PENERAPAN TEORI HIMPUNAN *ROUGH* PADA HOMOMORFISMA MODUL ATAS RING

Skripsi

Oleh

ANGGITA TRI AYU ANISA
NPM. 2017031035

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

ABSTRAK

APPLICATION OF ROUGH SETS TO MODULE HOMOMORPHISMS OVER RINGS

By

Anggita Tri Ayu Anisa

Given a pair (U, θ) which is an approximation space, with U being the set universe and θ an equivalence relation on the set U. The equivalence relation θ which is reflexive, symmetric, and transitive results in the formation of equivalence classes. Given a set $X \subseteq U$, the upper approximation of X is denoted by $\overline{Apr}(X)$, and the lower approximation of X is denoted by $\underline{Apr}(X)$. A subset of X is a *rough* set if $\overline{Apr}(X) \neq \underline{Apr}(X)$. A function on a *rough* set can be said to be a homomorphism of the *rough* module over the *rough* ring R if it satisfies some axioms. In this paper, we discuss the properties and give examples of the construction of homomorphisms of the *rough* module over the *rough* ring, and create a program to determine whether a function is a homomorphism of the *rough* module over the *rough* ring R on a finite set using Python.

Keywords: *Approximation space, rough ring, rough module, rough module homomorphism.*

ABSTRAK

PENERAPAN TEORI HIMPUNAN *ROUGH* PADA HOMOMORFISMA MODUL ATAS RING

Oleh

Anggita Tri Ayu Anisa

Diberikan pasangan (U, θ) yang merupakan ruang aproksimasi, dengan U merupakan himpunan semesta dan θ relasi ekuivalensi pada himpunan U. Relasi ekuivalensi θ yang bersifat refleksif, simetris, dan transitif mengakibatkan terbentuknya kelas-kelas ekuivalensi. Jika diberikan himpunan $X \subseteq U$, aproksimasi atas dari X dinotasikan dengan $\overline{Apr}(X)$, dan aproksimasi bawah dari X dinotasikan dengan $\underline{Apr}(X)$. Suatu himpunan bagian X merupakan himpunan *rough* jika $\overline{Apr}(X) \neq \underline{Apr}(X)$. Suatu fungsi pada himpunan *rough* dapat dikatakan homomorfisma modul *rough* atas ring *rough* R jika memenuhi beberapa aksioma. Pada penelitian ini, dibahas mengenai sifat-sifat dan diberikan contoh kontruksi homomorfisma modul *rough* atas ring *rough*, serta membuat program untuk menentukan apakah suatu fungsi merupakan homomorfisma modul *rough* atas ring *rough* R pada himpunan berhingga menggunakan Phyton.

Kata kunci: *Ruang aproksimasi, ring rough, modul rough, homomorfisma modul rough.*

PENERAPAN TEORI HIMPUNAN *ROUGH* PADA HOMOMORFISMA MODUL ATAS RING

ANGGITA TRI AYU ANISA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

Judul Skripsi	:	**PENERAPAN TEORI HIMPUNAN *ROUGH* PADA HOMOMORFISMA MODUL ATAS RING**
Nama Mahasiswa	:	Anggita Tri Ayu Anisa
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2017031035**
Program Studi	:	**Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.
NIP. 198406272006042001

Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.
NIP. 198002062003121003

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr.Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim penguji

Ketua	:	**Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**	....
Sekretaris	:	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Dr.Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **19 Maret 2024**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Anggita Tri Ayu Anisa**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2017031035**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Penerapan Teori Himpunan *Rough* pada Homomorfisma Modul atas Ring**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 19 Maret 2024

Penulis,

Anggita Tri Ayu Anisa

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Anggita Tri Ayu Anisa yang lahir di Panjang pada tanggal 25 Maret 2002. Penulis merupakan anak ketiga dari tiga bersaudara yang terlahir dari pasangan Liswar Efendi dan Yayeh Sunarsih.

Penulis menempuh awal pendidikan Sekolah Dasar di SD Negeri 1 Padasuka pada tahun 2008 sampai tahun 2010 dan pindah Sekolah Dasar di SD Negeri 1 Margoyoso pada tahun 2010 sampai tahun 2014 . Kemudian, penulis melanjutkan Pendidikan Sekolah Menengah Pertama di SMP Negeri 1 Sumberejo pada tahun 2014 sampai tahun 2017. Penulis melanjutkan Sekolah Menengah Atas di SMA Negeri 1 Sumberejo pada tahun 2017 sampai tahun 2020.

Pada tahun 2020, penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa S1 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung (Unila). Selama menjadi mahasiswa, penulis merupakan penerima beasiswa Karya Salemba Empat (KSE). Selain itu, penulis juga aktif dalam berbagai organisasi yaitu sebagai Bendahara Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) FMIPA Unila, sebagai Bendahara Paguyuban Beasiswa KSE Unila, dan aktif dalam *Comunnity Development*.

Pada bulan Januari sampai Februari 2023 penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Badan Pendapatan Daerah Provinsi Lampung. Pada bulan Juli sampai Agustus 2023, sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu kepada masyarakat, penulis melaksanakan kegiatan Kuliah Kerja Nyata (KKN) tingkat nasional yaitu KKN Kebangsaan sebagai perwakilan Universitas Lampung yang dilaksanakan di desa Kumba, Jagoi Babang Provinsi Kalimantan Barat. Pada bulan November 2023, penulis sebagai perwakilan beasiswa KSE melaksanakan kegiatan *Summit Leadership Camp* di Cirebon, Jawa Barat.

KATA INSPIRASI

”Jika kamu berbuat baik kepada orang lain (berarti) kamu berbuat baik pada dirimu sendiri”

(Q.S Al-Isra : 7)

”Setetes keringat orangtuaku seribu langkahku untuk maju”

(Penulis)

”Hidup adalah perjalanan yang pada setiap detiknya terdapat pelajaran untuk diri kita. Lakukanlah sesuatu yang akan membuat dirimu di masa depan berterima kasih kepada dirimu yang sekarang. Beranilah untuk mencoba dan jangan takut pada kegagalan ”

(Ibu Dosen Pembimbing Tercinta)

”Selalu ada harga dalam sebuah proses. Nikmati saja lelah-lelah itu. Lebarkan lagi rasa sabar itu. Semua yang kau investasikan untuk menjadikan dirimu serupa yang kau impikan, mungkin tidak akan selalu lancar. Tapi, gelombang-gelombang itu yang nanti bisa kau ceritakan”

(Boy Candra)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin,

Puji dan syukur kehadirat Allah Subhanahu Wata'ala atas limpahan nikmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad Shallallahu 'Alaihi Wasallam.

Dengan penuh syukur, kupersembahkan karya ini kepada:

Keluarga Tercinta

Terimakasih kepada Bapak dan Ibu tersayang yang selalu menjadi sosok terkuat dalam memotivasi penulis, selalu mendoakan untuk kebaikan anak-anaknya, selalu memberikan kasih sayang dan cinta. Menjadi suatu kebanggaan memiliki orang tua yang mendukung penuh anaknya untuk mencapai cita-cita. Terimakasih juga kepada kedua kakakku yang selalu menjadi pelindung untuk adik perempuan satu-satunya ini.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat berjasa dalam membantu, memberikan masukan, arahan, serta ilmu yang berharga.

Sahabat – Sahabatku

Terimakasih kepada sahabat – sahabatku atas semua do'a, dukungan, semangat, serta canda tawa keceriaan selama masa perkuliahan ini.

Almamater Tercinta Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul ”Penerapan Teori Himpunan *Rough* pada Homomorfisma Modul atas Ring” dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada:

1. Allah Subhanalahu Wata'ala atas limpahan rahmat dan karunia-Nya yang telah diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

2. Bapak, Ibu, Kak Ian, dan Kak Iky yang selalu menjadi pengingat agar selalu berada dijalan Allah SWT, sukses didunia maupun diakhirat, selalu memberikan do'a dan dukungan kepada penulis, semoga kita bisa bersama-sama menuju Jannah Allah SWT. Aamiin yaa Rabbal'alamin

3. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Dosen Pembimbing I yang telah menjadi dosen terbaik sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini, menjadi sosok role model bagi penulis, serta memberikan banyak pengalaman dan relasi kepada penulis di masa perkuliahan. Semoga Allah SWT catat sebagai amal jariyah dan melimpahkan segala nikmat dan karunia-Nya dalam kehidupan Ibu.

4. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu untuk memberikan arahan, saran, dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini. Semoga Allah SWT catat sebagai amal jariyah dan melimpahkan segala nikmat dan karunia-Nya dalam kehidupan Bapak.

5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji dan Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi yang membangun kepada penulis selama proses penyusunan skripsi ini. Semoga Allah SWT catat sebagai amal jariyah dan melimpahkan segala nikmat dan karunia-Nya dalam kehidupan Bapak.
6. Ibu Widiarti, S.Si., M.Si. yang telah menjadi dosen pembimbing akademik penulis di masa perkuliahan. Semoga Allah SWT mempermudah segala urusan Ibu.
7. Bapak Ibu dosen Jurusan Matematika FMIPA Unila atas segala ilmu, nasihat, arahan, motivasi, dan waktu yang telah diberikan selama penulis menempuh perkuliahan.
8. Terimakasih kepada diri sendiri karena sudah berjuang dan telah mengendalikan diri dari berbagai tekanan diluar keadaan dan tak pernah mau memutuskan untuk menyerah, kamu hebat.
9. Teman – teman satu bimbingan yang sangat support satu sama lain, lisa, aira, sandi dan bidari. Semoga Allah SWT lancarkan segala urusan kita semua.
10. Abang yunda presidium HIMATIKA 2021 yang telah menjadi sosok seorang kakak di masa perkuliahan.
11. Sahabat-sahabatku seluruh pimpinan Himatika 2022 yang telah menjadi rumah dan menyediakan telinga untuk mendengar tanpa menghakimi. Semoga silaturahmi kita akan terus berlanjut.
12. Sahabat terbaiku Sinta, jura, asti, demi,arin, clo, rani, ci misel, anti terimakasih untuk persaudaraan dan kebersamaan selama ini, terimakasih atas segala hal-hal baik yang pernah kalian berikan. Semoga Allah SWT meridhoi langkah kita selanjutnya.
13. Teman-teman KSE Unila, KKN Kebangsaan, dan Leadership Camp yang telah memberikan pengalaman luar biasa.

14. Satu nama spesial yang telah mendukung, mendo'akan, dan memotivasi penulis, Dwiky Ihwan Ma'ruf. Semoga Allah kabulkan seluruh do'a dan harapan kita.
15. Seluruh pihak yang telah mendukung dalam penyelesaian skripsi ini, yang tidak bisa penulis sebutkan satu-persatu, terimakasih banyak.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung,

Anggita Tri Ayu Anisa

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI . . . . **xiv**

DAFTAR TABEL . . . . **xvi**

DAFTAR GAMBAR . . . . **xvii**

I PENDAHULUAN **1**

1.1 Latar Belakang Masalah 1

1.2 Tujuan Penelitian 2

1.3 Manfaat Penelitian 2

II TINJAUAN PUSTAKA **3**

2.1 Himpunan 3

2.2 Relasi 5

2.3 Relasi Ekuivalensi 6

2.4 Ruang Aproksimasi 7

2.5 Aproksimasi Atas dan Aproksimasi Bawah 7

2.6 Grup 8

2.7 Ring 13

2.8 Modul 16

2.9 Himpunan *Rough* 21

2.10 Grup *Rough* 23

2.11 Ring *Rough* 24

2.12 Modul *Rough* 25

2.13 Homomorfisma Modul *Rough* atas Ring *Rough* 26

III METODE PENELITIAN **27**

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian 27

3.2 Metode Penelitian 27

IV HASIL DAN PEMBAHASAN **29**

4.1 Kontruksi Homomorfisma Modul *Rough* atas Ring *Rough* Menggunakan Himpunan Berhingga 29

4.2 Sifat-sifat Homomorfisma Modul *Rough* atas Ring *Rough* R 38

4.3 Program Homomorfisma Modul *Rough* 56

V KESIMPULAN DAN SARAN **64**

5.1 Kesimpulan 64

5.2 Saran 64

DAFTAR PUSTAKA **65**

DAFTAR TABEL

4.1 Tabel *Cayley* Penjumlahan Modulo 36 pada R 31
4.2 Tabel Invers dari Anggota Himpunan R 32
4.3 Tabel *Cayley* Perkalian Modulo 36 pada R 32
4.4 Tabel *Cayley* Penjumlahan Modulo 36 pada P 33
4.5 Tabel Invers dari Anggota Himpunan P 34
4.6 Tabel *Cayley* Perkalian Skalar Modul *Rough* P atas Ring *Rough* R . 34
4.7 Tabel *Cayley* penjumlahan modulo 36 pada Q 35
4.8 Tabel Invers dari Anggota Himpunan Q 36
4.9 Tabel *Cayley* Perkalian Skalar Modul *Rough* Q atas Ring *Rough* R . 36
4.10 Tabel *Cayley* Penjumlahan Modulo 48 pada R 39
4.11 Tabel Invers dari Anggota Himpunan R 40
4.12 Tabel *Cayley* Perkalian Modulo 48 pada R 40
4.13 Tabel *Cayley* Penjumlahan Modulo 48 pada G 41
4.14 Tabel Invers dari Anggota Himpunan G 42
4.15 Tabel *Cayley* Perkalian Skalar Modul *Rough* G atas Ring *Rough* . . 42
4.16 Tabel *Cayley* Penjumlahan Modulo 48 pada H 43
4.17 Tabel Invers dari Anggota Himpunan H 43
4.18 Tabel *Cayley* Perkalian Skalar Modul *Rough* H atas Ring *Rough* . . 44
4.19 Tabel *Cayley* Penjumlahan Modulo 24 pada R 47
4.20 Tabel Invers dari Anggota Himpunan R 48
4.21 Tabel *Cayley* Perkalian Modulo 24 pada R 48
4.22 Tabel *Cayley* Penjumlahan Modulo 24 pada M 49
4.23 Tabel Invers dari Anggota Himpunan M 50
4.24 Tabel *Cayley* Perkalian Skalar Modul *Rough* M atas Ring *Rough* R 50
4.25 Tabel *Cayley* Perkalian Skalar Modulo 24 dari K 51
4.26 Tabel *Cayley* Perkalian Skalar Submodul *Rough* K atas Ring *Rough* R 51
4.27 Tabel invers dari anggota himpunan K 52
4.28 Tabel *Cayley* Perkalian Skalar Submodul *Rough* K atas Ring *Rough* R 55

DAFTAR GAMBAR

2.1 Contoh Fungsi 10
2.2 Contoh Fungsi Surjektif 11
2.3 Himpunan *Rough* 22

3.1 Diagram Metode Penelitian 28

4.1 *Flowchart* Relasi Ekuivalensi 57
4.2 *Flowchart* Ring *Rough*, dan Modul *Rough* 58
4.3 *Flowchart* Homomorfisma Modul *Rough* 59
4.4 Sintaks Menginput Himpunan Tak Kosong U 60
4.5 Sintaks Pengecekan Relasi Ekuivalensi 60
4.6 Sintaks Pengecekan Himpunan *Rough* 60
4.7 Sintaks Pengecekan Ring *Rough* 61
4.8 Sintaks Pengecekan Modul *Rough* P 61
4.9 Sintaks Pengecekan Modul *Rough* Q 62
4.10 Sintaks Homomorfisma Modul *Rough* 62
4.11 Sintaks Homomorfisma Modul *Rough* 62
4.12 *Output* Homomorfisma Modul *Rough* atas Ring *Rough* R 63

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori himpunan *rough* merupakan perluasan dari teori himpunan yang dikenalkan oleh Zdzislaw Pawlak pada tahun 1982, teori ini digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang bersifat ketidakpastian *(uncertainty)* dan ketidakjelasan *(vagueness)*. Relasi ekuivalensi yang bersifat refleksif, simetris, dan transitif menjadi konsep dasar dari terbentuknya model himpunan *rough* yang membangun partisi-partisi saling lepas yaitu kelas-kelas ekuivalensi. Ruang aproksimasi adalah pasangan himpunan tak kosong U dengan kelas ekuivalensi yang membentuk aproksimasi atas *(upper approximation)* dan aproksimasi bawah *(lower approximation)*. Diberikan ruang aproksimasi (U, R) dan himpunan $X \subseteq U$, aproksimasi bawah dari X pada ruang aproksimasi (U, R) dinotasikan dengan $\underline{Apr}(X)$ merupakan gabungan dari kelas-kelas ekuivalensi yang termuat di dalam himpunan X . Aproksimasi atas dari X pada ruang aproksimasi (U, R), dinotasikan dengan $\overline{Apr}(X)$ yang merupakan gabungan kelas-kelas ekuivalensi yang beririsan dengan himpunan X dan bukan merupakan himpunan kosong. Himpunan X dikatakan himpunan *rough* di ruang aproksimasi (U, R) jika dan hanya jika $\underline{Apr}(X) - \underline{Apr}(X) \neq \emptyset$ atau $\underline{Apr}(X) \neq \underline{Apr}(X)$.

Hubungan antara struktur aljabar dan himpunan *rough* sudah banyak dibahas dalam berbagai penelitian sebelumnya, seperti penelitian yang dilakukan oleh De-song pada tahun 2004 yang membahas tentang grup *rough* dan ring rough beserta dengan sifat-sifatnya, kemudian dilanjutkan dengan penelitian yang dilakukan oleh Miao dkk. pada tahun 2005 yang membahas tentang grup *rough*, subgrup *rough*, dan sifat-sifatnya. Selanjutnya, penelitian yang dilakukan oleh Davvaz & Mahdavipour pada tahun 2006 mengenai modul*rough* dan submodul *rough*, dilanjutkan dengan penelitian yang dilakukan oleh Qun-Feng dkk. pada tahun 2006 yang mengemukakan gagasan mengenai sifat-sifat dari modul *rough*. Pada tahun 2017, Jesmalar melakukan penelitian mengenai homomorfisma grup *rough* beserta dengan sifat-sifatnya. Selain itu, Kumar dkk. pada tahun 2020 melakukan penelitian mengenai subgroup *rough* beserta dengan sifat-sifatnya, serta berbagai penelitian lainnya mengenai penerapan himpunan *rough* pada struktur aljabar.

Suatu himpunan semesta (universal) yang membentuk grup, ring, dan modul menjadi struktur penting dalam aljabar. Pada penelitian ini akan dibahas tentang penerapan teori himpunan *rough* pada struktur aljabar yaitu penerapan himpunan *rough* dalam mengkontruksi homomorfisma modul atas ring dari suatu ruang aproksimasi tertentu, akan dibahas juga mengenai sifat-sifat dari homomorfisma modul *rough* atas ring *rough*. Dikarenakan proses kontruksi yang cukup panjang jika dilakukan secara manual, dalam penelitian ini akan dibuat suatu program menggunakan Phyton untuk mengkontruksi himpunan *rough* pada homomorfisma modul atas ring.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah menerapkan konsep teori himpunan *rough* pada homomorfisma modul dari suatu ruang aproksimasi tertentu. Selanjutnya, akan dibuat program untuk menentukan apakah suatu fungsi merupakan suatu homomorfisma modul *rough* atas ring *rough* dari himpunan berhingga.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. menjadi sarana pembelajaran dan referensi untuk mengembangkan wawasan dalam mempelajari penerapan konsep himpunan *rough* dalam struktur aljabar;
2. menambah pengetahuan mengenai penerapan konsep himpunan *rough* pada homomorfisma modul atas ring.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Himpunan

Himpunan dapat dipandang sebagai kumpulan objek-objek yang didefinisikan dengan jelas. Objek-objek dalam himpunan ini dapat berupa bilangan, hewan, orang, sungai, dan lain sebagainya. Pengertian himpunan juga dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1.1 Himpunan adalah perkumpulan objek-objek yang didefinisikan dengan jelas. Didalam himpunan terdapat objek-objek yang disebut elemen atau anggota himpunan. Himpunan S yang memiliki sebanyak berhingga elemen disebut dengan himpunan berhingga, sedangkan himpunan S yang memiliki elemen sebanyak tak hingga dinamakan himpunan tak hingga. Selanjutnya, banyaknya elemen S dinyatakan sebagai $|S|$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Berikut diberikan salah satu contoh himpunan.

Contoh 2.1.2 Terdapat himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ merupakan himpunan berhingga yang memiliki 6 elemen. Himpunan bilangan asli $N = \{1, 2, 3, \cdots\}$ merupakan himpunan tak hingga.

Selanjutnya, akan diberikan definisi beserta contoh himpunan bagian. Berikut definisi dari himpunan bagian.

Definisi 2.1.3 Himpunan A dikatakan himpunan bagian B jika dan hanya jika semua anggota-anggota di A adalah anggota himpunan di B. Himpunan bagian A dari himpunan B dinotasikan dengan $A \subseteq B$ (Wibisiono, 2008).

Berikut diberikan contoh himpunan bagian.

Contoh 2.1.4 Diberikan himpunan bilangan genap $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $A = \{4, 8\}$, maka A merupakan himpunan bagian dari B.

Definisi 2.1.5 Diberikan himpunan A dan B. Himpunan A dan B dikatakan sama jika setiap elemen A merupakan elemen B dan setiap elemen B merupakan elemen A, dinotasikan dengan $A = B$ jika dan hanya jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Contoh 2.1.6 Jika himpunan $A = \{2, 4, 6, 8\}$ dan $B = \{2, 4, 6, 8\}$ maka $A = B$.

Selanjutnya, diberikan definisi irisan dua himpunan sebagai berikut.

Definisi 2.1.7 Diberikan himpunan A dan B. irisan himpunan A dan B, dinotasikan $A \cap B$ didefinsikan sebagai berikut: $A \cap B = \{x|x \in A$ dan $x \in B\}$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Berikut diberikan contoh irisan dua himpunan.

Contoh 2.1.8 Diberikan himpunan $A = \{2, 4, 6, 8\}$ dan $B = \{2, 3, 4, 7\}$. Irisan himpunan A dan B, yaitu $A \cap B = \{2, 4\}$.

Himpunan juga memiliki sifat saling lepas, dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1.9 Diberikan himpunan A dan B. Himpunan A dan B dikatakan saling lepas *(disjoint)* jika $A \cap B = \emptyset$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Contoh 2.1.10 Misalkan himpunan $A = \{a, b, c, d, e\}$, dan $B = \{f, g, h, i, j\}$. Karena $A \cap B = \emptyset$. Oleh karena itu, himpunan A dan B saling lepas.

Selanjutnya akan diberikan definisi mengenai selisih suatu himpunan yang dijelaskan sebagai berikut.

Definisi 2.1.11 Diberikan himpunan A dan B. selisih himpunan A dan B, dinotasikan dengan A/B =$\{x|x \in A$, tetapi $x \notin B\}$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Berikut contoh selisih suatu himpunan.

Contoh 2.1.12 Berdasarkan Contoh 2.1.8, selisih himpunan A dan B dinyatakan sebagai berikut. $A/B = \{6, 8\}$.

Selanjutnya akan dijelaskan mengenai himpunan tak kosong sebagai berikut.

Definisi 2.1.13 Diberikan himpunan tak kosong A dan B. Hasil kali cartesius dari A dan B, dinotasikan dengan $A \times B$, didefinsikan sebagai berikut :
$A \times B = \{(x, y)|x \in A, y \in B\}$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Berikut merupakan contoh dari himpunan tak kosong.

Contoh 2.1.14 Berdasarkan Contoh 2.1.8, hasil kali cartesius dari A dan B dinyatakan sebagai berikut.
$A \times B = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 7), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 7), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 7), (8, 2), (8, 3), (8, 4), (8, 7)\}$.

Selanjutnya, dibahas mengenai himpunan kuasa sebagai berikut.

Definisi 2.1.15 Himpunan kuasa dari himpunan A adalah suatu himpunan yang anggotanya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A itu sendiri. Himpunan kuasa dari suatu himpunan A dinotasikan dengan $P(A)$ (Munir, 2005).

Berikut diberikan contoh himpunan kuasa.

Contoh 2.1.16 Berdasarkan Contoh 2.1.12, himpunan kuasa dari A/B dinyatakan sebagai berikut.
$P(A/B) = \{\emptyset, \{6\}, \{8\}, \{6, 8\}\}$, dengan $|P(A/B)| = 2^2 = 4$.

2.2 Relasi

Secara umum pengertian relasi adalah hubungan. Namun, relasi dalam matematika adalah aturan yang menghubungkan anggota pada suatu himpunan dengan anggota himpunan lainnya, definisi mengenai relasi dapat dijelaskan sebagai berikut.

Definisi 2.2.1 Diberikan himpunan X dan Y. Suatu relasi R dari X ke Y adalah himpunan bagian dari $X \times Y$. Jika $(x, y) \in R$, maka dikatakan bahwa x berelasi R terhadap y dan dinyatakan dengan xRy (Usman, 2022).

Berikut merupakan contoh relasi.

Contoh 2.2.2 Diberikan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{x, y, z\}$. Jika didefinisikan $R = \{(2, x), (2, y), (3, x)\} \subseteq A \times B$, maka R adalah relasi dari himpunan A ke B. Karena $(2, x) \in R$, dapat dikatakan bahwa 2 berelasi dengan x dapat ditulis $2Rx$.

2.3 Relasi Ekuivalensi

Setelah memahami definisi relasi, selanjutnya akan dibahas mengenai relasi ekuivalensi yang dijelaskan pada definisi sebagai berikut.

Definisi 2.3.1 Relasi R pada himpunan A disebut relasi ekuivalensi jika R memiliki sifat refleksif, simetris, dan transitif.

1. Relasi R disebut refleksif pada himpunan A jika dan hanya jika aRa untuk setiap $a \in A$;
2. Relasi R disebut simetris pada himpunan A jika dan hanya jika aRb maka bRa untuk setiap $a, b \in A$;
3. Relasi R disebut transitif pada himpunan A jika dan hanya jika aRb dan bRc maka aRc untuk setiap $a, b, c \in A$ (Susilowati, 2016).

Berikut diberikan contoh relasi ekuivalensi.

Contoh 2.3.2 Diberikan relasi R yang didefinsikan pada himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$ yang didefinsikan sebagai berikut:

$$xRy \Leftrightarrow x^2 + 4y = y^2 + 4x,$$

untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$.
Akan dibuktikan bahwa R meruapakan relasi ekuivalensi.

1. Diberikan sebarang $x \in \mathbb{Z}$, berlaku xRx karena $x^2 + 4x = x^2 + 4x$ jadi R merupakan relasi refleksif.

2. Diberikan sebarang $x, y \in \mathbb{Z}$ dengan xRy, artinya $x^2 + 4y = y^2 + 4x$. Diperoleh $y^2 + 4x = x^2 + 4y$, sehingga yRx, jadi R merupakan relasi simetris.

3. Diberikan sebarang $x, y, z \in \mathbb{Z}$ dengan xRy dan yRz. karena xRy diperoleh $x^2+4y = y^2+4x \Leftrightarrow x^2-4x = y^2-4y$. Di lain pihak, karena yRz diperoleh $y^2+4z = z^2+4y \Leftrightarrow y^2-4y = z^2-4z$. Dengan demikian diperoleh $x^2-4x = y^2-4y = z^2-4z$, dengan kata lain $x^2-4x = z^2-4z \Leftrightarrow x^2+4z = z^2+4x$. Oleh karena itu, diperoleh xRz. Jadi, terbukti R relasi transitif.

Terbukti bahwa R merupakan relasi ekuivalensi.

2.4 Ruang Aproksimasi

Setelah memahami definisi dan contoh mengenai himpunan dan relasi ekuivalensi, selanjutnya akan dibahas mengenai definisi ruang aproksimasi. Berikut definisi dari ruang aproksimasi.

Definisi 2.4.1 Pasangan (U, θ) dimana $U \neq \emptyset$ dan θ adalah relasi ekuivalensi pada U disebut dengan ruang aproksimasi (Davvaz dkk., 2021).

Berikut diberikan contoh ruang aproksimasi.

Contoh 2.4.2 Berdasarkan Contoh 2.3.2, ditunjukan bahwa R merupakan relasi ekuivalensi pada $\mathbb{Z}$ dan himpunan $\mathbb{Z}$ bukan himpunan kosong, maka pasangan $(\mathbb{Z}, R)$ merupakan ruang aproksimasi.

2.5 Aproksimasi Atas dan Aproksimasi Bawah

Setelah memahami definisi ruang aproksimasi, akan dibahas mengenai definisi aproksimasi atas dan aproksimasi bawah dari suatu himpunan.

Definisi 2.5.1 Diberikan ruang aproksimasi $K = (U, R)$ dan X adalah himpunan bagian dari U. Aproksimasi bawah dan aproksimasi atas didefinisikan sebagai berikut:
$\underline{Apr}(X) = \{x|[x]_R \subseteq X\}$;
$\overline{Apr}(X) = \{x|[x]_R \cap X \neq \emptyset\}$.
$\underline{Apr}(X)$ disebut aproksimasi bawah dari X dan $\overline{Apr}(X)$ disebut aproksimasi atas dari X di ruang aproksimasi K (Miao dkk., 2005).

Berikut merupakan contoh aproksimasi atas dan aproksimasi bawah.

Contoh 2.5.2 Diberikan ruang aproksimasi (U, R), dengan himpunan

$$U = \{y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_{10}\}.$$

R adalah relasi ekuivalensi pada U dengan kelas-kelas ekuivalensi sebagai berikut:
$E_1 = \{y_1, y_2\}$;
$E_2 = \{y_3, y_4\}$;
$E_3 = \{y_5, y_6, y_7\}$;
$E_4 = \{y_8, y_9\}$;
$E_5 = \{y_{10}\}$.
Jika dipilih $X = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$, maka aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari X adalah $\underline{Apr}(X) = E_1 \cup E_2 = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, dan $\overline{Apr}(X) = E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7\}$.

2.6 Grup

Dasar dari pembentukan struktur grup adalah operasi biner. Sebelum membahas mengenai definisi grup, terlebih dahulu memahami definisi operasi biner. Berikut definisi operasi biner.

Definisi 2.6.1 Operasi $*$ pada himpunan G adalah suatu operasi biner jika operasi $*$ merupakan fungsi $G \times G \to G$. Dengan kata lain, operasi $*$ pada anggota himpunan G adalah operasi biner jika untuk setiap dua anggota a, b di G, maka $(a * b)$ juga di G (Grillet, 2007).

Berikut akan diberikan contoh operasi biner.

Contoh 2.6.2 Diberikan himpunan bilangan asli N dengan operasi penjumlahan $+$ yang didefinisikan dengan pemetaan $+ : N \times N \to N$, dengan pengaitan $(a, b) \to (a + b)$. Karena $N \neq \emptyset$ dan untuk setiap $(a, b) \in N$, berlaku $(a + b) \in N$. jadi, terbukti bahwa operasi penjumlahan pada bilangan asli merupakan operasi biner.

Setelah memahami operasi biner yang merupakan dasar dari pembentukan struktur grup, selanjutnya akan dijelaskan mengenai definisi grup.

Definisi 2.6.3 Grup $(G, *)$ adalah himpunan tak kosong G dengan operasi biner $*$ dan memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. operasi biner $*$ bersifat asosiatif;
2. terdapat elemen identitas e untuk operasi biner $*$;
3. untuk setiap elemen $x \in G$, terdapat $x^{-1} \in G$ sehingga $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$ (Grillet, 2007).

Berikut ini merupakan contoh grup.

Contoh 2.6.4 Berdasarkan Contoh 2.6.2, diberikan himpunan bilangan asli N dan operasi $+$ merupakan operasi biner pada N. Akan dibuktikan $\langle N, + \rangle$ merupakan suatu grup sebagai berikut:

1. untuk setiap $a, b, c \in N$, berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$. Jadi, operasi $+$ bersifat asosiatif di N;
2. terdapat elemen identitas yaitu $0 \in N$, sehingga $a + 0 = 0 + a = a$, untuk setiap $a \in N$;
3. untuk setiap $a \in N$ terdapat a^{-1} (invers dari a) yaitu $(-a) \in N$. Sedemikian sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

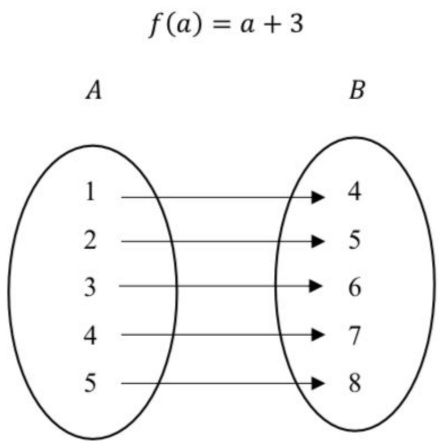
Karena himpunan N dengan operasi penjumlahan $+$ memenuhi aksioma-aksioma grup, terbukti $\langle N, + \rangle$ adalah grup.

Setelah memahami definisi grup, akan diberikan definisi mengenai fungsi dan sifat-sifatnya sebagai berikut.

Definisi 2.6.5 Fungsi merupakan relasi khusus dari himpunan A ke himpunan B dengan syarat semua anggota himpunan A memiliki pasangan dengan anggota himpunan B dan setiap anggota A berpasangan dengan satu anggota himpunan B (Krisdiyanto, 2013).

Untuk lebih memahami definisi fungsi, akan diberikan contoh fungsi sebagai berikut.

Contoh 2.6.6 Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, dan $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Didefinisikan $f : A \to B$, dengan $f(a) = a+3$. Akan ditunjukan bahwa f merupakan fungsi.
Perhatikan gambar berikut.



Gambar 2.1 Contoh Fungsi

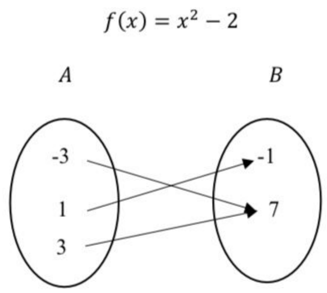
Fungsi memiliki beberapa sifat-sifat yaitu surjektif, injektif, dan bijektif. Berikut ini akan dijelaskan definisi sifat-sifat fungsi.

Berikut ini merupakan definisi suatu fungsi yang bersifat surjektif.

Definisi 2.6.7 Suatu fungsi $f : A \to B$ disebut fungsi surjektif, jika untuk setiap $b \in B$ mempunyai pasangan di A (Krisdiyanto, 2013).

Setelah memahami definisi fungsi surjektif, selanjutnya akan diberikan contoh fungsi surjektif.

Contoh 2.6.8 Diberikan himpunan $A = \{-3, 1, 3\}$ dan $B = \{-1, 7\}$. Didefinisikan $f : A \rightarrow B$ dengan $f = x^2 - 2$, untuk setiap $a \in A$. Akan ditunjukan f merupakan merupakan fungsi surjektif.
Perhatikan gambar berikut.



Gambar 2.2 Contoh Fungsi Surjektif

Selanjutnya akan diberikan definisi suatu fungsi yang bersifat injektif.

Definisi 2.6.9 Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi injektif atau fungsi satu-satu, jika setiap $b \in B$ yang mempunyai pasangan di A hanya mempunyai satu pasangan di B (Krisdiyanto, 2013).

Berikut merupakan contoh fungsi injektif.

Contoh 2.6.10 Diberikan fungsi$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dengan $f(a) : 3a - 2$, untuk setiap $a \in R$. Jika diberikan sebarang $a, b \in R$ dengan $f(a) = f(b)$, maka diperoleh $3a - 2 = 3b - 2 \Leftrightarrow a = b$. Oleh karena itu, terbukti bahwa fungsi f merupakan fungsi injektif.

Setelah memahami definisi fungsi yang bersifat surjektif dan injektif, selanjutnya akan dijelaskan mengenai fungsi yang bersifat bijektif yang merupakan gabungan dari kedua fungsi yang bersifat surjektif dan injektif.

Definisi 2.6.11 Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi bijektif, jika untuk setiap $b \in B$ mempunyai pasangan di A dan hanya mempunyai satu pasangan di A.

Dengan kata lain, fungsi bijektif adalah fungsi injektif dan surjektif (Krisdiyanto, 2013).

Berikut merupakan contoh fungsi bijektif.

Contoh 2.6.12 Diberikan fungsi $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yang didefinisikan dengan $f(a) = a-2$ adalah fungsi bijektif. Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$ dengan $f(a) = f(b)$. Hal ini berarti $a-2 = b-2 \Leftrightarrow a = b$, sehingga f fungsi injektif. Selanjutnya, untuk fungsi $b = a - 2 \Leftrightarrow a = b + 2$ yang memenuhi prapeta dari b, sehingga f fungsi surjektif. Karena f merupakan fungsi injektif dan fungsi surjektif jadi dapat disimpulkan bahwa f merupakan fungsi bijektif.

Selanjutnya akan dibahas mengenai grup komutatif.

Definisi 2.6.13 Grup $(G, *)$ dikatakan grup Abel atau grup komutatif jika sifat komutatif berlaku pada operasi biner $*$, yaitu $a * b = b * a$, untuk setiap $a, b \in G$ (Chaudhuri, 2017).

Berikut diberikan contoh grup komutatif.

Contoh 2.6.14 Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ merupakan grup komutatif atau grup komutatif terhadap operasi penjumlahan, karena $x + y = y + x$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{N}$.

Setelah membahas grup komutatif, selanjutnya akan dibahas mengenai subgrup dari suatu grup. Terdapat aksioma-aksioma tertentu di dalam subgrup yang akan dijelaskan dalam definisi berikut.

Definisi 2.6.15 Jika H merupakan himpunan tak kosong dari suatu grup G, maka dikatakan subgrup dari G jika H membangun grup terhadap operasi yang sama pada grup G (Gallian, 2010).

Berikut merupakan contoh subgrup.

Contoh 2.6.16 Diberikan grup bilangan bulat dengan operasi penjumlahan $(\mathbb{Z}, +)$. Jika $4\mathbb{Z} = \{4n | n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}$, yang merupakan semua bilangan bulat kelipatan

3. Jika $(3\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup, maka dapat disimpulkan bahwa $3\mathbb{Z}$ merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}$.

Selanjutnya, akan dibahas mengenai homomorfisma grup yang dijelaskan pada definisi sebagai berikut.

Definisi 2.6.17 Diberikan grup G dan G', suatu pemetaan μ dari G ke G' dikatakan homomorfisma grup jika,

$$\mu(ab) = \mu(a)\mu(b),$$

untuk setiap $a, b \in G$ (Riduansyah dkk.., 2015).

Berikut merupakan contoh homomorfisma grup.

Contoh 2.6.18 Diberikan grup G dan G', didefinisikan $f : G \to G'$, dengan $f(g) = 5g$, untuk setiap $g \in G$.

Akan ditunjukan bahwa f merupakan homomorfisma grup.
Diberikan sebarang $g, h \in G$, berlaku:

$$\begin{aligned} f(g \cdot h) &= 5(g \cdot h) \\ &= 5g \cdot 5h \\ &= f(g) \cdot f(h). \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa f merupakan homomomorfisma grup.

2.7 Ring

Setelah memahami operasi biner dan grup komutatif yang menjadi dasar terbentuknya ring. Berikut diberikan definisi ring.

Definisi 2.7.1 Ring R adalah himpunan dengan dua operasi biner, penjumlahan (dilambangkan dengan $a + b$) dan perkalian (dilambangkan dengan $a \times b$), yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. $\langle R, +\rangle$ merupakan grup komutatif;

2. operasi $\times$ bersifat asosiatif, $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ untuk setiap $a, b, c \in R$;

3. berlaku hukum distributif kiri dan hukum distributif kanan, untuk setiap $a, b, c \in R$, yaitu:
   $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$, dan
   $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$ (Dummit & Foote, 2004).

Berikut merupakan contoh ring.

Contoh 2.7.2 Diberikan F himpunan semua fungsi $f : R \to R$ untuk setiap $a, b \in F$ dan $x \in R$, didefinisikan

$$(a + b)(x) = a(x) + b(x),$$

dan

$$(ab)(x) = a(x)b(x).$$

Akan ditunjukan bahwa $\langle F, +, \cdot\rangle$ merupakan ring.

1. $\langle F, +, \cdot\rangle$ merupakan grup komutatif.

2. Untuk setiap $a, b, c \in F$ dan $x \in R$ berlaku
   $((ab)c)(x) = (ab)(x)c(x) = a(x)b(x)c(x) = a(x)(bc)(x) = (a(bc))(x)$.
   Jadi, $(ab)c = a(bc)$ untuk setiap $a, b, c \in F$.

3. Untuk setiap $a, b, c \in F$ dan $x \in R$, berlaku:

$$\begin{aligned}(a(b + c))(x) &= a(x)(b + c)(x) \\ &= a(x)(b(x) + c(x)) \\ &= a(x)b(x) + a(x)c(x) \\ &= (ab)(x) + (ac)(x) \\ &= (ab + ac)(x);\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}((a+b)c)(x) &= (a+b)(x)c(x)\\ &= (a(x)+b(x))c(x)\\ &= a(x)c(x)+b(x)c(x)\\ &= (ac)(x)+(bc)(x)\\ &= (ac+bc)(x).\end{aligned}$$

Jadi, berlaku hukum distributif kiri dan hukum distributif kanan pada F. Berdasarkan pembahasan tersebut, $\langle F, +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

Setelah membahas tentang ring beserta contohnya, berikut ini diberikan definisi homomorfisma ring.

Definisi 2.7.3 Diberikan ring R_1 dan R_2. Pemetaan $\mu : R_1 \to R_2$ merupakan homomorfisma ring jika memenuhi:

1. $\mu(a+b) = \mu(a) + \mu(b)$;
2. $\mu(ab) = \mu(a)\mu(b)$,

untuk setiap $a, b \in R$. (Faisol, 2009).

Berikut ini merupakan contoh homomorfisma ring.

Contoh 2.7.4 Diberikan ring R dan R'. Didefinisikan $f : R \to R'$, dengan $f(a) = 2a$, untuk setiap $a \in R$.

1. Diberikan sebarang $a, b \in R$, berlaku:

$$\begin{aligned}f(a+b) &= 2(a+b)\\ &= 2a+2b\\ &= f(a)+f(b).\end{aligned}$$

2. Diberikan sebarang $a, b \in R$, berlaku:

$$\begin{aligned} f(a \cdot b) &= 2(a \cdot b) \\ &= 2a \cdot 2b \\ &= f(a) \cdot f(b). \end{aligned}$$

Dikarenakan seluruh aksioma terpenuhi, terbukti bahwa f merupakan homomorfisma ring.

2.8 Modul

Sebelumnya telah dibahas mengenai operasi biner, grup, dan ring yang merupakan dasar pembentukan modul atas ring, selanjutnya akan diberikan definisi mengenai modul kiri dan modul kanan atas ring R.

Definisi 2.8.1 Diberikan ring R. Modul kiri atas R adalah himpunan M bersama dengan operasi:

1. operasi biner $+$ pada M, sehingga $\langle M, +\rangle$ merupakan grup komutatif.
2. operasi $\cdot : R \times M \to M$, dengan $\dot{(}r, m)$ dinotasikan dengan rm, sehingga untuk setiap $r, s \in R$ dan $m, n \in M$, berlaku:
   (a) $(r + s)m = rm + sm$;
   (b) $(rs)m = r(sm)$;
   (c) $r(m + n) = rm + rn$;
   (d) jika R memiliki elemen satuan 1, maka $1m = m$. (Adkins & Weintraub, 1992).

Setelah dibahas mengenai definisi modul kiri atas ring, berikut ini akan dibahas mengenai definisi modul kanan atas ring.

Definisi 2.8.2 Diberikan ring R. Modul kanan atas R adalah himpunan M bersama dengan operasi:

1. operasi biner $+$ pada M, sehingga $\langle M, +\rangle$ merupakan grup komutatif.
2. operasi $\vdots M \times R \to M$, dengan $\cdot(r, m)$ dinotasikan dengan rm, sehingga untuk setiap $r, s \in R$ dan $m, n \in M$, berlaku:
   (a) $m(r + s) = mr + ms$;
   (b) $m(rs) = (mr)s$;
   (c) $(m + n)r = mr + nr$;
   (d) jika R memiliki elemen satuan 1, maka $m1 = m$. (Adkins & Weintraub, 1992).

Setelah memahami Definisi 2.8.1 dan Definisi 2.8.2 selanjutnya akan diberikan contoh modul atas ring R.

Contoh 2.8.3 Diberikan sebarang ring R. Grup komutatif R^n dengan operasi pergandaan skalar:

$$t(r_1, r_2, \ldots, r_n) = (tr_1, tr_2 \ldots, tr_n)$$

untuk setiap $t \in R$ dan $(r_1, r_2, \ldots, r_n) \in R^n$.
Akan ditunjukan bahwa R^n merupakan modul kiri atas R untuk setiap $t, u \in R$ dan $(r_1, r_2, \ldots, r_n), (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in R^n$, berlaku:

$$\begin{aligned} t((r_1, r_2, \ldots, r_n) + (s_1, s_2, \ldots, s_n)) &= t(r_1 + r_2, +s_1 + s_2 \ldots, r_n + s_n) \\ &= (tr_1 + tr_2, +ts_1 + ts_2 \ldots, tr_n + ts_n) \\ &= (tr_1, tr_2, \ldots, tr_n) + (ts_1, ts_2, \ldots, ts_n) \\ &= t(r_1, r_2, \ldots, r_n) + t(s_1, s_2, \ldots, s_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (tu)(r_1, r_2, \ldots, r_n) &= ((tu)r_1, (tu)r_2, \ldots, (tu)r_n) \\ &= (t(ur_1), t(ur_2), \ldots, t(ur_n)) \\ &= t(ur_1, utr_2, \ldots, utr_n) \\ &= t(u(r_1, r_2, \ldots, r_n)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(t+u)(r_1,r_2,\ldots,r_n) &= ((t+u)r_1,(t+u)r_2,\ldots,(t+u)r_n)\\ &= (tr_1+ur_1,tr_2+ur_2,\ldots,tr_n+ur_n)\\ &= (tr_1,tr_2,\ldots,tr_n)+(ur_1,ur_2,\ldots,ur_n)\\ &= t(r_1,r_2,\ldots,r_n)+u(r_1,r_2,\ldots,r_n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1(r_1,r_2,\ldots,r_n) &= (1r_1,1r_2,\ldots,1r_n)\\ &= (r_1,r_2,\ldots,r_n)\end{aligned}$$

Jadi, R^n merupakan modul kiri atas R.

Selanjutnya, diberikan definisi submodul sebagai berikut.

Definisi 2.8.4 Diberikan R-modul M. Suatu himpunan tak kosong $S \subseteq M$, himpunan S disebut submodul dari M jika dan hanya jika memenuhi sifat:

1. $s_1 - s_2 \in S$, untuk setiap $s_1, s_2 \in S$;
2. untuk setiap $r \in R$ dan $s \in S$ memenuhi $r\dot{s} \in S$ (Malik dkk., 1998).

Berikut merupakan contoh submodul.

Contoh 2.8.5 Diberikan modul $\mathbb{Z}$ atas $\mathbb{Z}$, himpunan $2\mathbb{Z}$ merupakan submodul dari $\mathbb{Z}$. Karena apabila diambil sebarang $2z_1, 2z_2 \in 2\mathbb{Z}$ dan $r \in \mathbb{Z}$, diperoleh bahwa $2z_1 - 2z_2 = 2(z_1 - z_2) \in 2\mathbb{Z}$, dan $r2z_1 = 2(rz_1) \in 2\mathbb{Z}$.
Jadi, terbukti bahwa $2\mathbb{Z}$ merupakan submodul $\mathbb{Z}$ atas $\mathbb{Z}$.

Selanjutnya akan dijelaskan mengenai definisi homomorfisma modul atas ring sebagai berikut.

Definisi 2.8.6 Diberikan M, N modul-modul atas ring R. Fungsi $f : M \to N$ adalah homomorfisma modul atas ring jika:

1. $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$, untuk setiap $m_1, m_2 \in M$;

2. $f(am) = af(m)$, untuk setiap $a \in R, m \in M$ (Dummit & Foote, 1999).

Berikut merupakan contoh dari homomorfisma modul atas ring.

Contoh 2.8.7 Diberikan modul $\mathbb{Z}$ atas ring $\mathbb{Z}$, didefinisikan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, dengan $f(a) = 2a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$.

1. Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$, berlaku:

$$\begin{aligned} f(a+b) &= 2(a+b) \\ &= 2a + 2b \\ &= f(a) + f(b). \end{aligned}$$

2. Diberikan sebarang $n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}$, berlaku:

$$\begin{aligned} f(na) &= 2(na) \\ &= n(2a) \\ &= nf(a). \end{aligned}$$

Jadi, f merupakan homomorfisma modul atas ring R dari $\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}$.

Pada homomorfisma modul atas ring terdapat sifat-sifat yang akan dijelaskan sebagai berikut.

Definisi 2.8.8 Fungsi f disebut monomorfisma modul atas ring R jika f injektif (1-1), yaitu untuk setiap $m_1, m_2 \in M_1, f(m_1) = f(m_2) \Rightarrow m_1 = m_2$ (Sripatmi & Anwar, 2015).

Definisi 2.8.9 Fungsi f disebut epimorfisma modul atas ring R jika f surjektif (onto), yaitu $Im(f) = M_2$ (Sripatmi & Anwar, 2015).

Definisi 2.8.10 Fungsi f disebut isomorfisma modul atas ring R jika f bijektif (injektif dan surjektif) (Sripatmi & Anwar, 2015).

Setelah diberikan definisi mengenai monomorfisma modul, epimorfisma modul, dan isomorfisma modul, kemudian diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.8.11 Diberikan modul M dengan M-modul. Pemetaan $f : M \to M$ dengan $f(x) = -x$, untuk setiap $x \in M$ merupakan isomorfisma modul, diperoleh:

$$f(x+y) = -(x+y) = -(x) + -(y) = f(x) + f(y);$$

dan

$$f(nx) = -(nx) = n(-x) = nf(x).$$

Terbukti, f merupakan homomorfisma modul.

1. Jika diketahui $f(x) = f(y)$ maka $-x = -y$, akibatnya diperoleh $x = y$. Jadi, terbukti bahwa f bersifat injektif yaitu monomorfisma modul.
2. Untuk setiap $x \in M$, terdapat $-x \in M$ sehingga $x = -(-x) = f(-x)$. Akibatnya, diperoleh bahwa f bersifat surjektif yaitu epimorfisma modul.
3. Karena bijektif (injektif dan surjektif) , terbukti bahwa f merupakan isomorfisma modul.

Selanjutnya, diberikan teorema utama (fundamental) homomorfisma, untuk lebih jelasnya perhatikan teorema berikut ini.

Teorema 2.8.12 Diberikan M_1 dan M_2 masing masing adalah modul atas ring R. Jika fungsi $f : M_1 \to M_2$ merupakan homomorfisma dengan $Ker(f) = K$ maka pemetaan,

$$\sigma : M_1/K \to Im(f)$$
$$m_1 + K \to \sigma(m_1 + K) = f(m_1),$$

untuk setiap $m_1 + K \in M_1/K$ adalah isomorfisma *rough*.

Bukti:

Berikut ini ditunjukan bahwa σ merupakan suatu isomorfisma *rough*.

1. Akan dibuktikan apakah σ *-well defined.*

   Diberikan sebarang $a+K, b+K \in M_1/K$, misalkan $a+K = b+K$. Menurut kesamanan dua koset, diperoleh bahwa $a-b \in K$, karena $K = ker(f)$ maka diperoleh $f(a-b) = 0$, sehingga $f(a) = f(b)$ atau $\sigma(a+K) = \sigma(b+K)$. Jadi terbukti bahwa σ merupakan suatu pemetaan *well defined.*

2. Akan dibuktikan apakah σ merupakan homomorfisma R.

   Diberikan sebarang $a+K, b+K \in M_1/K$, dan $r \in R$ berlaku,

   $$\sigma((a+K)+(b+K)) = f(a)+f(b) = \sigma(a+K)+\sigma(b+K)$$

   dan

   $$\sigma(r(a+K)) = \sigma((ra)+K) = f(ra) = rf(a) = r\sigma(a+K).$$

   Jadi, terbukti bahwa σ merupakan homomorfisma modul atas ring R.

3. Akan dibuktikan apakah σ bersifat injektif.

   Diberikan sebarang $f(m), f(n) \in Im(f)$ dengan $f(m) = f(n)$. Akan ditunjukkan $m+K = n+K$. Karena $f(m) = f(n)$, maka $f(m-n) = 0$. Sehingga, $m-n \in Ker(f) = K$. Akibatnya, $m+K = n+K$. Jadi, terbukti bahwa σ bersifat injektif.

4. Akan dibuktikan apakah σ bersifat surjektif.

   Diambil sebarang $z \in Im(f)$, maka terdapat $a \in M_1$ sehingga $z = f(a)$. Berarti ada $a+K \in M_1/K$ sehingga memenuhi $z = \sigma(a+K)$. Jadi, terbukti bahwa σ bersifat surjektif.

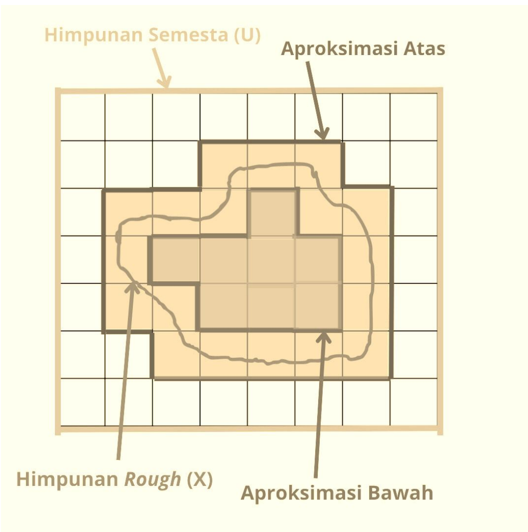
Oleh karena itu, terbukti bahwa σ merupakan isomorfisma.

2.9 Himpunan *Rough*

Pada awal tahun 1980-an himpunan *rough* pertama kali dikenalkan oleh Pawlak. Menurut Pawlak (2002), metode himpunan *rough* adalah suatu pendekatan matematis baru untuk menganalisa pola data yang bersifat samar atau tak pasti. Setelah memahami Definisi 2.5 mengenai aproksimasi bawah dan aproksimasi atas, berikut diberikan definisi mengenai himpunan *rough*.

Definisi 2.9.1 Misalkan R adalah relasi ekuivalensi pada himpunan semesta U, pasangan (U, R) adalah ruang aproksimasi. Suatu himpunan bagian $X \subseteq U$, jika $\overline{Apr}(X) - \underline{Apr}(x) \neq \emptyset$, maka X disebut himpunan *rough* (Pawlak, 1982).

Untuk lebih memahami definisi himpunan *rough*, akan diberikan ilustrasi dan contoh sebagai berikut.



Gambar 2.3 Himpunan *Rough*

Berdasarkan Gambar 2.9.3 dapat dilihat ilustrasi dari himpunan *rough* pada ruang aproksimasi tertentu.

Contoh 2.9.2 Berdasarkan Contoh 2.5.2 diperoleh aproksimasi bawah yakni $\underline{Apr}(X) = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ dan aproksimasi atas yakni $\overline{Apr}(X) = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7\}$. Selanjutnya akan dibentuk pasangan berurutan aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari X yang dinotasikan sebagai berikut:

$Apr(X) = \{\{y_1, y_2, y_3, y_4\}\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7\}\}$ yang merupakan himpunan *rough* didalam ruang aproksimasi (U, R).

2.10 Grup *Rough*

Setelah memahami definisi dan contoh dari himpunan *rough*, selanjutnya himpunan *rough* akan diterapkan pada grup hingga, sehingga membentuk grup *rough*. Berikut merupakan definisi dari grup *rough*.

Definisi 2.10.1 Diberikan ruang aproksimasi $K = (U, R)$ dan operasi biner $*$ pada U. Himpunan $G \subseteq U$ disebut grup *rough* jika $Apr(G) = (\underline{Apr}(G), \overline{Apr}(G))$ memenuhi:

1. $p * q \in \overline{Apr}(G)$, untuk setiap $p, q \in G$;
2. $(p * q) * r = p * (q * r)$ terpenuhi di $\overline{Apr}(G)$, untuk setiap $p, q, r \in \overline{Apr}(G)$ (berlaku sifat asosiatif di $\overline{Apr}(G)$);
3. terdapat $e \in \overline{Apr}(G)$, sehingga untuk setiap $p \in G$, $x * e = e * x = x$ (e disebut elemen identitas *rough* di G);
4. untuk setiap $p \in G$, terdapat $q \in G$, sehingga $p * q = q * p = e$ (elemen q disebut elemen invers dari p di G) (Miao dkk., 2005).

Setelah membahas mengenai definisi grup *rough* berikut diberikan definisi mengenai grup komutatif *rough*.

Definisi 2.10.2 Grup *rough* G disebut grup komutatif *rough* jika untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$ (Miao dkk., 2005).

Selain definisi grup *rough* dan grup komutatif *rough* berikut ini merupakan definisi subgrup *rough*.

Definisi 2.10.3 Diberikan grup *rough* G dengan operasi biner $*$ dan himpunan tak kosong H, dengan $H \subseteq G$. H merupakan subgrup *rough* dari G jika H juga merupakan grup *rough* terhadap operasi biner $*$ yang sama dengan G (Kumar & Sah., 2020).

Selanjutnya akan diberikan definisi mengenai homomorfisma grup *rough* yang dijelaskan sebagai berikut.

Definisi 2.10.4 Diberikan (U, R),$(U^{'}, R^{'})$ merupakan dua ruang aproksimasi, dan $*.\overline{*}$ merupakan dua operasi biner atas $U, U^{'}$. Misalkan $X \subseteq U$, $X^{'} \subseteq U^{'}$, $\overline{Apr}(X)$, $\overline{Apr}(X^{'})$ merupakan dua subgrup dari $U, U^{'}$ disebut homomorfisma grup *rough* jika terdapat pemetaan $f : \overline{Apr}(X) \to \overline{Apr}(X^{'})$ sedemikian sehingga $f(x * y) = f(x)(\overline{*})f(y)$ untuk setiap $x, y \in U, U^{'}$ (Jesmalar., 2017).

2.11 Ring *Rough*

Setelah dibahas mengenai grup *rough*, selanjutnya diberikan himpunan *rough* dengan dua operasi biner yang membentuk ring *rough*. Berikut merupakan definisi ring *rough*.

Definisi 2.11.1 Sistem aljabar $\langle R, +.* \rangle$ disebut ring *rough* jika memenuhi aksioma-aksioma berikut.

1. $\langle R, + \rangle$ merupakan grup komutatif *rough* terhadap operasi $+$;
2. $\langle R, * \rangle$ merupakan semigrup *rough* terhadap operasi $*$ atau R bersifat asosiatif;
3. Untuk setiap $s, t, u \in R$, berlaku hukum distributif kanan $(s + t) * u = (s * u) + (t * u)$ dan hukum distributif kiri $s * (t + u) = (s * t) + (s * u)$ di $\overline{Apr}(R)$ (Isaac & Neelima, 2013).

Selanjutya, akan diberikan definisi mengenai subring *rough* yang dijelaskan sebagai berikut.

Definisi 2.11.2 Diberikan ring *rough* R dengan operasi $+$ dan $*$ serta himpunan tak kosong T dengan $T \subseteq R$. Himpunan T disebut subring *rough* dari R jika T juga merupakan ring *rough* terhadap operasi yang sama dengan R (Miao dkk, 2005).

2.12 Modul *Rough*

Setelah diberikan definisi ring *rough*, berikut merupakan definisi modul *rough* atas ring *rough*.

Definisi 2.12.1 Diberikan ring *rough* $\langle \overline{Apr}(R), +, *\rangle$ dan grup komutatif *rough* $\langle \overline{Apr}(M), +\rangle$. $\overline{Apr}(M)$ disebut modul kanan *rough* atas ring *rough* $\overline{Apr}(R)$, jika terdapat pemetaan $\overline{Apr}(M) \times \overline{Apr}(R) \to \overline{Apr}(M)$, $(x, a) \to xa$, sehingga:

1. $(x + y)a = xa + ya, a \in \overline{Apr}(R); x, y \in \overline{Apr}(M);$
2. $x(a + b) = xa + xb, a, b \in \overline{Apr}(R); x \in \overline{Apr}(M);$
3. $x(ab) = (xa)b, a, b \in \overline{Apr}(R); x \in \overline{Apr}(M);$
4. $1x = x$, dengan 1 merupakan elemen unit dari $\overline{Apr}(R)$ dan $x \in \overline{Apr}(M)$ (Miao dkk., 2005).

Selain itu, akan diberikan definisi modul kiri *rou*gh atas ring *rough* sebagai berikut.

Definisi 2.12.2 Diberikan ring *rough* $\langle \overline{Apr}(R), +, *\rangle$ dan grup komutatif *rough* $\langle \overline{Apr}(M), +\rangle$. $\overline{Apr}(M)$ disebut modul kiri *rough* atas ring *rough* $\overline{Apr}(R)$, jika terdapat pemetaan $\overline{Apr}(R) \times \overline{Apr}(m) \to \overline{Apr}(M)$, $(a, x) \to ax$, sehingga:

1. $a(x + y) = ax + ay, a \in \overline{Apr}(R); x, y \in \overline{Apr}(M);$
2. $(a + b)x = ax + bx, a, b \in \overline{Apr}(R); x \in \overline{Apr}(M);$
3. $(ab)x = a(bx), a, b \in \overline{Apr}(R); x \in \overline{Apr}(M);$
4. $1x = x$, dengan 1 merupakan elemen unit dari $\overline{Apr}(R)$ dan $x \in \overline{Apr}(M)$ (Miao dkk., 2005).

Selanjutnya, akan dibahas mengenai modul faktor *rough* yang dijelaskan pada definisi sebagai berikut.

Definisi 2.12.3 Diberikan modul *rough* M atas ring *rough* R dan submodul *rough* N dari R- modul *rough* M. Dapat dibentuk grup faktor *rough* $\langle {}^{M}/_{N}, + \rangle$ yang merupakan grup komutatif *rough*, dengan ${}^{M}/_{N} = \{\overline{x} = x + \overline{Apr}(N) \mid x \in M\}$. Didefinisikan perkalian skalar di grup komutatif *rough* ${}^{M}/_{N}$ sebagai berikut:

$$a\overline{x} = a(x + \overline{Apr}(N)) = ax + \overline{Apr}(N),$$

untuk setiap $a \in R, \overline{x} \in {}^{M}/_{N}$. Karena N adalah submodul *rough* dari M, sehingga perkalian skalar di grup komutatif *rough* ${}^{M}/_{N}$ *well defined*. ${}^{M}/_{N}$ membentuk modul *rough* atas ring *rough* R yang disebut dengan modul faktor *rough* (Zhang dkk., 2006).

2.13 Homomorfisma Modul *Rough* atas Ring *Rough*

Setelah memahami seluruh definisi-definisi dan contoh yang sudah diberikan, berikut akan dibahas mengenai homomorfisma modul *rough* atas ring *rough* yang menjadi topik inti dari penelitian ini. Berikut merupakan definisi homomorfisma modul *rough* atas ring *rough*.

Definisi 2.13.1 Diberikan modul *rough* M_1 dan M_2 atas ring *rough* R. Jika terdapat pemetaan f dari $\overline{Apr}(M_1)$ ke $\overline{Apr}(M_2)$. Berlaku,

1. $f(a + b) = f(a) + f(b)$, untuk setiap $a, b \in \overline{Apr}(M_1)$;
2. $f(ax) = af(x)$, untuk setiap $a \in \overline{Apr}(R)$, dan $x \in \overline{Apr}(M_1)$.

Oleh karena itu, f dikatakan homomorfisma dari modul *rough* $\overline{Apr}(M_1)$ ke $\overline{Apr}(M_2)$ (Qun-Feng dkk., 2006).

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2023/2024 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof.Dr.Ir.Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Pada penelitian ini digunakan studi literatur yang diperoleh dari jurnal, buku, dan artikel ilmiah yang berkaitan, serta mengkaji definisi dan contoh yang berhubungan dengan permasalahan pada penelitian. Adapun langkah-langkah yang dilakukan di dalam penelitian ini dapat dilihat pada diagram berikut:

Mempelajari himpunan, grup, ring, modul, homomorfisma modul atas ring, relasi, relasi ekuivalensi, ruang aproksimasi, aproksimasi atas dan aproksimasi bawah, himpunan *rough,* grup *rough,* ring *rough,* modul *rough,* homomorfisma modul *rough* atas ring *rough.*

Tahap 1

Mengkontruksi homomorfisma modul *rough* atas ring *rough* pada suatu himpunan berhingga

Tahap 2

Menyelidiki sifat-sifat homomorfisma modul *rough* atas ring *rough*

Tahap 3

Membuat program untuk menunjukan bahwa suatu himpunan berhingga pada ruang aproksimasi merupakan homomorfisma modul *rough* atas ring *rough*

Gambar 3.1 Diagram Metode Penelitian

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Diberikan modul *rough* M dan M' pada suatu ruang aproksimasi (U, θ), fungsi $f : \overline{Apr}(M) \rightarrow \overline{Apr}(M')$ dikatakan homomorfisma modul *rough* atas ring *rough* R jika dan hanya jika $f(a + b) = f(a) + f(b)$, untuk setiap $a, b \in \overline{Apr}(M)$, dan $f(ax) = af(x)$, untuk setiap $a \in \overline{Apr}(R), x \in \overline{Apr}(M)$. Fungsi f merupakan monomorfisma modul *rough* apabila f injektif, fungsi f merupakan epimorfisma modul *rough* apabila f surjektif, dan fungsi f merupakan isomorfisma modul *rough* apabila f injektif dan surjektif.

Jika modul *rough* M dan M' atas ring *rough* R, maka fungsi $f : \overline{Apr}(M) \rightarrow \overline{Apr}(M')$ merupakan homomorfisma *rough* atas ring *rough* R, berlaku $\overline{Apr}(M)/\ker(f) \cong Im(f)$.

5.2 Saran

Berikut adalah beberapa saran untuk penelitian selanjutnya:

1. pada penelitian ini masih ada sifat-sifat pada homomorfisma modul *rough* yang belum diselidiki sehingga bisa digunakan untuk penelitian selanjutnya;

2. menggunakan himpunan universal lain selain yang ada dalam penelitian ini;

3. menerapkan himpunan rough pada struktur aljabar yang lain dan dapat mengkaji sifat-sifatnya.

DAFTAR PUSTAKA

Adkinds, W.A & Weintraub, S.H. (1992). *Algebra: An Approach via Module Theory*. New York: Springer-Verlag.

Agusfrianto, F. A., Fitriani, & Mahatma, Y. (2022). Rough Rings, Rough Subrings, and Rough Ideals. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications* (JFMA), 5(2), 1-8.

Chaudhuri, A. K. (2017). *Intruduction to Abstract and Linear Algebra*. New Delhi: New Central Book Agency.

Davvaz, B., Mukhlash, I., Soleha. (2021). Himpunan Fuzzy dan Rough Sets. Limit: *Journal of Mathematics and Its Applications*, 18(1), 79-94.

Dummit, D.S., & Foote, R.M. (1999). *Abstract Algebra 3 rd edition*. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Dummit, D. S., & Foote, R. M. (2004). *Abstract Algebra* (3 ed). Jhon Wiley & Sons, Inc.

Faisol, A. (2009). Homomorfisma Ring Deret Pangkat Teritlak Miring. *J. Sains MIPA*. 2(15), 119-124.

Fitriani., dan Faisol, A. (2022). *Grup*.Yogyakarta: Matematika.

Gallian, J. A. (2010). *Contemporary Abstract Algebra* (7 ed). University of Minnesota Duluth.

Grillet, P. A. (2007). *Abstract Algebra* (2 ed). Springer.

Isaac, P & Neelima, C. A. (2013). Rough ideals and their properties. *Journal of Global Research in Mathematical Archieves.* 1(6), 90-97.

Jesmalar, L. (2017). Homomorphism and Isomorphism of Rough Group. *Int. J. Adv. Res. Ideas Innov. Technol.*, vol. 3, no. 3, pp. 1382-1387.

Krisdiyanto, D. (2013). *Relasi dan Fungsi*. PT. Citra Aji Pratama.

Kumar, A., & Sah, S. K. (2020). Roughness in G-modules and its properties. *International Journal for Research in Engineering Application & Management (IJREAM)*, 6(4), 114-118.

Malik, D.S., Mordeson, J.M., & Sen, M.K. (1998). *Fundamental of Abstract 4 th edition*. Addison-Wesey Publishing Company.

Miao, D. Han, S. Li, D & Sun, L. (2005). Rough group, rough subgroup and their properties. *Lecture Notes in Artificial Intelligence*. 104-113.

Munir, R. (2005). *Matematika Diskrit*. Bandung:Informatika.

Pawlak, Z. (1982). Rough set. *International Journal of Computing and Information Sciences.*

Qun-Feng, Z., Al-Min, F., & Shi-xin, Z. (2006). Rough modules and their some properties. *Proceeding of the Fifth International Conference on Machine Learning and Cybernetics*. 2290-2293.

Riduansyah, A., Hijriati, N., & Abdurrahman, S. (2015). Homomorfisma dan Anti-Homomorfisma dari Level Subgrup dalam Subgrup Fuzzy. *Jurnal Matematika Murni dan Terapan*. 2(9), 8-14.

Sripatmi., & Anwar, Y.S. (2015). Perumuman Lemma Snake dan Lemma Lima. *J Pijar MIPA*. 1(10), 76-79.

Usman, M., (2022). *Pengantar Topologi*. CV. Anugrah Utama Raharja.

Susilowati, E. (2016). *Logika Matematika dan Himpunan*. Yogyakarta: Buku Matematika.

Wibisono, S. (2008). *Matematika Diskrit (Edisi Kedua)*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Zhang, Q., Fu, A., & Zhao, S. (2006). Rough Modules and Their Some Properties. *Proceeding of the Fifth International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, 2290-2293.