KONSTRUKSI MODUL FAKTOR *ROUGH* ATAS RING *ROUGH* MENGGUNAKAN KONSEP KOSET

Skripsi

Oleh

AIRA RAHMA GUNAWAN
2017031025

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

ABSTRAK

CONSTRUCTION OF THE ROUGH QUOTIENT MODULES OVER THE ROUGH RING BY USING COSET CONCEPTS

By

Aira Rahma Gunawan

Given an ordered pair (U, θ) where U is a universal set and θ is an equivalence relation on the set U is called an approximation space. The equivalence relation θ is a relation that is reflexive, symmetric, and transitive. This relation will partition the set U into mutually exclusive classes, namely equivalence classes. If the set $X \subseteq U$, then we can determine the upper approximation of the set X, which is the union of equivalence classes that intersect with the set X, denoted by $\overline{Apr}(X)$. Next, we can determine the lower approximation of the set X, which is the union of equivalence classes contained in the set X, denoted by $\underline{Apr}(X)$. The set X is said to be a rough set on (U, θ) if and only if $\overline{Apr}(X) - \overline{Apr}(X) \neq \emptyset$. A rough set X is a rough module if it satisfies certain axioms. This paper discusses the construction of a rough quotient module over a rough ring using the coset concept to determine its equivalence classes and discusses the properties of a rough quotient module over a rough ring related to a rough torsion module. Furthermore, a program using Python is made to determine whether a finite set is a rough quotient module and to determine rough submodules.

Keywords: *Approximation space, rough module, rough quotient module over rough ring, rough torsion module.*

ABSTRAK

KONSTRUKSI MODUL FAKTOR *ROUGH* ATAS RING *ROUGH* MENGGUNAKAN KONSEP KOSET

Oleh

Aira Rahma Gunawan

Diberikan pasangan berurutan (U, θ) dengan U merupakan himpunan semesta dan θ ialah relasi ekuivalensi pada himpunan U disebut ruang aproksimasi. Relasi ekuivalensi θ yaitu suatu relasi yang bersifat refleksif, simetris, dan transitif. Relasi ini akan mempartisi himpunan U menjadi kelas-kelas yang saling asing yaitu kelas ekuivalensi. Jika himpunan $X \subseteq U$, maka dapat ditentukan aproksimasi atas dari himpunan X, yaitu gabungan dari kelas ekuivalensi yang beririsan dengan himpunan X, dinotasikan dengan $\overline{Apr}(X)$. Selanjutnya, dapat ditentukan aproksimasi bawah dari himpunan X, yaitu gabungan dari kelas ekuivalensi yang termuat dalam himpunan X, dinotasikan dengan $\underline{Apr}(X)$. Himpunan X dikatakan himpunan *rough* pada (U, θ) jika dan hanya jika $\overline{Apr}(X) - \underline{Apr}(X) \neq \emptyset$. Himpunan *rough* X merupakan modul *rough* jika memenuhi beberapa aksioma tertentu. Pada penelitian ini dibahas mengenai konstruksi modul faktor *rough* atas ring *rough* menggunakan konsep koset dalam penentuan kelas ekuivalensinya, dan membahas sifat-sifat modul faktor *rough* atas ring *rough* terkait modul torsi *rough*. Lebih lanjut dibuat program menggunakan *Python* untuk menentukan suatu himpunan berhingga merupakan modul faktor *rough* dan untuk menentukan submodul *rough*.

Keywords: *Ruang aproksimasi, modul rough, modul faktor rough atas ring rough, modul torsi rough.*

KONSTRUKSI MODUL FAKTOR *ROUGH* ATAS RING *ROUGH* MENGGUNAKAN KONSEP KOSET

AIRA RAHMA GUNAWAN

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

Judul Skripsi	:	**KONSTRUKSI MODUL FAKTOR *ROUGH* ATAS RING *ROUGH* MENGGUNAKAN KONSEP KOSET**
Nama Mahasiswa	:	***Aira Rahma Gunawan***
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2017031025**
Program Studi	:	**Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**
NIP. 198406272006042001	NIP. 198002062003121003

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim penguji

Ketua	:	**Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**	....
Sekretaris	:	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **21 Maret 2024**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Aira Rahma Gunawan**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2017031025**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Konstruksi Modul Faktor *Rough* atas Ring *Rough* Menggunakan Konsep Koset**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 21 Maret 2024

Penulis,

METERAI TEMPEL

D78E8ALX104928364

Aira Rahma Gunawan

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Aira Rahma Gunawan yang lahir di Bandarjaya pada tanggal 9 Oktober 2002. Penulis merupakan anak pertama dari dua bersaudara yang terlahir dari pasangan Gunawan dan Setyowati.

Penulis menempuh awal pendidikan di TK Permata Bunda pada tahun 2007 sampai dengan tahun 2008. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan Sekolah Dasar di SD Negeri 1 Poncowati pada tahun 2008 sampai tahun 2014. Kemudian, penulis melanjutkan Pendidikan Sekolah Menengah Pertama di SMP Negeri 1 Terbanggi Besar pada tahun 2014 sampai tahun 2017. Penulis melanjutkan Sekolah Menengah Atas di SMA Negeri 1 Terbanggi Besar.

Pada tahun 2020, penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa S1 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung (Unila) melalui jalur SNMPTN. Selama menjadi mahasiswa, pada tahun 2021 penulis merupakan anggota Bidang Minat dan Bakat Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) FMIPA Unila. Pada tahun 2022, penulis merupakan anggota Dinas Pemberdayaan Wanita Badan Eksekutif Mahasiswa (BEM) FMIPA Unila.

Pada bulan Januari sampai Februari 2023, sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu kepada masyarakat, penulis melaksanakan kegiatan Kerja Praktik (KP) di Dinas Bina Marga dan Bina Kontruksi Provinsi Lampung. Pada bulan Juni sampai Agustus penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Pekondoh Gedung, Kecamatan Way Lima, Kabupaten Pesawaran.

KATA INSPIRASI

”Dan mudahkanlah untukku urusanku”
(Q.S At-Thaha: 26)

”Kesuksesan dan kebahagiaan adalah ketika orang yang disayangi dan dicintai merasa bangga dan bahagia karenaku”

”Pengetahuan tidaklah cukup, kita harus mengamalkannya.
Niat tidaklah cukup, kita harus melakukannya.”
(Johann Wolfgang von Goethe)

”Be thankful and giving thanks is one of the keys to happiness”
(Mark Lee)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin,

Puji dan syukur kehadirat Allah Subhanahu Wata'ala atas limpahan nikmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad Shallallahu 'Alaihi Wasallam.

Dengan penuh syukur, kupersembahkan karya ini kepada:

Keluarga Tercinta

Terimakasih kepada Bapak dan Ibuku telah menjadi sosok yang selalu kuandalkan, serta semua do'a, kasih sayang yang diberikan. Terimakasih adikku yang telah memotivasiku untuk bisa menjadi kakak dengan versi terbaik. Terimakasih seluruh keluargaku karena sudah mendukungku dalam segala hal dan selalu memberikan semangat.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat berjasa dalam membantu, memberikan masukan, arahan, serta ilmu yang berharga.

Sahabat – Sahabatku

Terimakasih kepada sahabat – sahabatku atas semua do'a, dukungan, semangat, serta canda tawa keceriaan selama masa perkuliahan ini.

Almamater Tercinta Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul ”Konstruksi Modul Faktor *Rough* Atas Ring *Rough* Menggunakan Konsep Koset” dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing I sekaligus pembimbing akademik atas kesediaan waktu dalam memberikan arahan, motivasi, bimbingan, serta saran kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan, serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku selaku Penguji sekaligus Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
4. Seluruh dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Ibu, Bapak, adek Raka dan keluarga besar yang selalu memotivasi, memberikan dukungan dan do’a kepada penulis.
6. Terimakasih kepada diriku sendiri karena sudah berjuang dan bertahan sejauh ini.

7. Untuk Lisa, Bidari, Anisa (Aem), dan Fegy terimakasih untuk semua motivasi, dukungan, semangat, kebersamaan serta kenangan yang indah dalam menjalani perkuliahan dan selama proses penyusunan skripsi ini.
8. Terimakasih kepada Mark Lee, member EXO, dan NCT yang telah menghibur dan memberi semangat kepada penulis saat pembuatan skripsi.
9. Untuk keluarga kost anjar, terimakasih untuk kebersamaan, kekeluargaan, dan kenangan yang indah selama masa perkuliahan.
10. Teman – teman satu bimbingan, Lisa, Bidari, Sandi, dan Anggita yang telah memberikan semangat, motivasi maupun saran kepada penulis.
11. Teman – teman Jurusan Matematika angkatan 2020 yang sudah banyak membantu selama masa perkuliahan.
12. Semua pihak yang membantu dalam proses penyusunan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebut satu persatu.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 21 Maret 2024

Aira Rahma Gunawan

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori himpunan *rough* dikenalkan pertama kali oleh seorang matematikawan yang bernama Zdzislaw Pawlak pada tahun 1982. Teori ini merupakan generalisasi atau perluasan dari teori himpunan klasik, yaitu teknik pendekatan matematika untuk mengelola informasi yang tidak lengkap dan mengatasi ketidakpastian dalam menganalisa dan pengklasifikasian data. Pada teori himpunan *rough* yang menjadi gagasan kunci dari terbentuknya teori ini yaitu relasi ekuivalensi dan ruang aproksimasi. Relasi ekuivalensi merupakan suatu relasi yang bersifat refleksif, simetris, dan transitif. Relasi ini akan mempartisi himpunan menjadi kelas-kelas yang saling asing yaitu kelas ekuivalensi. Pasangan berurut dari himpunan semesta U dan relasi ekuivalensi θ pada U, yang dinotasikan (U, θ) dinamakan ruang aproksimasi. Diberikan ruang aproksimasi (U, θ), dan himpunan tak kosong $X \subseteq U$. Dari kelas-kelas ekuivalensi pada himpunan U ini dapat ditentukan aproksimasi atas dari himpunan X, yaitu gabungan kelas-kelas ekuivalensi yang beririsan dengan himpunan X, dinotasikan dengan $\overline{Apr}(X)$. Selanjutnya dapat ditentukan aproksimasi bawah dari himpunan X, yaitu gabungan kelas-kelas ekuivalensi yang termuat dalam himpunan X, dinotasikan dengan $\underline{Apr}(X)$. Himpunan X dikatakan sebagai himpunan *rough* pada (U, θ) jika dan hanya jika $\overline{Apr}(X) - \underline{Apr}(X) \neq \emptyset$.

Beberapa peneliti sebelumnya telah melakukan penelitian tentang teori himpunan *rough* diantaranya yaitu, Miao dkk. pada tahun 2005 membahas mengenai grup *rough*, subgrup *rough*, koset *rough* dan sifat-sifatnya (Miao dkk., 2005). Kemudian, Davvaz dan Mahdavipour pada tahun 2006 melakukan penelitian mengenai modul *rough* dan submodul *rough* (Davvaz & Mahdavipour, 2006). Berikutnya, penelitian yang dilakukan oleh Zhang dkk. pada tahun 2006 membahas mengenai modul *rough*, modul faktor *rough*, dan beberapa sifatnya (Zhang dkk., 2006). Selanjutnya, Praba dkk. pada tahun 2015 mengkaji penerapan himpunan *rough* pada monoid regular komutatif (Praba dkk., 2015). Pada tahun 2019, Alharbi dkk. melakukan penelitian terkait grup faktor *rough* dan teorema isomorfisma *rough* (Alharbi dkk., 2020).). Kemudian pada tahun 2022, Nugraha dkk. menyelidiki penerapan konsep himpunan *rough* pada struktur grup (Nugraha dkk., 2022). Hafifullah dkk. pada tahun 2022 membahas mengenai sifat-sifat barisan V-Coexect *rough* dalam grup *rough* (Hafifullah dkk., 2022), dan penelitian dilakukan oleh Agusfrianto dkk. pada tahun 2022 membahas mengenai ring *rough*, subring *rough*, dan ideal *rough* (Agusfrianto dkk., 2022). Berikutnya, Yanti dkk. pada tahun 2023 membahas mengenai penerapan konsep himpunan *rough* pada struktur modul proyektif (Yanti dkk., 2023).

Berdasarkan penelitian sebelumnya, pada penelitian ini akan dibahas konstruksi modul faktor *rough* atas ring *rough* dari suatu ruang aproksimasi menggunakan konsep koset. Pada penelitian ini kelas-kelas ekuivalensinya merupakan koset-koset dari suatu himpunan berhingga. Dalam penelitian ini akan dibahas juga mengenai sifat-sifat modul faktor *rough* atas ring *rough* yaitu terkait modul torsi *rough*. Lebih lanjut, akan dibuat program menggunakan *Phyton* untuk menentukan himpunan berhingga merupakan modul faktor *rough* atas ring *rough* dan sifat-sifatnya.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah mengontruksi struktur modul faktor *rough* atas ring *rough* dengan menggunakan konsep koset dari suatu ruang aproksimasi, dan menyelidiki sifat-sifat modul faktor *rough* atas ring *rough* yaitu terkait modul torsi *rough*. Selain itu, akan dibuat program untuk menentukan suatu himpunan berhingga merupakan modul faktor *rough* atas ring *rough* dan submodul faktor *rough* menggunakan program *Python*.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. menambah pengetahuan mengenai penerapan teori himpunan *rough* dalam mengontruksi struktur modul faktor atas ring dengan menggunakan konsep koset;

2. memberikan pengetahuan mengenai konsep modul faktor *rough* atas ring - *rough* dan sifat-sifatnya terkait modul torsi *rough*.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini membahas definisi-definisi dasar yang menjadi teori pendukung dalam menyelesaikan penelitian ini.

2.1 Himpunan

Konsep himpunan awalnya dikembangkan oleh Georg Cantor pada tahun 1845-1918, yang merupakan seorang matematikawan yang berkebangsaan Jerman. Konsep himpunan adalah dasar dari banyak struktur matematika dan memiliki aplikasi dalam berbagai cabang matematika, termasuk aljabar, teori bilangan, analisis real, dan lain-lain.
Berikut ini diberikan definisi himpunan.

Definisi 2.1.1 Himpunan (*set*) merupakan koleksi atau kumpulan objek-objek yang berbeda terdefinisi dengan baik (*well defined*), artinya ketika diberikan sebarang objek maka selalu dapat ditentukan apakah objek tersebut termasuk dalam sebuah himpunan tertentu atau tidak. Objek-objek yang terdapat dalam himpunan disebut anggota atau elemen. Himpunan dinotasikan dengan huruf kapital misalkan A dan anggota atau elemen himpunan dinotasikan huruf kecil misalkan a (Susilowati, 2016).

Dua himpunan dapat dioperasikan dengan operator tertentu sehingga menghasilkan suatu himpunan baru sebagai hasil operasi tersebut. Berikut diberikan beberapa operasi dua himpunan.

a. Irisan dua himpunan A dan B, ditulis $A \cap B$ adalah himpunan semua elemen semesta x sedemikian sehingga $x \in A$ dan $x \in B$, dinotasikan dengan:

$$A \cap B = \{x \in S |\, x \in A \text{ atau } x \in B\}.$$

b. Gabungan dua himpunan A dan B, ditulis $A \cup B$ adalah himpunan semua elemen semesta x sehingga $x \in A$ atau $x \in B$, dinotasikan dengan:

$$A \cup B = \{x \in S | \ x \in A \text{ dan } x \in B\}.$$

c. Selisih dari dua himpunan A dan B, ditulis $A - B$ adalah himpunan semua elemen semesta x sehingga $x \in A$ dan $x \notin B$, dinotasikan dengan:

$$A - B = \{x \in S | \ x \in A \text{ dan } x \notin B\}$$

(Usman, 2022).

Berikut ini merupakan contoh himpunan.

Contoh 2.1.2 Diberikan contoh himpunan sebagai berikut:

1). Misalkan A menyatakan himpunan bilangan prima kurang kurang dari 40. Himpunan A dapat ditulis dengan $A = \{x | \ x < 40, x \text{ bilangan prima}\}$ atau $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37\}$.

2). Kumpulan negara di Asia Tenggara merupakan suatu himpunan karena objek-objeknya didalamnya terdefinisi dengan baik yaitu negara Indonesia, Malaysia, Singapura, Myanmar, Thailand, Filipina, Laos, Vietnam, Brunei Darussalam, Kamboja, dan Timor Leste.

Setelah memahami definisi dari himpunan, selanjutnya akan diberikan juga definisi dan contoh yaitu mengenai kardinalitas himpunan, himpunan kosong, himpunan semesta, himpunan bagian, dan himpunan kuasa.

Berikut diberikan definisi kardinalitas himpunan.

Definisi 2.1.3 Banyaknya elemen atau anggota di dalam himpunan A disebut kardinalitas dari himpunan A. Kardinalitas dari himpunan A ini dinotasikan dengan $n(A)$ atau $|A|$ (Aisah, 2018).

Berikut ini merupakan contoh kardinalitas himpunan.

Contoh 2.1.4 Himpunan $A = \{x | \ x$ merupakan negara di Asia Tenggara$\}$ atau $A = \{$Indonesia, Malaysia, Singapura, Myanmar, Thailand, Filipina, Laos, Vietnam, Brunei Darussalam, Kamboja, Timor Leste$\}$, sehingga $|A| = 11$.

Setelah memahami definisi dan contoh kardinalitas himpunan, selanjutnya diberikan definisi himpunan kosong sebagai berikut.

Definisi 2.1.5 Himpunan dengan kardinalitas 0 atau himpunan yang tidak memiliki elemen disebut himpunan kosong (*null set*). Himpunan kosong dinotasikan dengan $\emptyset$ atau $\{\}$(Aisah, 2018).

Berikut ini merupakan contoh himpunan kosong.

Contoh 2.1.6 Jika himpunan $E = \{x|\ x$ merupakan bilangan bulat ganjil positif yang kurang dari $1\}$, maka $|E| = 0$. Jadi dapat disimpulkan bahwa E merupakan himpunan kosong atau $E = \emptyset$.

Selanjutnya, definisi himpunan semesta sebagai berikut.

Definisi 2.1.7 Himpunan semesta (*universal set*) adalah himpunan yang memuat seluruh objek yang sedang dibicarakan. Notasi dari himpunan semesta biasanya adalah S atau U (Manik, 2014).

Berikut ini merupakan contoh himpunan semesta.

Contoh 2.1.8 Diberikan himpunan B menyatakan huruf vokal alfabet dan himpunan C menyatakan huruf konsonan alfabet. Himpunan semesta $(U) =$ seluruh huruf alfabet.

Selanjutnya, definisi himpunan bagian sebagai berikut.

Definisi 2.1.9 Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen dari B. Himpunan bagian A dari himpunan B dinotasikan dengan $A \subseteq B$ (Aisah, 2018).

Berikut ini merupakan contoh himpunan bagian.

Contoh 2.1.10 Diberikan himpunan $Z = \{$Indonesia,Malaysia,Thailand$\}$. Berdasarkan Contoh 2.1.4, dapat disimpulkan bahwa himpunan Z merupakan himpunan bagian dari A atau $Z \subseteq A$.

Selanjutnya, definisi himpunan saling lepas sebagai berikut.

Definisi 2.1.11 Himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama, dinotasikan dengan A // B (Aisah, 2018).

Berikut ini merupakan contoh himpunan saling lepas.

Contoh 2.1.12 Jika himpunan $D = \{x | \, x \in P, x < 40\}$ dan $E = \{10, 20, 30, \ldots\}$, maka D // E.

Selanjutnya, definisi himpunan kuasa sebagai berikut.

Definisi 2.1.13 Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri. Himpunan kuasa dari suatu himpunan A dinotasikan dengan $P(A)$ atau 2^A. Jika $|A| = m$, maka $|P(A)| = 2^m$ (Aisah, 2018).

Berikut ini merupakan contoh himpunan kuasa.

Contoh 2.1.14 Diberikan himpunan $T = \{2, 3\}$, diperoleh $|T| = 2$, sehingga $P(T) = 2^2 = 4$. Himpunan kuasa dari himpunan T yaitu:

$$P(T) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}.$$

2.2 Grup

Dalam pembentukan struktur grup ini diperlukan adanya himpunan tak kosong dan operasi biner. Oleh karena itu, sebelum membahas tentang definisi grup, terlebih dahulu akan membahas tentang operasi biner. Berikut definisi operasi biner.

Definisi 2.2.1 Diberikan himpunan tak kosong S. Operasi biner $*$ pada himpunan S adalah fungsi dari $S \times S$ ke S.

$$\begin{aligned} * : S \times S &\to S \\ (a, b) &\mapsto a * b \in S, \end{aligned}$$

untuk setiap $(a, b) \in S \times S$. Dalam kasus tersebut biasanya ditulis dengan $a * b,\ ab,$ atau $*(a, b)$. Himpunan S dan operasi $*$ pada S dilambangkan dengan $\langle S, * \rangle$ (Lipschutz & Lipson, 2007).

Berikut ini diberikan contoh operasi biner.

Contoh 2.2.2 Diberikan himpunan

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} k & 2l \\ 3m & n \end{bmatrix} \mid k, l, m, n \in \mathbb{R} \right\}$$

Akan ditunjukkan operasi perkalian matriks merupakan operasi biner pada G.

Diberikan sebarang dua matriks $\begin{bmatrix} k & 2l \\ 3m & n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} o & 2p \\ 3q & r \end{bmatrix} \in G$, sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} k & 2l \\ 3m & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} o & 2p \\ 3q & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ko + 6lq & 2kp + 2lr \\ 3mo + 3nq & 6mp + nr \end{bmatrix} \in G.$$

Jadi, operasi perkalian matriks merupakan operasi biner pada G.

Setelah memahami definisi dan contoh dari operasi biner, berikut akan diberikan definisi grup.

Definisi 2.2.3 Himpunan tak kosong G disebut grup terhadap operasi biner yang dinyatakan dengan ”$*$”, jika terhadap operasi biner tersebut dipenuhi aksioma berikut.

i) Himpunan G tertutup terhadap operasi biner $*$, yaitu untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$.
ii) Operasi biner $*$ bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.
iii) Terdapat elemen identitas e di G untuk operasi biner $*$, sehingga berlaku $a * e = e * a = a$, untuk setiap $a \in G$.
iv) Untuk setiap $a \in G$, terdapat $a^{-1} \in G$ sehingga berlaku $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$, dimana a^{-1} disebut invers untuk a

(Aisah, 2018).

Berikut diberikan contoh grup.

Contoh 2.2.4 Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_5\backslash\{\overline{0}\}$ dan operasi $\times_5$ merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}_5\backslash\{\overline{0}\}$. Akan dibuktikan bahwa $\langle\mathbb{Z}_5\backslash\{\overline{0}\}\rangle$ merupakan suatu grup.

$$\mathbb{Z}_5\backslash\{\overline{0}\} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\},$$

dengan menggunakan tabel *Cayley* sebagai berikut.

Tabel 2.1 Tabel *Cayley* perkalian modulo 5 pada himpunan $\mathbb{Z}_5\backslash\{\overline{0}\}$

$\times_5$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

i) Dari Tabel 2.1 terlihat bahwa $\mathbb{Z}_5\backslash\{\overline{0}\}$ tertutup terhadap operasi $\times_5$.

ii) Dari Tabel 2.1 terlihat bahwa $\mathbb{Z}_5\backslash\{\overline{0}\}$ asosiatif.

iii) Diberikan sebarang $\overline{a} \in \mathbb{Z}_5\backslash\{\overline{0}\}$, terdapat $\overline{1} \in \mathbb{Z}_5$, sehingga $\overline{a} \times_5 \overline{1} = \overline{a} = \overline{1} \times_5 \overline{a}$. Jadi, terdapat $e = \overline{1} \in \mathbb{Z}_5\backslash\{\overline{0}\}$, sehingga $\overline{a} \times_5 e = \overline{a} = e \times_5 \overline{a}$.

iv) Dari Tabel 2.1 diperoleh:
$(\overline{1})^{-1} = \overline{1}$; $(\overline{2})^{-1} = \overline{3}$; $(\overline{3})^{-1} = \overline{2}$; $(\overline{4})^{-1} = \overline{4}$.
Jadi, untuk setiap $\overline{a} \in \mathbb{Z}_5\backslash\{\overline{0}\}$, terdapat $\overline{a}^{-1} \in \mathbb{Z}_5\backslash\{\overline{0}\}$, sehingga $\overline{a} \times_5 \overline{a}^{-1} = e = \overline{a}^{-1} \times_5 \overline{a}$.

Berdasarkan i), ii), iii), dan iv) terbukti $\langle\mathbb{Z}_5\backslash\{\overline{0}\}, \times_5\rangle$ merupakan grup. Setelah memahami definisi dan contoh dari grup, berikut akan diberikan definisi grup komutatif.

Definisi 2.2.5 Suatu grup $\langle G, *\rangle$ dikatakan grup Abel atau grup komutatif jika sifat komutatif berlaku pada operasi biner $*$, yaitu

$$a * b = b * a,$$

untuk setiap $a, b \in G$ (Chaudhuri, 2017).

Berikut diberikan contoh grup Abel.

Contoh 2.2.6 Himpunan bilangan real tanpa nol $\langle\mathbb{Q}\backslash\{0\}\rangle$ merupakan grup Abel atau grup komutatif terhadap operasi perkalian, karena $a \cdot b = b \cdot a$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$.

Selanjutnya suatu himpunan subset dari himpunan yang merupakan grup dapat membentuk subgrup, berikut definisi mengenai subgrup.

Definisi 2.2.7 Himpunan tak kosong H, dan $H \subseteq G$. Himpunan H disebut subgrup dari G jika H membentuk grup terhadap operasi biner yang sama dengan G. Himpunan H subgrup G dinotasikan dengan $H \leq G$, tetapi $H \neq G$ (Aisah, 2018).

Untuk mengetahui suatu himpunan bagian dari grup merupakan subgrup seperti yang dijelaskan pada Definisi 2.2.7, subgrup dapat ditunjukkan dengan membuktikan aksioma-aksioma pada proposisi berikut ini.

Proposisi 2.2.1 Himpunan H merupakan himpunan bagian dari grup G, dikatakan subgrup jika dan hanya jika:

i) himpunan $H \neq \emptyset$, dan
ii) untuk setiap $x, y \in H, xy^{-1} \in H$ (Aisah, 2018).

Proposisi 2.2.2 Misalkan himpunan $H \neq \emptyset$, dan $H \subseteq G$ disebut subgrup dari G, jika:

i) untuk setiap $xy \in H$, maka $xy \in H$, dan
ii) untuk setiap $x \in H$, terdapat $x^{-1} \in H$ (Aisah, 2018).

Berikut diberikan contoh subgrup.

Contoh 2.2.8 Diberikan grup $\langle\mathbb{Z}, +\rangle$. Jika $p \in \mathbb{Z}$ dan $p\mathbb{Z} = \{pq|q \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}$, yaitu himpunan semua bilangan bulat kelipatan p maka $\langle p\mathbb{Z}, +\rangle$ merupakan grup. Jadi, $p\mathbb{Z}$ merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}$.

Selanjutnya diberikan definisi mengenai koset kiri dan koset kanan dari subgrup H di G beserta contohnya sebagai berikut.

Definisi 2.2.9 Diberikan grup G dan subgrup H di G. Untuk setiap $a \in G$, himpunan $aH = \{ah|h \in H\}$ dinamakan koset kiri H di G yang memuat a. Himpunan $Ha = \{ha|h \in H\}$ dinamakan koset kanan H di G yang memuat a (Gallian, 2017).

Contoh 2.2.10 Diberikan grup $\langle \mathbb{Z}_8, +_8 \rangle$. Akan ditentukan semua koset kiri dan koset kanan dari subgrup $H = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$ di $\mathbb{Z}_8$,

$$\mathbb{Z}_8 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}.$$

Koset-koset kiri dari subgrup $H = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$ di $\mathbb{Z}_8$, yaitu:
$\overline{0} + H = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$; dan
$\overline{1} + H = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\}$.
Koset-koset kanan dari subgrup $H = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$ di $\mathbb{Z}_8$, yaitu:
$H + \overline{0} = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$; dan
$H + \overline{1} = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\}$.

Setelah memahami definisi dan contoh dari koset, selanjutnya akan diberikan definisi homomorfisma grup.

Definisi 2.2.11 Diberikan grup G dan G^*. Pemetaaan $\phi : G \to G^*$ yang bersifat mengawetkan operasi biner disebut homomorfisma jika untuk setiap $a, b \in G$, berlaku $\phi(a * b) = \phi(a) * \phi(b)$ (Aisah, 2018).

Berikut diberikan contoh homomorfisma grup.

Contoh 2.2.12 Diberikan grup $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ dan $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$. Didefinisikan $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, dengan $\phi(a) = 2a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$. Akan dibuktikan apakah ϕ merupakan homomorfisma grup. Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \phi(a + b) &= 2(a + b) \\ &= 2a + 2b \\ &= \phi(a) + \phi(b). \end{aligned}$$

Karena $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ diperoleh ϕ merupakan homomorfisma grup.

Selanjutnya diberikan definisi subgrup normal sebagai berikut.

Definisi 2.2.13 Suatu subgrup N dari grup G dinamakan subgrup normal dari G jika $aN = Na$, untuk setiap $a \in G$, dinotasikan dengan $N \triangleleft G$ (Gallian, 2017).

Berikut diberikan contoh subgrup normal.

Contoh 2.2.14 Berdasarkan Contoh 2.2.10 didapatkan bahwa koset kiri sama dengan koset kanannya atau ditulis $aN = Na$, jadi menunjukkan bahwa $N = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$ merupakan subgrup normal $\mathbb{Z}_8$.

Subgrup normal ini memiliki peran penting dalam pembentukan grup faktor yang sudah dibahas sebelumnya. Setelah memahami mengenai subgrup normal maka selanjutnya akan diberikan definisi grup faktor sebagai berikut.

Definisi 2.2.15 Diberikan grup G dan subgrup normal N dari G. Grup $^{G}/_{N}$ didefinisikan dengan operasi biner $(aN)(bN) = (ab)N$, untuk setiap $aN, bN \in {}^{G}/_{N}$ dinamakan grup faktor (grup kuosien) dari G modulo N (Adkins & Weintraub, 1992).

Telah dibahas bahwa N merupakan subgrup normal dari G jika koset kiri dari N sama dengan koset kanan dari N, yaitu $aN = Na$, untuk setiap $a \in G$. Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 2.2.15, dapat dibentuk grup faktor $^{G}/_{N}$ jika dan hanya jika N merupkan subgrup normal dari G.

Berikut diberikan contoh grup faktor.

Contoh 2.2.16 Diberikan grup $G = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$, dan subgrup normal $N = \langle 5\mathbb{Z}, + \rangle$ dari G, maka $^{G}/_{N} = \{\overline{0} + 5\mathbb{Z}, \overline{1} + 5\mathbb{Z}, \overline{2} + 5\mathbb{Z}, \overline{3} + 5\mathbb{Z}, \overline{4} + 5\mathbb{Z}\}$. Diperoleh:

i) $^{G}/_{N}$ tertutup;

ii) $^{G}/_{N}$ bersifat asosiatif;

iii) $\overline{0} + 5\mathbb{Z}$ merupakan elemen identitas;

iv) $(\overline{0}+5\mathbb{Z})^{-1}=0+5\mathbb{Z}$;
$(\overline{1}+5\mathbb{Z})^{-1}=4+5\mathbb{Z}$;
$(\overline{2}+5\mathbb{Z})^{-1}=3+5\mathbb{Z}$;
$(\overline{3}+5\mathbb{Z})^{-1}=2+5\mathbb{Z}$;
$(\overline{4}+5\mathbb{Z})^{-1}=1+5\mathbb{Z}$.

Berdasarkan i) – iv), dapat disimpulkan bahwa ${}^{G}\!/_{N}$ merupakan grup faktor.

2.3 Ring

Setelah memahami definisi operasi biner dan grup abel atau grup komutatif, yang merupakan menjadi dasar terbentuknya suatu ring. Berikut akan diberikan definisi ring.

Definisi 2.3.1 Diberikan suatu himpunan tak kosong R. Himpunan tak kosong R bersama dua operasi biner $+$ dan $\cdot$ merupakan ring jika memenuhi:

i) $\langle R,+\rangle$ adalah grup Abel;
artinya:
   (1) untuk setiap $a,b,c\in R$ berlaku $(a+b)+c=a+(b+c)$,
   (2) terdapat $0\in R$, sedemikian sehingga $a+0=0+a=a$, untuk setiap $a\in R$, 0 adalah elemen identitas di R,
   (3) untuk setiap $a\in R$, terdapat elemen invers yaitu $-a\in R$, sehingga $a+(-a)=(-a)+a=0$,
   (4) untuk setiap $a,b\in R$, berlaku $a+b=b+a$,

ii) untuk setiap $a,b\in R$, berlaku $a.b\in R$ (berlaku sifat tertutup di R),

iii) untuk setiap $a,b,c\in R$, berlaku $(a\dot{b})\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ (berlaku sifat asosiatif di R),

iv) sifat distributif berlaku untuk perkalian dan penjumlahan, artinya:
   (1) $a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c),\forall a,b,c\in R$ (hukum distribututif kiri),

(2) $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c), \forall a, b, c \in R$ (hukum distributif kanan) (Chaudhuri, 2017).

Ring dinotasikan dengan $\langle R, +, \cdot \rangle$, dengan R merupakan himpunan tak kosong, $+$ dan $\cdot$ merupakan dua operasi biner pada R. Selanjutnya ini akan diberikan contoh ring.

Contoh 2.3.2 Diberikan A himpunan semua fungsi $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Untuk setiap $a, b \in A$ dan $x \in \mathbb{R}$, didefinisikan:

$$(a + b)(x) = a(x) + b(x)$$

dan

$$(ab)(x) = a(x)b(x).$$

i) $\langle A, + \rangle$ merupakan grup abel.

ii) Untuk setiap $a, b \in A$ dan $x \in \mathbb{R}$, berlaku:

$$(ab)(x) = a(x)b(x) \in \mathbb{R}.$$

Jadi, operasi $\cdot$ bersifat tertutup.

iii) Untuk setiap $a, b, c \in A$ dan $x \in \mathbb{R}$, berlaku:

$$\begin{aligned} ((ab)c)(x) &= (ab)(x)c(x) \\ &= a(x)b(x)c(x) \\ &= a(x)(bc)(x) \\ &= (a(bc))(x). \end{aligned}$$

Jadi, $((ab)c)(x) = (a(bc))(x)$ artinya operasi $\cdot$ bersifat asosiatif.

iv) Untuk $a, b, c \in A$ dan $x \in \mathbb{R}$, berlaku:

$$\begin{aligned} (a(b + c))(x) &= a(x)(b + c)(x) \\ &= a(x)(b(x) + c(x)) \\ &= a(x)b(x) + c(x)h(x) \\ &= (ab)(x) + (ac)(x) \\ &= (ab + ac)(x) \end{aligned}$$

dan

$$
\begin{aligned}
((a+b)c)(x) &= (a+b)(x)c(x) \\
&= (a(x)+b(x))c(x) \\
&= a(x)c(x)+b(x)c(x) \\
&= (ac)(x)+(bc)(x) \\
&= (ac+bc)(x).
\end{aligned}
$$

Jadi, berlaku hukum distributif kiri dan kanan pada A.

Berdasarkan pernyataan i), ii), iii), dan iv) terbukti bahwa $\langle A,+,\cdot\rangle$ merupakan ring. Setelah membahas mengenai definisi ring beserta contohnya, sama halnya seperti dalam grup terdapat subgrup begitu juga pada ring terdapat subring. Berikut diberikan definisi subring beserta contohnya.

Definisi 2.3.3 Diberikan himpunan bagian tak kosong S di dalam ring $\langle R,+,\cdot\rangle$. Himpunan S disebut subring dari R jika dan hanya jika berlaku:

i) $u-v \in S$,

ii) $u \cdot v \in S$,

untuk setiap $u,v \in S$ (Chaudhuri, 2017).

Contoh 2.3.4 Diberikan himpunan

$$
M_2(\mathbb{R}) \ = \left\{ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{bmatrix} \mid x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{22} \in \mathbb{R} \right\}
$$

merupakan ring dengan operasi penjumlahan dan perkalian matriks. Diberikan himpunan

$$
K_2(\mathbb{R}) \ = \left\{ \begin{bmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & x_{22} \end{bmatrix} \mid x_{11}, x_{22} \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_2\mathbb{R}
$$

Akan ditunjukkan $K_2(\mathbb{R})$ merupakan subring $M_2(\mathbb{R})$.

i) $K_2(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, karena matriks identitas $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in K_2(\mathbb{R})$.

ii) Diberikan sebarang matriks $X, Y \in K_2(\mathbb{R})$
$X = \begin{bmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & x_{22} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_{11} & 0 \\ 0 & y_{22} \end{bmatrix}, x_{11}, x_{22}, y_{11}, y_{22} \in \mathbb{R}.$
Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} a)\ X - Y &= \begin{bmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & x_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{11} & 0 \\ 0 & y_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_{11} - y_{11} & 0 \\ 0 & x_{22} - y_{22} \end{bmatrix} \in K_2(\mathbb{R}); \\ b)\ X \cdot Y &= \begin{bmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & x_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{11} & 0 \\ 0 & y_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_{11}y_{11} & 0 \\ 0 & x_{22}y_{22} \end{bmatrix} \in K_2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Jadi, berdasarkan i) dan ii) terbukti bahwa $K_2(\mathbb{R})$ merupakan subring di $\langle M_2(\mathbb{R}), +, \cdot \rangle$.

Jika suatu ring komutatif terhadap operasi perkaliannnya maka ring disebut ring abel atau ring komutatif. Diberikan definisi ring komutatif sebagai berikut.

Definisi 2.3.5 Suatu ring $\langle R, +, \cdot \rangle$ dikatakan ring komutatif jika R komutatif terhadap perkalian, yaitu berlaku $a \cdot b = b \cdot a$, untuk setiap $a, b \in R$ (Chaudhuri, 2017).

Berikut diberikan contoh subgrup normal.

Contoh 2.3.6 Ring $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{C}, +, \cdot \rangle$, dan $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$, masing-masing merupakan ring komutatif dengan elemen satuan.

2.4 Modul atas Ring

Setelah memahami definisi operasi biner, grup, dan ring yang merupakan hal-hal yang diperlukan dalam pembentuk modul atas ring. Dalam aljabar abstrak konsep modul atas ring merupakan generalisasi dari pengertian ruang vektor atas lapangan dengan operasi pergandaan skalar yang memenuhi beberapa aksioma. Definisi -

modul atas ring dibedakan menjadi dua yaitu modul kiri dan modul kanan atas ring R. Berikut akan diberikan definisi modul.

Definisi 2.4.1 Diberikan grup komutatif $\langle M, +\rangle$ dan ring R dengan elemen 1_R, serta operasi skalar $\circ : R \times M \to M$. Grup M disebut modul kiri atas ring terhadap operasi $\circ$ dengan memenuhi aksioma-aksioma berikut.

i) $r_1 \circ (m_1 + m_2) = r_1 \circ m_1 + r_1 \circ m_2$;

ii) $(r_1 + r_2) \circ m_1 = r_1 \circ m_1 + r_2 \circ m_1$;

iii) $(r_1 \cdot r_2) \circ m_1 = r_1 \circ (r_2 \circ m_1)$;

iv) $1_R \circ m_1 = m_1$;

untuk setiap $r_1, r_2 \in R$ dan $m_1, m_2 \in M$ (Adkins & Weintraub, 1992).

Definisi 2.4.2 Diberikan grup komutatif $\langle M, +\rangle$ dan ring R dengan elemen 1_R, serta operasi skalar $\circ : M \times R \to M$. Grup M disebut modul kiri atas ring terhadap operasi $\circ$ dengan memenuhi aksioma-aksioma berikut.

i) $(m_1 + m_2) \circ r_1 = m_1 \circ r_1 + m_2 \circ r_1$;

ii) $m_1 \circ (r_1 + r_2) = m_1 \circ r_1 + m_1 \circ r_2$;

iii) $m_1 \circ (r_1 \cdot r_2) = r_1 \circ (m_1 \circ r_1) \circ r_2$;

iv) $m_1 \circ 1_R = m_1$;

untuk setiap $r_1, r_2 \in R$ dan $m_1, m_2 \in M$ (Adkins & Weintraub, 1992).

Berikut diberikan contoh modul atas ring.

Contoh 2.4.3 Diberikan himpunan $M_2(\mathbb{Z})$ adalah himpunan matriks orde dua dengan entri bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Akan diselidiki $M_2(\mathbb{Z})$ merupakan modul kiri atas ring $\mathbb{Z}$.

1) Akan ditunjukkan $\langle M_2(\mathbb{Z}), +\rangle$ merupakan grup komutatif.

   i) Diberikan sebarang $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z})$, dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}.$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}).$$

Oleh karena itu, operasi $+$ bersifat tertutup di $M_2(\mathbb{Z})$.

ii) Diberikan sebarang $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z})$. Telah diketahui bahwa operasi penjumlahan pada matriks bersifat asosiatif, yaitu

$$(A+B)+C = A+(B+C).$$

Oleh karena itu, operasi $+$ bersifat asosiatif di $M_2(\mathbb{Z})$.

iii) Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$.

Karena $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, elemen identitas di $M_2(\mathbb{Z})$ terhadap operasi $+$ adalah $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

iv) Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$.

Karena $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ -a_3 & -a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ -a_3 & -a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, invers dari $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ terhadap operasi $+$ di $M_2(\mathbb{Z})$ adalah $\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ -a_3 & -a_4 \end{bmatrix}$.

v) Diberikan sebarang $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$.

Telah diketahui bahwa operasi penjumlahan pada matriks bersifat komutatif, yaitu

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_1+a_1 & b_2+a_2 \\ b_3+a_3 & b_4+a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \\ &= B+A. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, operasi $+$ bersifat komutatif di $M_2(\mathbb{Z})$.

Dari i), ii), iii), iv), dan v), diperoleh bahwa $\langle M_2(\mathbb{Z}), +$ merupakan grup komutatif.

2) Diberikan sebarang ring Z dan grup komutatif $M_2(\mathbb{Z})$ terhadap operasi pergandaan skalar:

$$r\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra_1 & ra_2 \\ ra_3 & ra_4 \end{bmatrix},$$

untuk setiap $r \in \mathbb{Z}$ dan $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$. Akan ditunjukkan bahwa grup komutatif $M_2(\mathbb{Z})$ merupakan modul kiri atas ring $\mathbb{Z}$.

Untuk setiap yang memenuhi $r, s \in \mathbb{Z}$ dan $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$, berlaku:

i)
$$\begin{aligned} r(A+B) &= r\left\{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}\right\} \\ &= r\begin{bmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r(a_1+b_1) & r(a_2+b_2) \\ r(a_3+b_3) & r(a_4+b_4) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ra_1+rb_1 & ra_2+rb_2 \\ ra_3+rb_3 & ra_4+rb_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} ra_1 & ra_2 \\ ra_3 & ra_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} rb_1 & rb_2 \\ rb_3 & rb_4 \end{bmatrix} \\ &= r\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \\ &= rA + rB. \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}(r+s)A &= (r+s)\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (r+s)a_1 & (r+s)a_2 \\ (r+s)a_3 & (r+s)a_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ra_1+sa_1 & ra_2+sa_2 \\ ra_3+sa_3 & ra_4+sa_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ra_1 & ra_2 \\ ra_3 & ra_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} sa_1 & sa_2 \\ sa_3 & sa_4 \end{bmatrix} \\ &= rA + sA.\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}(rs)A &= (rs)\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (rs)a_1 & (rs)a_2 \\ (rs)a_3 & (rs)a_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r(sa_1) & r(sa_2) \\ r(sa_3) & r(sa_4) \end{bmatrix} \\ &= r(sA).\end{aligned}$$

iv)

$$1 \cdot A = 1 \cdot \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}.$$

Dari i) – iv) disimpulkan bahwa $M_2(\mathbb{Z})$ merupakan modul kiri atas ring $\mathbb{Z}$. Selanjutnya akan dibahas mengenai himpunan bagian dari suatu modul yang juga membentuk modul terhadap operasi pergandaan skalar yang sama dengan operasi pergandaan skalar di modulnya, yang disebut dengan submodul.

Definisi 2.4.4 Diberikan R-modul M. Suatu himpunan tak kosong $N \subseteq M$ dikatakan submodul dari M jika N merupakan subgrup dari M terhadap operasi penjumlahan, serta N merupakan modul atas R terhadap operasi pergandaan skalar yang sama dengan operasi pergandaan pada R-modul M (Wahyuni dkk., 2016).

Untuk mengetahui suatu himpunan bagian dari modul merupakan submodul seperti yang dijelaskan pada Definisi 2.4.4, submodul dapat ditunjukkan dengan membuktikan aksioma-aksioma berikut.

Teorema 2.4.5 Diberikan modul M atas ring R dan N merupakan himpunan bagian tak kosong dari M. Himpunan N merupakan submodul di M jika dan hanya jika memenuhi aksioma:

i) $n_1 - n_2 \in N$, untuk setiap $n_1, n_2 \in N$;

ii) $r \circ n \in N$, untuk setiap $r \in R$ dan $n \in N$ (Wahyuni dkk., 2016).

Berikut diberikan contoh submodul.

Contoh 2.4.6 Diberikan himpunan $\mathbb{R}^3$ atas ring $\mathbb{R}$. Himpunan tak kosong $N \subset \mathbb{R}^3$, dengan

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix} | u, v \in \mathbb{R} \right\}.$$

Akan dibuktikan L merupakan submodul di $\mathbb{R}^3$.

Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \in N$ dan $r \in \mathbb{R}$, sehingga

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u - x \\ v - y \\ 0 \end{bmatrix} \in N$$

dan

$$r \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ru \\ rv \\ 0 \end{bmatrix} \in N.$$

Oleh karena itu, terbukti bahwa N merupakan submodul pada modul $\mathbb{R}^3$ atas ring $\mathbb{R}$.

Setelah memahami definisi mengenai grup komutatif, grup faktor, dan submodul maka selanjutnya akan dijelaskan mengenai terbentuknya modul faktor. Berikut definisi modul faktor beserta contohnya.

Definisi 2.4.7 Diberikan modul M atas ring R dan S merupakan submodul di M. Dapat dibentuk grup faktor $\langle {}^{M}/_{S}, +\rangle$ yang merupakan grup komutatif dengan ${}^{M}/_{S} = \{m + S | m \in M\}$. Didefinisikan perkalian skalar pada grup komutatif ${}^{M}/_{S}$ sebagai berikut:

$$r(m + S) = rm + S,$$

untuk setiap $r \in R, m + S \in {}^{M}/_{S}$. Karena S adalah submodul dari M, sehingga perkalian skalar di grup komutatif ${}^{M}/_{S}$ *well defined*, ${}^{M}/_{S}$ membentuk modul atas R yang disebut dengan modul faktor (Wahyuni dkk., 2016).

Contoh 2.4.8 Diberikan $\mathbb{Z}$ merupakan sebagai $\mathbb{Z}$-modul dan $8\mathbb{Z}$ merupakan submodul di $\mathbb{Z}$. Dapat dibentuk grup faktor ${}^{\mathbb{Z}}/_{8\mathbb{Z}} = \{0 + 8\mathbb{Z}, 1 + 8\mathbb{Z}, 2 + 8\mathbb{Z}, 3 + 8\mathbb{Z}, 4 + 8\mathbb{Z}, 5 + 8\mathbb{Z}, 6 + 8\mathbb{Z}, 7 + 8\mathbb{Z}\}$. Grup komutatif ${}^{\mathbb{Z}}/_{8\mathbb{Z}}$ merupakan modul atas $\mathbb{Z}$ terhadap operasi pergandaan skalar $r(a + 8\mathbb{Z}) = (ra) + 8\mathbb{Z}$, untuk setiap $r \in \mathbb{Z}$ dan $a + 8\mathbb{Z} \in {}^{\mathbb{Z}}/_{8\mathbb{Z}}$. Oleh karena itu, grup komutatif ${}^{\mathbb{Z}}/_{8\mathbb{Z}}$ disebut modul faktor $\mathbb{Z}$ modulo $8\mathbb{Z}$.

Selain membahas mengenai modul faktor, berikutnya akan dibahas terkait elemen torsi, modul torsi dan modul bebas torsi. Berikut definisi elemen torsi beserta contohnya.

Definisi 2.4.9 Diberikan modul M atas ring R. Elemen $m \in M$ dikatakan elemen torsi jika terdapat $r \in R \backslash 0_R$ sedemikian sehingga $rm = 0_M$. Himpunan dari semua elemen torsi di modul M dinotasikan dengan M_T, yaitu
$M_T = \{m \in M \mid rm = 0_M, \text{untuk suatu } r \in R \backslash 0_R\}$ (Adkins & Weintraub, 1992).

Contoh dari elemen torsi sebagai berikut.

Contoh 2.4.10 Elemen torsi dari modul $\mathbb{Z}_7$ atas $\mathbb{Z}$ adalah semua elemen di $\mathbb{Z}_7$. Hal ini dikarenakan:

i) untuk $\overline{0} \in \mathbb{Z}_7$, untuk setiap $r \in \mathbb{Z}\backslash 0$ berlaku $r \cdot \overline{0} = \overline{0}$;

ii) untuk $\overline{1} \in \mathbb{Z}_7$, terdapat $7 \in \mathbb{Z}\backslash 0$ sehingga $7 \cdot \overline{1} = \overline{0}$;

iii) untuk $\overline{2} \in \mathbb{Z}_7$, terdapat $7 \in \mathbb{Z}\backslash 0$ sehingga $7 \cdot \overline{2} = \overline{0}$;

iv) untuk $\overline{3} \in \mathbb{Z}_7$, terdapat $7 \in \mathbb{Z}\backslash 0$ sehingga $7 \cdot \overline{3} = \overline{0}$;

v) untuk $\overline{4} \in \mathbb{Z}_7$, terdapat $7 \in \mathbb{Z}\backslash 0$ sehingga $7 \cdot \overline{4} = \overline{0}$;

vi) untuk $\overline{5} \in \mathbb{Z}_7$, terdapat $7 \in \mathbb{Z}\backslash 0$ sehingga $7 \cdot \overline{5} = \overline{0}$;

vii) untuk $\overline{6} \in \mathbb{Z}_7$, terdapat $7 \in \mathbb{Z}\backslash 0$ sehingga $7 \cdot \overline{6} = \overline{0}$;

Jadi, $M_T(\mathbb{Z}_7) = \mathbb{Z}_7$.

Karena sebelumnya sudah memahami definisi dari elemen torsi, kemudian di bawah ini akan diberikan definisi terkait modul torsi sebagai berikut.

Definisi 2.4.11 Diberikan modul M atas ring R dengan elemen satuan. Modul M disebut modul torsi jika tiap elemen di M merupakan elemen torsi. Atau dengan kata lain modul $M = M_T$ (himpunan semua elemen torsi) (Adkins & Weintraub, 1992).

Berikut diberikan contoh modul torsi.

Contoh 2.4.12 Dapat dilihat pada Contoh 2.4.10, didapatkan bahwa elemen torsi dari modul $\mathbb{Z}_7$ atas $\mathbb{Z}$ adalah semua elemen di $\mathbb{Z}_7$ atau $M = M_T$ sehingga modul $\mathbb{Z}_7$ atas $\mathbb{Z}$ adalah modul torsi.

Lain halnya dengan modul torsi, jika elemen torsi di modulnya hanya satu yaitu hanya 0_M, modul tersebut dikatakan modul bebas torsi, berikut definisinya.

Definisi 2.4.13 Diberikan modul M atas ring R dengan eleman satuan. Modul M disebut modul bebas torsi jika elemen torsi di M hanya 0_M. Dengan kata lain $M_T = \{0_M\}$ (Adkins & Weintraub, 1992).

Berikut diberikan contoh modul bebas torsi.

Contoh 2.4.14 Diberikan modul $\mathbb{Z}_7$ atas ring $\mathbb{Z}_7$. Akan ditunjukkan bahwa modul $\mathbb{Z}_7$ atas ring $\mathbb{Z}_7$ adalah modul bebas torsi.

$$\overline{0} \in M_T(\mathbb{Z}_7), \text{ karena terdapat } \overline{1} \in \mathbb{Z}_7 \text{ sehingga } \overline{1} \cdot \overline{0} = \overline{0}.$$

$M_T(\mathbb{Z}_7) = \overline{0}$ atau elemen torsi dari modul $\mathbb{Z}_7$ atas ring $\mathbb{Z}_7$ hanya $\overline{0}$. Jadi, $M_T(\mathbb{Z}_7) = \{\overline{0}\}$ sehingga modul $\mathbb{Z}_7$ atas ring $\mathbb{Z}_7$ adalah modul bebas torsi.

2.5 Relasi

Setelah membahas grup, ring, dan modul selanjutnya yaitu akan dibahas mengenai relasi yang digunakan pada penelitian ini. Sesuatu aturan yang memasangkan anggota suatu himpunan ke anggota himpunan lain yaitu relasi. Relasi yang digunakan yaitu relasi ekuivalensi, maka dari itu sebelumnya akan diberikan relasi secara umum dari suatu himpunan.

Diberikan definisi relasi sebagai berikut.

Definisi 2.5.1 Relasi biner atau relasi bisa dinotasikan dengan R dari himpunan A ke B merupakan himpunan bagian dari $A \times B$. Relasi R adalah himpunan pasangan terurut (a, b) dari setiap elemen pertama berasal dari A dan setiap elemen kedua berasal dari B (Susilowati, 2016).

Berikut diberikan contoh agar lebih memahami terkait relasi.

Contoh 2.5.2 Diberikan himpunan $A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, dan $B = \{2, 4, 6, 9, 13, 18\}$. Relasi R dari himpunan A ke B didefinisikan sebagai berikut:
$R = \{(a, b) \in A \times B \mid a > b\}$. Diperoleh $R = \{(4, 2), (8, 2), (8, 4), (8, 6), (12, 2), (12, 4), (12, 6), (12, 9), (16, 2), (16, 4), (16, 6), (16, 9), (16, 13)\}$.

Suatu relasi dikatakan relasi ekuivalensi jika memenuhi sifat-sifat khusus. Diberikan definisinya sebagai berikut.

Definisi 2.5.3 Relasi θ dikatakan relasi ekuivalensi pada himpunan M jika θ memenuhi sifat khusus yaitu refleksif, simetris, dan transitif.

i) Relasi θ bersifat refleksif pada M jika dan hanya jika untuk setiap $a \in M$, berlaku $a\theta a$.

ii) Relasi θ bersifat simetris pada M jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in M$, berlaku jika $a\theta b$ maka $b\theta a$.

iii) Relasi θ bersifat transitif pada M jika dan hanya jika untuk setiap $a, b, c \in M$, berlaku jika $a\theta b$ dan $b\theta c$ maka $a\theta c$ (Susilowati, 2016).

Berikut ini contoh relasi ekuvalensi pada suatu himpunan.

Contoh 2.5.4 Diberikan himpunan $M = \mathbb{Z}_{10} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}\}$. Didefinisikan relasi θ pada himpunan M, untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a\theta b$ jika dan hanya jika $a-b = 3k$, dengan $k \in \mathbb{Z}$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa relasi θ merupakan relasi ekuivalensi pada himpunan M.

i) Diberikan sebarang $a \in M$. Karena $a - a = 0 = 3 \cdot 0$ dan $0 \in \mathbb{Z}$, diperoleh $a\theta a$, untuk setiap $a \in M$. Oleh karena itu, relasi θ bersifat refleksif.

ii) Diberikan sebarang $a, b \in M$, dengan $a\theta b$. Artinya $a - b = 3k$ untuk $k \in \mathbb{Z}$. Hal ini berakibat $b - a = 3(-k)$, dengan $-k \in \mathbb{Z}$. Oleh karena itu, $b\theta a$, sehingga relasi θ bersifat simetris.

iii) Diberikan sebarang $a, b, c \in M$, dengan $a\theta b$ dan $b\theta c$. Artinya $a - b = 3k$ dan $c - b = 3l$ untuk $k, l \in \mathbb{Z}$. Hal ini berakibat

$$a - c = (a - b) + (b - c) = 3k + 3l = 3(k + l),$$

dengan $k + l \in \mathbb{Z}$. Oleh karena itu, $a\theta c$, sehingga relasi θ bersifat transitif.

Berdasarkan i), ii), dan iii), diperoleh relasi θ adalah relasi yang bersifat refleksif, simetris dan transitif. Jadi, dapat disimpulkan bahwa relasi θ merupakan relasi ekuivalensi. Di dalam relasi ekuivalensi terdapat partisi-partisi yang disebut kelas ekuivalensi. Diberikan definisi kelas ekuivalensi sebagai berikut.

Definisi 2.5.5 Diberikan relasi θ yang merupakan relasi ekuivalensi pada himpunan M dan $a \in M$. Kelas ekuivalensi dari a pada θ adalah $[a]_\theta = \{x : x \in M \text{ dan } a\theta x\}$. Dengan kata lain, dapat diartikan bahwa kelas ekuivalensi a pada θ memuat semua elemen pada himpunan M yang mempunyai relasi dengan a (Bagirmaz & Ozcan, 2015).

Berikut diberikan contoh kelas ekuivalensi.

Contoh 2.5.6 Berdasarkan Contoh 2.5.4, relasi θ merupakan relasi ekuivalensi pada himpunan M. Diperoleh kelas-kelas ekuivalensi pada Contoh 2.5.4 yaitu:
$E_1 = [\overline{0}] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$;
$E_2 = [\overline{1}] = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{7}\}$;
$E_3 = [\overline{2}] = \{\overline{2}, \overline{5}, \overline{8}\}$.
Diperoleh kelas-kelas ekuivalensi yang diperoleh yaitu E_1, E_2, E_3.

2.6 Ruang Aproksimasi

Setelah mambahas definisi beserta contohnya mengenai relasi ekuivalensi dan kelas ekuivalensi, berikutnya akan diberikan definisi ruang aproksimasi.

Definisi 2.6.1 Pasangan (U, θ) dengan U merupakan himpunan semesta yang tak kosong dan θ merupakan relasi ekuivalensi pada U disebut ruang aproksimasi (Davvaz dkk., 2021).

Berikut ini contoh ruang aproksimasi.

Contoh 2.6.2 Berdasarkan Contoh 2.5.4 telah dibuktikan bahwa θ merupakan relasi ekuivalensi pada himpunan tak kosong S, sehingga pasangan (M, θ) disebut ruang aproksimasi.

Dari kelas ekuivalensi yang sudah dijelaskan, selanjutnya dapat ditentukan aproksimasi atas dan aproksimasi bawah. Sebelum itu diberikan definisi aproksimasi atas dan aproksimasi bawah sebagai berikut.

Definisi 2.6.3 Diberikan himpunan semesta U dan relasi ekuivalensi θ dari U membentuk ruang aproksimasi $K = (U, \theta)$ dan himpunan bagian X dari U atau dinotasikan dengan $X \subseteq U$. Aproksimasi atas dan aproksimasi bawah didefinisikan sebagai berikut.

a. Aproksimasi atas $\overline{Apr}(X)$ adalah gabungan seluruh kelas ekuivalensi yang irisannya dengan X tidak kosong, atau dinyatakan $\overline{Apr}(X) = \{x \in U \mid [x]_\theta \cap X \neq \emptyset\}$.

b. Aproksimasi bawah $\underline{Apr}(X)$ adalah gabungan seluruh kelas ekuivalensi yang termuat di X, atau dinyatakan $\underline{Apr}(X) = \{x \in U \mid [x]_\theta \subseteq X\}$.

Selanjutnya dapat dibentuk pasangan berurut aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari himpunan X dinotasikan yakni $Apr(X) = (\underline{Apr}(X), \overline{Apr}(X))$ pada ruang aproksimasi K (Davvaz dkk., 2021).

Berikut diberikan contoh menentukan aproksimasi atas dan bawah.

Contoh 2.6.4 Diberikan ruang aproksimasi (U, θ) dengan himpunan $U = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{15}\}$ dan θ merupakan relasi ekuivalensi di U dengan kelas ekuivalensi sebagai berikut:
$G_1 = \{x_1, x_2, x_9\}$;
$G_2 = \{x_3, x_5, \}$;
$G_3 = \{x_4, x_7\}$;
$G_4 = \{x_6, x_{10}\}$;
$G_5 = \{x_8, x_{11}, x_{12}, x_{15}\}$;
$G_6 = \{x_{13}, x_{14}\}$.
Diberikan himpunan $X \subseteq U$, dengan $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, maka aproksimasi atas dan aproksimasi bawah dari X sebagai berikut:
$\overline{Apr}(X) = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_9, x_{10}\}$;
$\underline{Apr}(X) = G_2 \cup G_3 = \{x_3, x_4, x_5, x_7\}$.
Diperoleh: $Apr(X) = (x_3, x_4, x_5, x_7, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_9, x_{10})$.

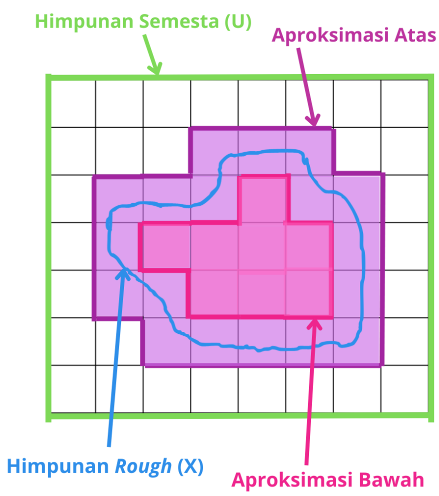
2.7 Himpunan *Rough*

Teori himpunan *rough* dikenalkan pertama kali oleh seorang matematikawan yang bernama Zdzislaw Pawlak pada tahun 1982. Teori himpunan *rough* ini merupakan suatu pendekatan matematika untuk mengelola informasi yang tidak lengkap dan mengatasi ketidakpastian dalam menganalisa pola data. Oleh karena itu, pada sub-bab ini akan memahami definisi dari himpunan *rough* beserta contohnya.

Berikut diberikan definisi dari himpunan *rough*.

Definisi 2.7.1 Diberikan ruang aproksimasi (U, θ) dan X adalah himpunan bagian U. Himpunan X dikatakan himpunan *rough* pada (U, θ) jika dan hanya jika $\overline{Apr}(X) - \underline{Apr}(X) \neq \emptyset$ (Reddy dkk., 2018).

Berikut ini ilustrasi himpunan *rough*.



Gambar 2.1 Ilustrasi himpunan *rough*

Selanjutnya berikut diberikan contoh himpunan *rough*.

Contoh 2.7.2 Lihat kembali pada Contoh 2.6.4 diperoleh aproksimasi bawah yaitu $\underline{Apr}(X) = \{x_3, x_4, x_5, x_7\}$ dan aproksimasi atasnya yaitu $\overline{Apr}(X) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_9, x_{10}\}$. Oleh karena itu, $\overline{Apr}(X) - \underline{Apr}(X) = \{x_1, x_2, x_6, x_9, x_{10}\} \neq \emptyset$. Jadi, himpunan X adalah himpunan *rough*. (Reddy dkk., 2018).

2.8 Grup *Rough*

Selanjutnya akan dibahas mengenai penerapan konsep himpunan *rough* pada grup sehingga membentuk grup *rough*. Berikut diberikan definisi grup *rough*.

Definisi 2.8.1 Diberikan ruang aproksimasi $K = (U, \theta)$ dan operasi biner $*$ pada U. Himpunan $G \subseteq U$ disebut grup *rough* jika memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut:

i) untuk setiap $a, b \in G$, berlaku $a * b \in \overline{Apr}(G)$;

ii) untuk setiap $a, b, c \in G$, berlaku $a*(b*c) = (a*b)*c$, (berlaku sifat asosiatif di $\overline{Apr}(G)$);

iii) terdapat $e \in \overline{Apr}(G)$, sehingga untuk setiap $a \in G$, berlaku $a*e = e*a = a$, (e adalah elemen identitas *rough* dari grup *rough* G);

iv) untuk setiap $a \in G$, terdapat $b \in G$ sehingga $a * b = b * a = e$, (b adalah elemen invers *rough* dari a di G) (Agusfrianto dkk., 2022).

Setelah memahami definisi grup *rough*, berikutnya akan memahami definisi dari subgrup *rough*. Definisi subgrup *rough*, diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.8.2 Diberikan grup *rough* G dan himpunan tak kosong H, dengan $H \subseteq G$. Himpunan H disebut subgrup *rough* dari G jika H juga merupakan grup *rough* dengan operasi biner yang sama dengan G (Kumar dkk., 2020)).

Kemudian subgrup *rough* juga dapat didefiniskan jika memenuhi dua aksioma. Berikut ini diberikan definisi lain subgrup *rough*.

Definisi 2.8.3 Diberikan grup *rough* G dan $H \subseteq G$. Himpunan H merupakan subgrup *rough* dari G jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

i) untuk setiap $a, b \in H, a * b \in \overline{Apr}(H)$;

ii) untuk setiap $a \in H, a^{-1} \in H$ (Agusfrianto dkk., 2022).

Diberikan juga mengenai definisi grup *rough* komutatif sebagai berikut.

Definisi 2.8.4 Grup *rough* G dikatakan grup *rough* komutatif jika untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$, (berlaku sifat komutatif di $\overline{Apr}(G)$) (Kumar dkk., 2020)).

Setelah memahami mengenai, grup *rough*, subgrup *rough* dan grup *rough* komutatif, selanjutnya yang dibahas yakni definisi koset *rough* kanan dan koset *rough* kiri. Berikut diberikan definisi koset *rough* kanan.

Definisi 2.8.5 Diberikan ruang aproksimasi (U, θ), grup *rough* $G \subseteq U$ dan subgrup *rough* H dari G. Himpunan

$$\overline{Apr}(H) * a = \{h * a \mid h \in \overline{Apr}(H), a \in G, h * a \in G\} \cup a,$$

$\overline{Apr}(H) * a$ dikatakan koset *rough* kanan dari H yang memuat elemen a (Miao dkk., 2005).

Selanjutnya yaitu definisi koset *rough* kiri sebagai berikut.

Definisi 2.8.6 Diberikan ruang aproksimasi (U, θ), grup *rough* $G \subseteq U$ dan subgrup *rough* H dari G. Himpunan

$$a * \overline{Apr}(H) = \{a * h \mid a \in G, h \in \overline{Apr}(H), a * h \in G\} \cup a,$$

$a * \overline{Apr}(H)$ dikatakan koset *rough* kiri dari H yang memuat elemen a (Miao dkk., 2005).

Kemudian setelah memahami definisi dari koset *rough* kanan dan koset *rough* kiri, berikutnya jika suatu subgrup *rough* membentuk koset *rough* kanan sama dengan koset *rough* kiri maka dikatakan subgrup normal *rough*. Definisi subgrup normal *rough* sebagai berikut.

Definisi 2.8.7 Diberikan subgrup *rough* N dari grup *rough* G. Jika $a * \overline{Apr}(N) = \overline{Apr}(N) * a$ untuk setiap $a \in G$, maka N disebut subgrup normal *rough* dari G, yang dinotasikan dengan $N \lhd G$ (Zhang dkk., 2006).

Berikut definisi grup faktor *rough*.

Definisi 2.8.8 Diberikan subgrup normal *rough* N dari grup *rough* G dan ${}^{G}/_{N} = \{g\overline{Apr}(N) \mid g \in G\}$. Dapat dibentuk $\langle {}^{G}/_{N}, *\rangle$ yang merupakan grup *rough* yang disebut dengan grup faktor *rough* dari G, dengan $*$ didefinisikan dengan,

$$g_1\overline{Apr}(N) * g_2\overline{Apr}(N) = g_1g_2\overline{Apr}(N)$$

untuk setiap $g_1\overline{Apr}(N), g_2\overline{Apr}(N) \in {}^{G}/_{N}$ (Zhang dkk., 2006).

2.9 Ring *Rough*

Setelah membahas terkait grup *rough*, berikutnya akan diberikan himpunan *rough* dengan dua operasi biner yang membentuk ring *rough*. Berikut ini merupakan definisi dari ring *rough*.

Definisi 2.9.1 Sistem aljabar $\langle R, +, *\rangle$ disebut ring *rough* jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

i) $\langle R, +\rangle$ grup *rough* terhadap operasi $+$;
ii) $\langle R, *\rangle$ semigrup *rough* terhadap operasi $*$;
iii) untuk setiap $a, b, c \in R$, berlaku $(a + b) * c = a * c + b * c$ (hukum distributif kiri) dan $a * (b + c) = a * b + a * c$ (hukum distributif kanan)

(Miao dkk., 2005).

Setelah memahami definisi dari ring *rough* selanjutnya akan dibahas juga definisi dari subring *rough*, sebagai berikut.

Definisi 2.9.2 Diberikan ring rough R dan himpunan tak kosong $S \subseteq R$. Himpunan S dikatakan subring *rough* dari ring *rough* R jika memenuhi aksioma berikut:

i) untuk setiap $s_1, s_2 \in S$, berlaku $s_1 - s_2 \in \overline{Apr}(S)$;
ii) untuk setiap $s_1, s_2 \in S$, berlaku $s_1 * s_2 \in \overline{Apr}(S)$(Miao dkk., 2005).

2.10 Modul *Rough*

Setelah memahami definisi-definisi dan contoh-contoh pada subbab sebelumnya, selanjutnya akan dibahas mengenai modul *rough*, yang mana pada subbab ini juga akan dibahas mengenai modul faktor *rough* atas ring *rough* yang menjadi topik inti dari penelitian ini.

Definisi 2.10.1 Diberikan ring *rough* $\langle R, +, *\rangle$ dengan elemen satuan dan grup *rough* komutatif $\langle M, +^{'}\rangle$. Himpunan M dikatakan modul *rough* kiri atas ring *rough* R jika terdapat pemetaan:

$$\cdot : \overline{Apr}(R) \times \overline{Apr}(M) \rightarrow \overline{Apr}(M)$$
$$(a, x) \mapsto ax$$

berlaku:

i) $a(x +^{'} y) = ax +^{'} ay$;

ii) $(a + b)x = ax +^{'} bx$;

iii) $(a * b)x = a(bx)$;

iv) $1x = x$, dengan 1 merupakan elemen satuan dari R,

untuk setiap $a, b \in R, x, y \in M$ (Zhang dkk., 2006).

Selanjutnya, berikut merupakan definisi dari modul *rough* kanan.

Definisi 2.10.2 Diberikan ring *rough* $\langle R, +, *\rangle$ dengan elemen satuan dan grup *rough* komutatif $\langle M, +^{'}\rangle$. Himpunan M dikatakan modul kanan *rough* atas ring *rough* R jika terdapat pemetaan:

$$\cdot : \overline{Apr}(M) \times \overline{Apr}(R) \rightarrow \overline{Apr}(M)$$
$$(x, a) \mapsto xa$$

berlaku:

i) $(x +^{'} y)a = xa +^{'} ya$;

ii) $x(a+b) = xa +' xb$;

iii) $x(a * b) = (xa)b$;

iv) $x1 = x$, dengan 1 merupakan elemen satuan dari R;

untuk setiap $a, b \in R, x, y \in M$ (Zhang dkk., 2006).

Setelah memahami mengenai modul kiri *rough* dan modul kanan *rough*, berikutnya diberikan definisi mengenai submodul *rough*.

Definisi 2.10.3 Diberikan modul *rough* M dan himpunan tak kosong N, $N \subseteq M$. Himpunan N disebut submodul *rough* dari M, jika N memenuhi aksioma-aksioma berikut:

i) himpunan N merupakan subgrup *rough* dari M;

ii) untuk setiap $a \in R$, $y \in N$, berlaku $ay \in \overline{Apr}(N)$ (Zhang dkk., 2006).

2.11 Modul Faktor *Rough* atas Ring *Rough*

Pada subbab ini akan membahas mengenai definisi dari modul faktor *rough* atas ring *rough*, karena sebelumnya sudah memahami tentang grup *rough* komutatif, subgrup normal *rough*, ring *rough*, modul *rough* dan submodul *rough* maka selanjutnya yang akan dibahas yakni modul faktor *rough* atas ring *rough*.

Diberikan definisi dari modul faktor *rough* atas ring *rough*, sebagai berikut.

Definisi 2.11.1 Diberikan himpunan M adalah modul *rough* atas ring *rough* R dan himpunan S adalah submodul *rough* dari R- modul *rough* M. Dapat dibentuk grup faktor *rough* $\langle {}^{M}/_{S}, + \rangle$ yang merupakan grup *rough* komutatif, dengan ${}^{M}/_{S} = \{\overline{m} = m + \overline{Apr}(S) \mid m \in M\}$. Didefinisikan perkalian skalar di grup *rough* komutatif ${}^{M}/_{S}$ sebagai berikut:

$$r\overline{m} = r(m + \overline{Apr}(S)) = rm + \overline{Apr}(S),$$

untuk setiap $r \in R, \overline{m} \in {}^{M}/_{S}$. Karena S adalah submodul *rough* dari M, sehingga perkalian skalar di grup *rough* komutatif ${}^{M}/_{S}$ *well defined*, ${}^{M}/_{S}$ membentuk modul *rough* atas ring *rough* R yang disebut dengan modul faktor *rough* (Zhang dkk., 2006).

BAB III

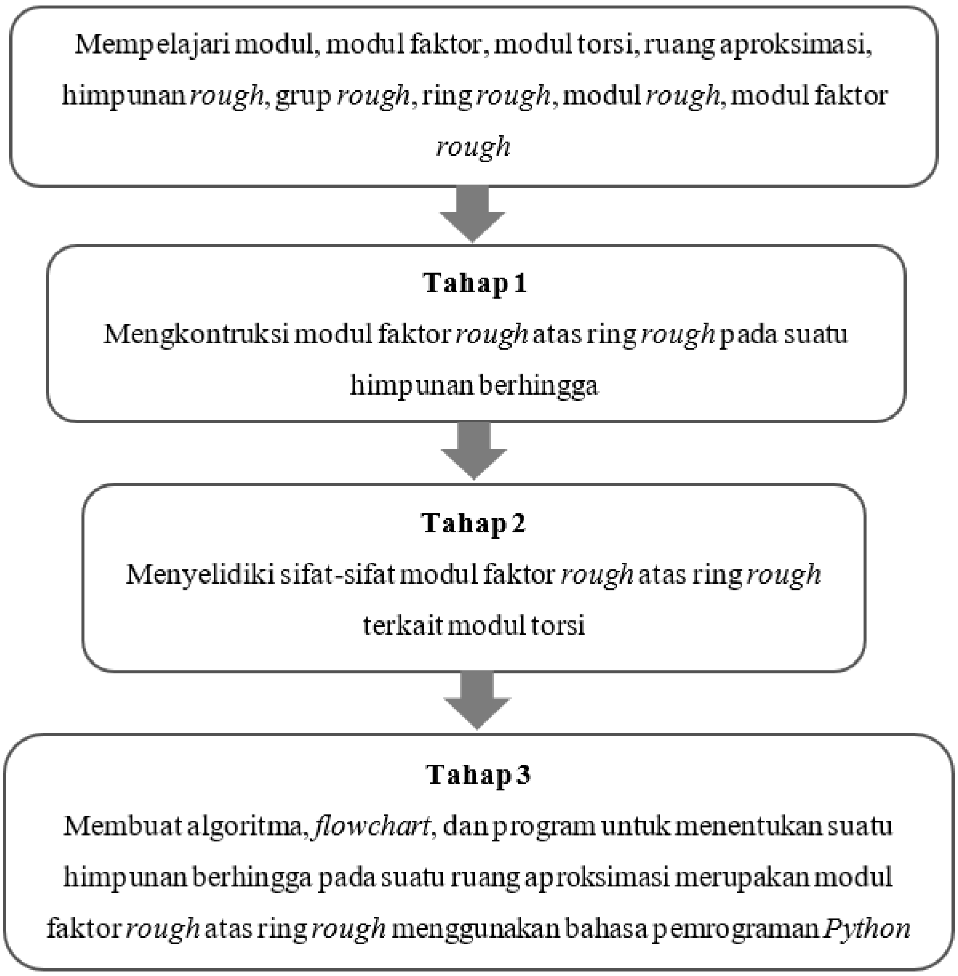
METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran $2023/2024$ di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas - Lampung yang beralamat di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Pada penelitian ini dilakukan dengan menggunakan studi literatur yang diperoleh dari jurnal, buku dan artikel ilmiah yang berkaitan dengan penelitian ini serta mengkaji definisi maupun teorema yang berhubungan dengan permasalahan penelitian. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini dapat dilihat pada diagram berikut:



Gambar 3.1 Diagram metode penelitian

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang telah dibahas pada Bab IV dapat disimpulkan bahwa jika diberikan ruang aproksimasi (U, θ) dengan $\langle U, * \rangle$ modul hingga dan $a\theta b$ jika dan hanya jika $a - b \in S$, untuk setiap $a, b \in U$ dan S submodul U, terdapat ruang aproksimasi (U', θ'), dengan $U' = \{a + E | a \in U\}$, untuk suatu E submodul U.

Selanjutnya, diperoleh bahwa grup faktor *rough* $\langle {}^{M}/_{S}, + \rangle$ yang juga merupakan grup *rough* komutatif dengan M adalah modul *rough* atas ring *rough* R, dan S submodul *rough* di M, sehingga himpunan ${}^{M}/_{S}$ didefinisikan dengan ${}^{M}/_{S} = \{\overline{m} = m + \overline{Apr}(S)\}$, serta didefinisikan operasi perkalian skalar di grup *rough* komutatif ${}^{M}/_{S}$. Karena S adalah submodul *rough* dari M, maka perkalian skalar di grup *rough* komutatif ${}^{M}/_{S}$ *well defined*. Oleh karena itu, himpunan ${}^{M}/_{S}$ merupakan modul faktor *rough* atas ring *rough*. Karena S merupakan submodul *rough* di M maka $\overline{Apr}(S)$ merupakan submodul. Jadi, S merupakan sebarang himpunan bagian tak kosong dari E yang berakibat $\overline{Apr}(S) = E$, dengan E submodul U.

Berdasarkan pembahasan sifat modul faktor *rough* diperoleh bahwa jika setiap elemen modul faktor *rough* ${}^{M}/_{S}$ atas ring *rough* R merupakan elemen torsi, maka ${}^{M}/_{S}$ disebut modul torsi *rough*. Selanjutnya bahwa himpunan semua elemen torsi *rough* atau M_T merupakan submodul *rough* di ${}^{M}/_{S}$. Kemudian penggunaan program *Python* dalam mengonstruksi modul faktor *rough* atas ring *rough* dapat membantu dan mengefisiensikan waktu pengerjaan.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil dan pembahasan, berikut ini merupakan beberapa hal yang disarankan bagi penelitian selanjutnya yaitu:

1. dalam mengonstruksi modul faktor *rough* atas ring *rough* masih sedikit menemukan sifat-sifatnya tetapi memungkinkan terdapat sifat modul faktor *rough* atas ring *rough* yang lainnya untuk diteliti lebih lanjut;

2. dalam mengonstruksi modul faktor *rough* atas ring *rough*, disarankan menggunakan himpunan universal lain selain dari yang ada di penelitian ini, terlebih lagi terkait relasi pada ruang aproksimasi baru yang terbentuk agar kelas ekuivalensi yang diperoleh memiliki lebih dari satu kelas ekuivalensi.

DAFTAR PUSTAKA

Adkins, W. A., & Weintraub, S. H. (1992). *Algebra: An Approach via Module Theory*. New York: Springer-Verlag.

Agusfrianto, F. A., Mahatma, Y., & Fitriani. (2022). Rough Rings, Rough Subring, and Rough Ideals. *Journal of Fundamental Mathematics*, 5(2), 1–8.

Aisah, I. (2018). *Struktur Aljabar (Grup): Materi dan Soal Latihan*. Jatinangor: Bitread Publishing.

Alharbi, N., Altassan, A., Aydi, H., & Özel, C. (2020). Rough quotient in topological rough sets. *De Gruyter Academic Publishing*, 17(1), 1750–1755.

Bagirmaz, N., & Ozcan, A. F. (2015). Rough Semigroups on Approximation Spaces. *International Journal of Algebra*, 9(7), 339–350.

Chaudhuri, A. K. (2017). *Introduction to Abstract and Linear Algebra*. New Delhi: New Central Book Agency.

Davvaz, B., & Mahdavipour, M. (2006). Roughness in modules. *Information Sciences*, 176(24), 3658–3674.

Davvaz, B., Mukhlash, I., & Soleha. (2021). Himpunan Fuzzy dan Rough Sets. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, 18(1), 79–94.

Gallian, J. A. (2017). *Contemporary Abstract Algebra Ninth Edition*. United States: Cengage Learning.

Hafifullah, D., Fitriani, F., & Faisol, A. (2022). The Properties of Rough V-Coexact Sequence in Rough Group. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 16(3), 1069–1078.

Kumar, A.,Kumar, A., & Sah, S. K. (2020). Roughness in G-modules and its Properties. *International Journal for Research in Engineering Application & Management (IJREAM)*, 6(4), 114–118.

Lipschutz, S., & Lipson, M. (2007). *Schaum's Outlines Discrete Mathematics Third Edition*. United States: McGraw-Hill Companies.

Manik, N. I. (2014). *Matematika Diskrit: Soal-Jawab*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Miao, D., Han, S., Li, D., & Sun, L. (2005). Rough Group, Rough Subgroup and Their Properties. *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, 104–113.

Nugraha, A. A., Fitriani, F., Ansori, M., & Faisol, A. (2022). Implementation of Rough Set on A Group Structure. *Jurnal Matematika MANTIK*, 8(1), 45–52.

Praba, B., Chandrasekaran, V. M., & Manimaran, A. (2015). Semiring on roughsets. *Indian Journal of Science and Technology*, 8(3), 280–286.

Reddy, M., Venkatraman, P., & Reddy, E. K. (2018). On Some Properties of Rough Approximations of Subrings via Cosets. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics-n*, 120–127.

Susilowati, E. (2016). *Logika Matematika dan Himpunan*. Yogyakarta: Buku Matematika.

Usman, M. (2022). *Pengantar Topologi*. Bandar Lampung: CV. Anugrah Utama Raharja.

Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., Yuwaningsih, D. A., & Hartanto, A. D. (2016). *Teori Ring dan Modul*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.

Yanti, G. A. D., Fitriani, F., & Faisol, A. (2023). The Implementation of a Rough Set of Projective Module. *Barekeng: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 17(2), 735–744.

Zhang, Q.-F., Fu, A.-M., & Zhao, S.-X. (2006). Rough Modules and Their Some Properties. *Proceeding of the Fifth International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, 2290–2293.