j\right), & a_j < 0, a_l < 0 \end{cases}$$

2.3.2 Bilangan *Fuzzy* Trapesium

Definisi 2.8 (Kumar, dkk., 2010)

Bilangan *fuzzy* trapesium $\tilde{a} = \left(a_j, a_k, a_l, a_m\right)$, disebut dengan bilangan *fuzzy* trapesium positif, jika dan hanya jika $a_j - a_l \geq 0$. Bilangan *fuzzy* trapesium positif dapat dituliskan $\tilde{a} > 0$.

Definisi 2.9 (Kumar, dkk., 2010)

Dua bilangan *fuzzy* trapesium $\tilde{a} = \left(a_j, a_k, a_l, a_m\right)$ dan $\tilde{b} = \left(b_j, b_k, b_l, b_m\right)$, dikatakan sama, jika dan hanya jika $a_j = b_j$, $a_k = b_k$, $a_l = b_l$, dan $a_m = b_m$.

Definisi 2.10 (Gemawati, dkk., 2018)

Diberikan dua bilangan *fuzzy* trapesium $\tilde{a} = \left(a_j, a_k, a_l, a_m\right)$ dan $\tilde{b} = \left(b_j, b_k, b_l, b_m\right)$, dan suatu skalar λ. Maka akan berlaku operasi perhitungan sebagai berikut.

1. $\tilde{a} \oplus \tilde{b} = \left(a_j + b_j, a_k + b_k, a_l + b_l, a_m + b_m\right)$,
2. $-\tilde{a} = \left(-a_j, -a_k, -a_l, -a_m\right)$,
3. $\tilde{a} \ominus \tilde{b} = \left(a_j - b_j, a_k - b_k, a_l + b_l, a_m + b_m\right)$,

4. Perkalian

   a. Jika $\tilde{a} = \left(a_j, a_k, a_l, a_m\right)$ dan λ adalah suatu skalar, maka :

$$\lambda \otimes \tilde{a} = \begin{cases} \left(\lambda a_j, \lambda a_k, \lambda a_l, \lambda a_m\right), & \lambda \geq 0 \\ \left(\lambda a_j, \lambda a_k, -\lambda a_m, -\lambda a_l\right), & \lambda < 0 \end{cases}$$

   b. *Cross product* $\tilde{a} \otimes \tilde{b}$

      1) Jika $\tilde{a} > 0$ dan $\tilde{b} > 0$

$$\tilde{a} \otimes \tilde{b} = (a_j b_j, a_k b_k, a_j b_m + b_j a_l, a_k b_l + b_k a_m)$$

      2) Jika $\tilde{a} < 0$ dan $\tilde{b} > 0$

$$\tilde{a} \otimes \tilde{b} = (a_j b_j, a_k b_k, a_l b_j - a_j b_l, a_m b_k - a_k b_m)$$

      3) Jika $\tilde{a} < 0$ dan $\tilde{b} < 0$

$$\tilde{a} \otimes \tilde{b} = (a_j b_j, a_k b_k, -a_j b_m - a_l b_j, -a_k b_l - a_m b_k)$$

Menurut Marzuki, dkk., (2018), matriks $\widetilde{\mathbf{A}} = (\tilde{a}_{ij})$ disebut dengan matriks *fuzzy* jika setiap anggota $\widetilde{\mathbf{A}}$ adalah bilangan *fuzzy*. Matriks *fuzzy* $\widetilde{\mathbf{A}}$ akan bernilai positif, jika setiap anggota $\widetilde{\mathbf{A}}$ positif ($\widetilde{\mathbf{A}} > 0$). Untuk matriks *fuzzy* berukuran $n \times n$ dapat dinotasikan sebagai $\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\tilde{a}_{ij}\right)_{n\times n}$, dengan $\tilde{a}_{ij} = \left(a_{ij}, \alpha_{ij}, \beta_{ij}\right)$. Notasi baru $\widetilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}, \mathbf{M}, \mathbf{N})$, dengan $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, $\mathbf{M} = \left(m_{ij}\right)_{n\times n}$, dan $\mathbf{N} = \left(n_{ij}\right)_{n\times n}$ adalah matriks tegas.

2.4 Sistem Persamaan Non Linear

Menurut Dugopolski (20016), sistem persamaan non linear adalah kumpulan dari persamaan non linear yang saling bekaitan dan berjumlah lebih dari satu persamaan. Sistem ini memerlukan suatu metode khusus untuk menyelesaikan. Berikut adalah bentuk umum sistem persamaan non linear.

$$\begin{gathered} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{gathered} \tag{2.5}$$

Fungsi f_i dengan $i = 1, 2, \dots, n$ merupakan fungsi yang pemetaannya dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}$. Sistem persamaan non linear juga dapat direpresentasikan dengan mendefinisikan fungsi $\mathbf{F}$, pemetaan $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^n$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}&\mathbf{F}(x_1, x_2, \dots, x_n)\\ &= \left(f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\right)^t\end{aligned} \tag{2.6}$$

Jika notasi vektor digunakan untuk menjelaskan variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$, sistem persamaan non linear dapat ditulis dengan formula sebagai berikut.

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0 \tag{2.7}$$

dengan fungsi $f_1, f_2, \dots, f_n$ disebut dengan koordinat fungsi dari $\mathbf{F}$.

2.5 Sistem Persamaan *Fully Fuzzy* Non Linear

Persamaan *fully fuzzy* merupakan suatu persamaan yang mengkombinasikan antara bilangan *fuzzy* dan operasi aritmatika pada bilangan *fuzzy* (Ravita & Alisah, 2012). Sistem persamaan non linier terbentuk dari kumpulan dua atau lebih persamaan non linear. Sehingga, sistem persamaan *fully fuzzy* non linear dapat didefiniskan sebagai kumpulan dari dua atau lebih persamaan *fully fuzzy* non linear, dengan semua parameternya dalam bentuk *fuzzy*.

Sistem persamaan *fully fuzzy* non linear memiliki bentuk persamaan umum sebagai berikut.

$$\begin{cases} (\tilde{a}_{11} \circledast \tilde{x}_1) \oplus (\tilde{a}_{12} \circledast \tilde{x}_2) \oplus \dots \oplus (\tilde{a}_{1n} \circledast \tilde{x}_n) \oplus (\tilde{c}_{11} \circledast \tilde{x}_1^2) \oplus (\tilde{c}_{12} \circledast \tilde{x}_2^2) \oplus \dots \\ \quad \oplus (\tilde{c}_{1n} \circledast \tilde{x}_n^2) \oplus \dots \oplus (\tilde{e}_{11} \circledast \tilde{x}_1^n) \oplus (\tilde{e}_{12} \circledast \tilde{x}_2^n) \oplus \dots \oplus (\tilde{e}_{1n} \circledast \tilde{x}_n^n) = \tilde{b}_1 \\ \qquad \vdots \\ (\tilde{a}_{n1} \circledast \tilde{x}_1) \oplus (\tilde{a}_{n2} \circledast \tilde{x}_2) \oplus \dots \oplus (\tilde{a}_{nn} \circledast \tilde{x}_n) \oplus (\tilde{c}_{n1} \circledast \tilde{x}_1^2) \oplus (\tilde{c}_{n2} \circledast \tilde{x}_2^2) \oplus \dots \\ \quad \oplus (\tilde{c}_{nn} \circledast \tilde{x}_n^2) \oplus \dots \oplus (\tilde{e}_{n1} \circledast \tilde{x}_1^n) \oplus (\tilde{e}_{n2} \circledast \tilde{x}_2^n) \oplus \dots \oplus (\tilde{e}_{nn} \circledast \tilde{x}_n^n) = \tilde{b}_n \end{cases} \tag{2.8}$$

$\tilde{a}_{ij}$, $\tilde{c}_{ij}$, dan $\tilde{e}_{ij}$ untuk $i \geq 1$, $j \leq n$ adalah sembarang bilangan *fuzzy* segitiga, sedangkan $\tilde{b}_i$ yang berada pada ruas kanan persamaan dan elemen yang tidak diketahui $(\tilde{x}_j)$ adalah bilangan *fuzzy* non negatif. Dengan menggunakan notasi matriks, akan didapatkan :

$$\widetilde{\mathbf{A}} \circledast \widetilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{C}} \circledast \widetilde{\mathbf{X}}^2 + \dots + \tilde{\mathbf{E}} \circledast \widetilde{\mathbf{X}}^{\mathrm{n}} = \widetilde{\mathbf{B}} \tag{2.9}$$

Bilangan *fuzzy* pada matriks $\widetilde{\mathbf{X}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T, \widetilde{\mathbf{X}}^2 = (\tilde{x}_1^2, \tilde{x}_2^2, \dots, \tilde{x}_n^2)^T, \dots, \widetilde{\mathbf{X}}^n = (\tilde{x}_1^n, \tilde{x}_2^n, \dots, \tilde{x}_n^n)^T$. Diberikan $\tilde{\mathbf{x}}_i = (\tilde{y}_{i1}, \tilde{x}_{i1}, \tilde{z}_{i1})$, $\tilde{\mathbf{x}}_i^2 = (\tilde{y}_{i1}^2, \tilde{x}_{i1}^2, \tilde{z}_{i1}^2)$, … , $\tilde{\mathbf{x}}_i^n = (\tilde{y}_{i1}^n, \tilde{x}_{i1}^n, \tilde{z}_{i1}^n)$, untuk $1 \leq i \leq n$ merupakan solusi dari sistem persamaan *fully fuzzy* non linear pada persamaan (2.9) jika,

$$\tilde{\mathbf{a}}_i \,\hat{*}\, \widetilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{c}}_i \,\hat{*}\, \widetilde{\mathbf{X}}^2 + \cdots + \tilde{\mathbf{e}}_i \,\hat{*}\, \widetilde{\mathbf{X}}^n = \tilde{\mathbf{b}}_i, \; 1 \leq i \leq n, \tag{2.10}$$

dengan :

$\tilde{\mathbf{b}}_i = (\tilde{d}_{i1}, \tilde{b}_{i1}, \tilde{f}_{i1})$,

$\tilde{\mathbf{a}}_i = \left((\tilde{g}_{i1}, \tilde{a}_{i1}, \tilde{h}_{i1}), (\tilde{g}_{i2}, \tilde{a}_{i2}, \tilde{h}_{i2}), \dots, (\tilde{g}_{in}, \tilde{a}_{in}, \tilde{h}_{in})\right)$,

$\tilde{\mathbf{c}}_i = \left((\tilde{k}_{i1}, \tilde{c}_{i1}, \tilde{p}_{i1}), (\tilde{k}_{i2}, \tilde{c}_{i2}, \tilde{p}_{i2}), \dots, (\tilde{k}_{in}, \tilde{c}_{in}, \tilde{p}_{in})\right)$,

$\tilde{\mathbf{e}}_i = \left((\tilde{q}_{i1}, \tilde{e}_{i1}, \tilde{u}_{i1}), (\tilde{q}_{i2}, \tilde{e}_{i2}, \tilde{u}_{i2}), \dots, (\tilde{q}_{in}, \tilde{e}_{in}, \tilde{u}_{in})\right)$,

Jika dalam persamaan (2.9), setiap elemen $\widetilde{\mathbf{A}}, \widetilde{\mathbf{C}}, \dots, \widetilde{\mathbf{E}}, \widetilde{\mathbf{X}}, \widetilde{\mathbf{X}}^2, \dots, \widetilde{\mathbf{X}}^{\mathrm{n}}$ dan $\widetilde{\mathbf{B}}$ adalah bilangan *fuzzy* non negatif, maka persamaan (2.9) disebut dengan sistem persamaan *fully fuzzy* non linear non negatif (Jafarian & Jafari, 2019).

2.6 Sistem Persamaan *Dual Fully Fuzzy* Non Linear

Adapun bentuk persamaan umum sistem persamaan *dual fully fuzzy* non linear adalah sebagai berikut.

$$\begin{cases} (\tilde{a}_{1_{11}} \,\hat{*}\, \tilde{x}_1) \oplus (\tilde{a}_{1_{12}} \,\hat{*}\, \tilde{x}_2) \oplus \dots \oplus (\tilde{a}_{1_{1n}} \,\hat{*}\, \tilde{x}_n) \oplus (\tilde{a}_{2_{11}} \,\hat{*}\, \tilde{x}_1^2) \oplus (\tilde{a}_{2_{12}} \,\hat{*}\, \tilde{x}_2^2) \oplus \dots \oplus \\ (\tilde{a}_{2_{1n}} \,\hat{*}\, \tilde{x}_n^2) \oplus \dots \oplus (\tilde{a}_{n_{11}} \,\hat{*}\, \tilde{x}_1^n) \oplus (\tilde{a}_{n_{12}} \,\hat{*}\, \tilde{x}_2^n) \oplus \dots \oplus (\tilde{a}_{n_{1n}} \,\hat{*}\, \tilde{x}_n^n) = (\tilde{a}_{n+1_{11}} \,\hat{*}\, \tilde{x}_1) \\ \oplus (\tilde{a}_{n+1_{12}} \,\hat{*}\, \tilde{x}_2) \oplus \dots \oplus (\tilde{a}_{n+1_{1n}} \,\hat{*}\, \tilde{x}_n) \oplus \dots \oplus (\tilde{a}_{2n_{11}} \,\hat{*}\, \tilde{x}_1^n) \oplus (\tilde{a}_{2n_{12}} \,\hat{*}\, \tilde{x}_2^n) \oplus \dots \\ \oplus (\tilde{a}_{2n_{1n}} \,\hat{*}\, \tilde{x}_n^n) \oplus \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ (\tilde{a}_{1_{n1}} \,\hat{*}\, \tilde{x}_1) \oplus (\tilde{a}_{1_{n2}} \,\hat{*}\, \tilde{x}_2) \oplus \dots \oplus (\tilde{a}_{1_{nn}} \,\hat{*}\, \tilde{x}_n) \oplus (\tilde{a}_{2_{n1}} \,\hat{*}\, \tilde{x}_1^2) \oplus (\tilde{a}_{2_{n2}} \,\hat{*}\, \tilde{x}_2^2) \oplus \dots \oplus \\ (\tilde{a}_{2_{nn}} \,\hat{*}\, \tilde{x}_n^2) \oplus \dots \oplus (\tilde{a}_{n_{n1}} \,\hat{*}\, \tilde{x}_1^n) \oplus (\tilde{a}_{n_{n2}} \,\hat{*}\, \tilde{x}_2^n) \oplus \dots \oplus (\tilde{a}_{n_{nn}} \,\hat{*}\, \tilde{x}_n^n) = (\tilde{a}_{n+1_{n1}} \,\hat{*}\, \tilde{x}_1) \\ \oplus (\tilde{a}_{n+1_{n2}} \,\hat{*}\, \tilde{x}_2) \oplus \dots \oplus (\tilde{a}_{n+1_{nn}} \,\hat{*}\, \tilde{x}_n) \oplus \dots \oplus (\tilde{a}_{2n_{n1}} \,\hat{*}\, \tilde{x}_1^n) \oplus (\tilde{a}_{2n_{n2}} \,\hat{*}\, \tilde{x}_2^n) \oplus \dots \\ \oplus (\tilde{a}_{2n_{nn}} \,\hat{*}\, \tilde{x}_n^n) \oplus \tilde{b}_n \end{cases} \tag{2.11}$$

Dengan menggunakan notasi matriks akan didapatkan :

$$\widetilde{\mathbf{A}}_1 \,\hat{*}\, \widetilde{\mathbf{X}} + \widetilde{\mathbf{A}}_2 \,\hat{*}\, \widetilde{\mathbf{X}}^2 + \cdots + \widetilde{\mathbf{A}}_{\mathrm{n}} \,\hat{*}\, \widetilde{\mathbf{X}}^{\mathrm{n}} = \widetilde{\mathbf{A}}_{\mathrm{n+1}} \,\hat{*}\, \widetilde{\mathbf{X}} + \widetilde{\mathbf{A}}_{\mathrm{n+2}} \,\hat{*}\, \widetilde{\mathbf{X}}^2 + \cdots + \widetilde{\mathbf{A}}_{\mathrm{2n}} \,\hat{*}\, \widetilde{\mathbf{X}}^{\mathrm{n}} + \widetilde{\mathbf{B}} \tag{2.12}$$

Bilangan *fuzzy* pada matriks $\widetilde{\mathbf{X}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T, \widetilde{\mathbf{X}}^2 = (\tilde{x}_1^2, \tilde{x}_2^2, \dots, \tilde{x}_n^2)^T, \dots, \widetilde{\mathbf{X}}^n = (\tilde{x}_1^n, \tilde{x}_2^n, \dots, \tilde{x}_n^n)^T$ untuk $1 \leq i \leq 2n$. $\widetilde{\mathbf{X}}$, $\widetilde{\mathbf{X}}^2$,…, $\widetilde{\mathbf{X}}^n$ adalah matriks bilangan *fuzzy* segitiga, $\tilde{b}$ adalah variabel yang tidak diketahui dan $\widetilde{\mathbf{X}} + \widetilde{\mathbf{X}}^2 + \cdots + \widetilde{\mathbf{X}}^{\mathrm{n}}$ adalah vektor kolom dari bilangan *fuzzy* segitiga Zakaria, Megarani, dkk. (2023).

2.7 Metode Numerik

Menurut Maharani & Suprapto (2018), metode numerik adalah suatu metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah-masalah matematika dengan menggunakan operasi matematis, operasi artimatika dan operasi logika pada sekumpulan bilangan atau data numerik. Dalam penggunaan metode numerik, terjadi sejumlah operasi perhitungan dalam jumlah yang banyak dan prosesnya berulang.

Metode numerik digunakan ketika perhitungan analitik tidak dapat digunakan untuk memecahkan masalah. Metode numerik disajikan dalam bentuk algoritma yang dapat dihitung dengan cepat dan mudah. Pendekatan yang digunakan dalam metode numerik adalah pendekatan analitis matematis. Karena perhitungan dalam metode numerik dilakukan secara berulang secara konsisten, maka akan menghasilkan hasil yang mendekati nilai penyelesaian eksak.

Dalam metode numerik terdapat satu aspek yang sangat penting untuk diperhatikan, yaitu galat. Galat berasosiasi dengan seberapa dekat solusi hampiran terhadap solusi sejatinya. Semakin kecil galat, semakin teliti solusi hampiran yang diperoleh. Sebaliknya, jika semakin besar galat maka solusi hampiran yang diperoleh semakin tidak teliti. Pada proses numerik terdapat beberapa jenis galat, salah satunya adalah galat relatif (Zakaria & Muharramah, 2023). Adapun rumus yang digunakan adalah sebagai berikut.

$$\varepsilon_a = \frac{x^{n+1} - x^n}{x^{n+1}} \times 100\% \tag{2.13}$$

dengan :

ε_a : galat relatif

x^{n+1} : nilai perkiraan iterasi ke-$n+1$

x^n : nilai perkiraan iterasi ke-n

2.8 Algoritma Optimasi *Chaos*

Secara etimologi, *chaos* berasal dari bahasa inggris yang artinya kekacauan atau ketidakaturan yang kompleks. Cong, dkk. (2010), menjelaskan bahwa, *chaos* merupakan fenomena non linear yang dapat diamati dan terjadi dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan. Fenomena ini disebabkan oleh sifat-sifat khas yang dimiliki *chaos*, seperti, ergodisitas/ergodik, intrinsik, stokastik, dan sensitif terhadap kondisi awal.

Karena sensitif terhadap kondisi awal, *chaos* akan menyebabkan suatu sistem menjadi tidak dapat diprediksi dan bergerak secara acak. Namun, jika kekacauan diamati dengan mempertimbangkan dimensi waktu, maka akan ditemukan juga pola atau keteraturan tertentu. Oleh karena itu, Optimasi *Chaos* dapat mempercepat proses pencarian solusi yang optimal.

Optimasi *Chaos* dapat direalisasikan dalam berbagai berbentuk, seperti fungsi polinomial atau eksponensial. Salah satu contoh sederhana dari fungsi *chaos* adalah persamaan logistik (*logistic map*), yang dinyatakan sebagai berikut.

$$t_{k+1} = \lambda t_k(1 - t_k) \tag{2.14}$$

dengan :

λ = laju pertumbuhan fungsi

k = $0, 1, 2, \ldots.$

$0 \leq t_0 \leq 1$

Ketika nilai λ berada dalam rentang $[3.56, 4]$, menyebabkan persamaan tersebut menjadi *chaotic*. Sifat-sifat seperti ergodisitas, stokastik dan keteraturan dari *chaos* sendiri mengakibatkan adanya variasi dalam variabel optimasi serta pergerakan yang kacau dalam proses pecarian. Berikut adalah masalah optimasi berkelanjutan.

$$\min f(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_i \epsilon\ [a_i, b_i], i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.15}$$

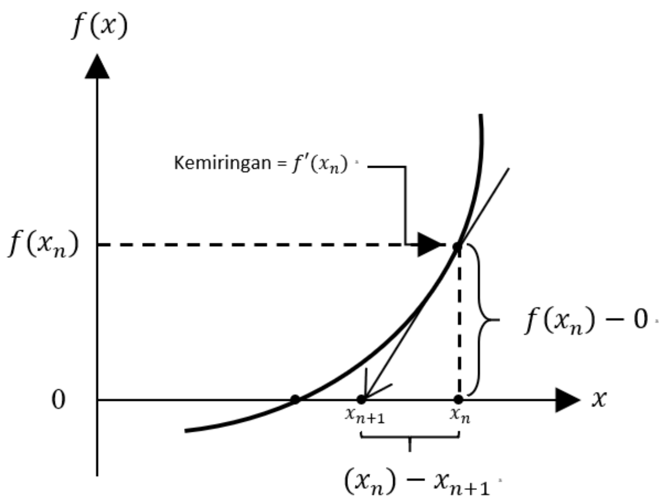
dengan perkiraan awal

$$x^k = \left(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k\right) \text{ dan } t^k = (t_1^k, t_2^k \ldots, t_n^k)$$

(Luo, dkk., 2008)

2.9 Metode Newton Raphson

Metode Newton Raphson adalah metode pendekatan yang berfokus pada satu titik awal dengan mempertimbangkan gradien pada titik tersebut (Chapra & Canale, 1991). Secara umum, dalam mencari akar-akar metode Newton Raphson menggunakan satu titik awal (*initial value*) sebagai perkiraan awal. Misalkan, jika perkiraan awal dari akar adalah x_n, maka sebuah garis singgung dapat ditarik dari titik $[x_n, f(x_n)]$. Pada titik dimana garis singgung memotong sumbu x merupakan sebuah perkiraan perbaikan dari akar (x_{n+1}). Turunan pertama pada x_n adalah ekuivalen terhadap kemiringan.



Gambar 5. Grafik metode Newton Raphson.

Berdasarkan pada gambar 5, gradien garis singgung di x_n adalah

$$m = f'(x_n) = \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}} \tag{2.16}$$

Diperoleh rumus

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.17}$$

dengan $f'(x_n) \neq 0$.

Metode Newton Raphson dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan non linear yang melibatkan lebih dari satu variabel. Jika pada persamaan non linear memerlukan nilai fungsi $f'(x)$ untuk setiap iterasinya, maka pada sistem persamaan non linear diperlukan matriks Jacobian $\mathbf{J}(x)$ sebagai pengganti dari $f'(x)$.

Dengan demikian, rumus untuk metode Newton Raphson dalam menyelesaikan sistem persamaan non linear adalah sebagai berikut.

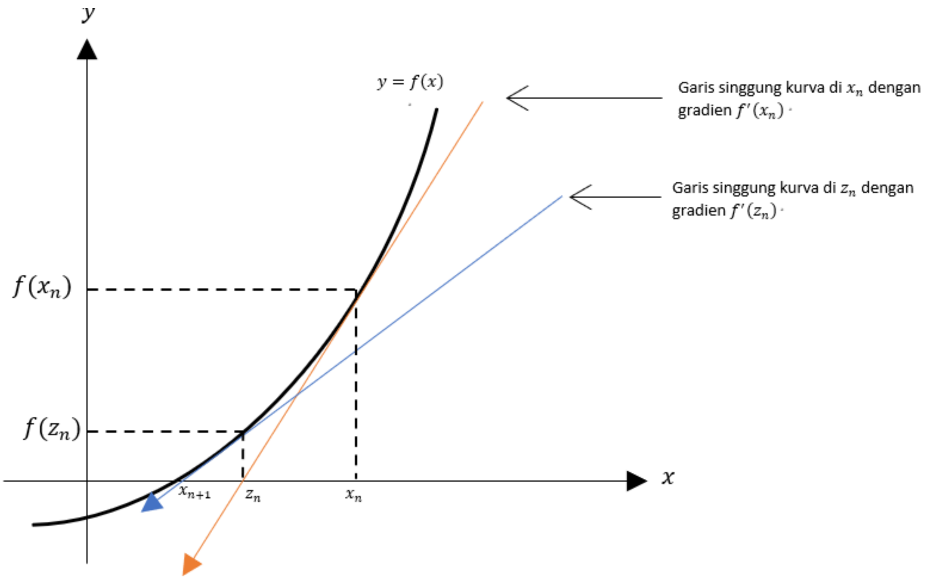
$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X}_n)\mathbf{F}(\mathbf{X}_n) \tag{2.18}$$

dengan $\mathbf{J}(\mathbf{X}_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_n)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_n)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x_n)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f_2(x_n)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_n)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x_n)}{\partial x_i} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_n)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x_n)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x_n)}{\partial x_i} \end{bmatrix}$.

Syarat yang harus terpenuhi yaitu $\mathbf{J}(\mathbf{X}_n)$ adalah matriks non singular dan $\mathbf{J}(\mathbf{X}_n)$ merupakan matriks Jacobian (Burden & Faires, 2011).

2.10 Metode Newton Raphson Ganda

Menurut Devitriani, dkk. (2019), metode Newton Raphson Ganda merupakan salah satu pendekatan iterasi yang digunakan untuk menghitung akar-akar persamaan non linear dengan menggunakan orde konvergensi empat. Untuk menurunkan metode Newton Raphson Ganda digunakan pendekatan secara geometri.



Gambar 6. Grafik tafsiran geometri metode Newton Raphson Ganda.

Berdasarkan Gambar 6, garis singgung kurva di x_n dengan gradien garis singgungnya, yaitu :

$$f'(x_n) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_n) - 0}{x_n - z_n} = \frac{f(x_n)}{x_n - z_n} \tag{2.19}$$

Sedangkan untuk garis singgung kurva di z_{n-1}, dengan gradien garis singgungnya disajikan pada persamaan (2.20).

$$f'(z_n) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(z_n) - 0}{z_n - x_{n+1}} = \frac{f(z_n)}{z_n - x_{n+1}} \tag{2.20}$$

Berdasarkan persamaan (2.19) dan (2.20), maka akan dihasilkan rumus metode Newton Raphson Ganda pada persamaan (2.21).

$$\begin{aligned} z_n &= x_n - \tfrac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ f'(x_n) \neq 0 \\ x_{n+1} &= z_n - \tfrac{f(z_n)}{f'(Z_n)}, f'(z_n) \neq 0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Untuk menyelesaikan sistem persamaan non linear $\mathbf{F}(x) = 0$, diperlukan matriks Jacobian $\mathbf{J}(x)$ pada setiap iterasinya. Matriks Jacobian tersebut berfungsi sebagai pengganti turunan fungsi $\mathbf{F}(x)$ atau dapat dinyatakan sebagai $\mathbf{F}'(x)$. Persamaan (2.22) merupakan rumus metode Newton Raphson untuk menyelesaikan sistem persamaan non linear.

$$\mathbf{X}_{\mathrm{n+1}} = \mathbf{X}_{\mathrm{n}} - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X}_{\mathrm{n}})\mathbf{F}(\mathbf{X}_{\mathrm{n}}) \tag{2.22}$$

Berdasarkan persamaan (2.22) diperoleh rumus metode Newton Raphson Ganda untuk menyelesaikan sistem persamaan non linear sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{\mathrm{n}} &= \mathbf{X}_{\mathrm{n}} - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X}_{\mathrm{n}})\mathbf{F}(\mathbf{X}_{\mathrm{n}}) \\ \mathbf{X}_{\mathbf{n+1}} &= \mathbf{Z}_{\mathrm{n}} - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{Z}_{\mathrm{n}})\mathbf{F}(\mathbf{Z}_{\mathrm{n}}) \end{aligned} \tag{2.23}$$

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung pada semester genap tahun akademik 2023/2024.

3.2 Metode Penelitian

Adapun metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Menentukan sistem persamaan *fully fuzzy* dan *dual fully fuzzy* non linear.
2. Mengubah persamaan *fully fuzzy* dan *dual fully fuzzy* non linear menjadi bentuk sistem persamaan tegas non linear.
3. Mengaplikasikan Algoritma Optimasi *Chaos* untuk mendapatkan solusi x^* yang akan diinisiasi sebagai nilai awal x_0 pada metode Newton Raphson Ganda.
4. Mengintegrasikan solusi dari Algoritma Optimasi *Chaos* ke metode Newton Raphson Ganda untuk mendapatkan solusi sistem persamaan *fully fuzzy* dan *dual fully fuzzy* non linear.
5. Membuat kesimpulan berdasarkan hasil yang diperoleh.

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan, dapat disimpulkan bahwa sistem persamaan *fully fuzzy* dan *dual fully fuzzy* non linear dapat diselesaikan dengan menggabungkan Algoritma Optimasi *Chaos* dan metode Newton Raphson Ganda. Solusi dari sistem persamaan *fully fuzzy* non linear pada contoh soal 4.2.1 adalah $\tilde{\mathbf{x}} = (1, 4, 6)$ dan $\tilde{\mathbf{y}} = (2, 4, 7)$, dengan galat sebesar 6.9×10^{-7} dan waktu komputasi selama 0.015 detik. Pada contoh soal 4.2.2, didapatkan solusi $\tilde{\mathbf{x}} = (2, 5, 1, 3)$ dan $\tilde{\mathbf{y}} = (3, 6, 2, 3)$, dengan galat sebesar 4.8×10^{-14} dan waktu komputasi adalah 0.017 detik. Dalam penerapan persamaan *fully fuzzy* non linear pada mekanika fluida, didapatkan laju kecepatan minumum, rata-rata, dan maksimum sebagai berikut $\tilde{\mathbf{x}} = (10.32500042, 20.32500014, 30.32500002)$, dengan galat sebesar 1×10^{-30} dan waktu komputasi selama 0.0099 detik.

Pada kasus sistem persamaan *dual fully fuzzy* non linear pada contoh 4.3.1, didapatkan solusi yaitu $\tilde{\mathbf{x}} = (1, 4, 6)$ dan $\tilde{\mathbf{y}} = (2, 4, 7)$, dengan galat sebesar 1×10^{-8} dan waktu komputasi selama 0.014 detik. Pada contoh 4.3.2, didapatkan solusi numerik yaitu $\tilde{\mathbf{x}} = (1.00000, 1.41421, 1.73205, 2.00000)$ dan $\tilde{\mathbf{y}} = (2.00000, 2.23607, 2.44949, 2.64575)$, dengan galat sebesar 4×10^{-8} dan waktu komputasi selama 0.02 detik. Pada penerapan kasus *dual fully fuzzy* non linear, solusi contoh kasus reaksi kimia antara poli etilena dan poli propilena untuk mendapatkan suatu zat, yaitu $\tilde{\mathbf{x}} = (1.67160156, 1.96976423, 2.37111381)$ dan $\tilde{\mathbf{y}} = (1.53826822, 1.82635231, 1.96148508)$, dengan galat sebesar 7.7×10^{-16} dan waktu komputasi selama 0.031 detik.

5.2 Saran

Adapun saran untuk penelitian selanjutnya, menggabungkan Algoritma Optimasi *Chaos* dengan metode numerik lainnya. Selain itu, penelitian selanjutnya dapat menyertakan contoh kasus lain yang berkaitan dengan penerapan sistem persamaan *fully fuzzy* dan *dual fully fuzzy* pada berbagai bidang ilmu, seperti ekonomi, teknik, hingga biologi.

DAFTAR PUSTAKA

Burden, R. L., & Faires, J. D. 2011. *Numerical Analysis (Ninth Edition)*. Boston: Richard Stratton.

Chapra, S. C., & Canale, R. P. 1991. *Metode Numerik untuk Teknik dengan Penerapan pada Komputer Pribadi*. Jakarta: UI Press.

Cong, S., Li, G., & Feng, X. 2010. An Improved Algorithm of Chaos Optimization. *2010 8th IEEE International Conference on Control and Automation, ICCA 2010*, 1196–1200. https://doi.org/10.1109/ICCA.2010.5524290

Dehghan, M., Hashemi, B., & Ghatee, M. 2007. Solution of the Fully Fuzzy Linear Systems Using Iterative Techniques. *Chaos, Solitons and Fractals, 34*(2), 316–336. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.03.085

Devitriani, Kiftiah, M., & Yudhi. 2019. Analisis Metode Newton-Raphson Ganda Orde Konvergensi Empat dalam Menyelesaikan Sistem Persamaan Nonlinear. *Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster), 08*(2), 213–220.

Dugopolski, M. 2006. *Elementary and Intermediate Algebra (Second Edition)*. New York: McGraw-Hill.

Gemawati, S., Nasfianti, I., Mashadi, & Hadi, A. 2018. A New Method for Dual Fully Fuzzy Linear System with Trapezoidal Fuzzy Numbers by QR Decomposition. *Journal of Physics: Conference Series*, *1116*(2). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1116/2/022011

Hooshangian, L., & Hashemzehi, S. 2013. The Solution of Dual Fully Fuzzy Linear System. *2013 13Th Iranian Conference on Fuzzy System (IFSC)*.

Jafarian, A., & Jafari, R. 2019. A New Computational Method for Solving Fully Fuzzy Nonlinear Matrix Equations. *International Journal of Fuzzy Computation and Modelling*, *2*(4), 275. https://doi.org/10.1504/ijfcm.2019.100317

Jafarian, A., Jafari, R., Golmankhaneh, A. K., & Baleanu, D. 2015. Solving Fully Fuzzy Polynomials Using Feed-Back Neural Networks. *International Journal* *of Computer Mathematics*, 92(4), 742-755. http://dx.doi.org/10.1080/00207160.2014.907404

Kajani, M. T., Asady, B., & Vencheh, A. H. 2005. An Iterative Method for Solving Dual Fuzzy Nonlinear Equations. *Applied Mathematics and Computation*, *167*(1), 316–323. https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.06.113

Klir, G. J., & Yuan, B. 1995. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic : Theory and Applications*. New York: Prentice Hall PTR.

Kumar, A., Neetu, & Bansal, A. 2010. A New Method to Solve Fully Fuzzy Linear System with Trapezoidal Fuzzy Numbers. *Canadian Journal on Science and Engineering Mathematics*, *1*(3), 45–56.

Loganathan, C., & Lalitha, M. 2017. Solving Fully Fuzzy Nonlinear Programming with Inequality Constraints. *International Journal of Mechanical Engineering and Technology*, *8*(11), 354–362. http://iaeme.com/Home/issue/IJMET?Volume=8&Issue=11http://iaeme.com

Luo, Y. Z., Tang, G. J., & Zhou, L. N. 2008. Hybrid Approach for Solving Systems of Nonlinear Equations Using Chaos Optimization and Quasi-Newton Method. *Applied Soft Computing Journal*, *8*(2), 1068–1073. https://doi.org/10.1016/j.asoc.2007.05.013

Maharani, S., & Suprapto, E. 2018. *Analisis Numerik Berbasis Group Investigation untuk Meningkatkan Kemampuan Berpikir Kritis*. Magetan: CV. AE Media Grafika.

Marni, S. I., Mashadi, & Gemawati, S. 2018. Solving Dual Fully Fuzzy Linear System by Use Factorizations of The Coefficient Matrix for Trapezoidal Fuzzy Number. *Bulletin of Mathematics*, *10*(02), 145–156. https://talenta.usu.ac.id/index.php/bullmath

Marsudi. 2010. *Logika dan Teori Himpunan*. Malang: Universitas Brawijaya Press.

Marzuki, C. C., Agustian, Hariati, D., Afmilda, J., Husna, N., & Nanda, P. 2018. Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Fully Fuzzy Menggunakan Metode Dekomposisi Nilai Singular (SVD). *Jurnal Matematika (MANTIK)*, *4*(2), 143–149. https://doi.org/10.15642/mantik.2018.4.1.143-149

Marzuki, C. C., & Herawati. 2015. Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Fully Fuzzy Menggunakan Metode Iterasi Jacobi. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, *1*(1), 1–7.

Megarani, W., Aziz, D., Amanto, & Zakaria, L. 2020. Algoritma Penyelesaian Persamaan Nonlinear Fuzzy dengan Metode Modifikasi Newton-Raphson. *Jurnal Siger Matematika*, *1*(2), 63–69.

Mosleh, M., Otadi, M., & Khanmirzaie, A. 2009. Iranian Journal of Optimization Decomposition Method for Solving Fully Fuzzy Linear Systems. *Iranian Journal of Optimization, 1*, 188–198.

Pratikno, I., Kusumastuti, N., & Prihandono, B. 2015. Penyelesaian Persamaan Nonlinear Berderajat Dua Menggunakan Metode Hopfield Modifikasi. *Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)*, *4*(3), 353–362.

Ravita, E. S., & Alisah, E. 2012. Studi Tentang Persamaan Fuzzy. *Cauchy : Jurnal Matematika Murni dan Aplikasinya* , *2*(2), 54–65.

Rosidi, M. 2019. *Metode Numerik Menggunakan R Untuk Teknik Lingkungan*. Bandung: Piktochart.

Sari, M. P., Pradjaningsih, A., & Ubaidillah, F. 2022. Application of Metaheuristic Algorithm for Solving Fully Fuzzy Linear Equations System. *Operations Research: International Conference Series*, *3*(3), 107–117. http://iorajournal.org/indx.php/orics/index

Susilo, F. 2006. *Himpunan dan Logika Kabur Serta Aplikasinya*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Wardhani, L. K., & Haerani, E. 2011. *Fuzzy Logic : Pemilihan Model Fuzzy Membership Function*. Pekanbaru: Yayasan Pusaka Riau.

Waziri, M. Y., & Majid, Z. A. 2012. A New Approach for Solving Dual Fuzzy Nonlinear Equations Using Broyden's and Newton's Methods. *Advances in Fuzzy Systems*. https://doi.org/10.1155/2012/682087

Zakaria, L., Anisa, E., & Aziz, D. 2023. Penyelesaian Sistem Persamaan Fully Fuzzy Non Linear Menggunakan Metode Newton Raphson Ganda. *Journal of Mathematics: Theory and Applications*, *5*(2), 67–73. https://doi.org/10.31605/jomta.v5i2.2876

Zakaria, L., Megarani, W., Faisol, A., Nuryaman, A., & Muharramah, U. 2023. Computational Mathematics: Solving Dual Fully Fuzzy Nonlinear Matrix Equations Numerically using Broyden's Method. *International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences*, *8*(1), 60–77. https://doi.org/10.33889/IJMEMS.2023.8.1.004

Zakaria, L., & Muharramah, U. 2023. *Pengantar Metode Numerik (Solusi Masalah dengan Mathematica)*. Bandar Lampung: CV Anugerah Utama Rahaja.