

**PEWARNAAN GRAF PADA PETA KABUPATEN TANGGAMUS DENGAN
MENGUNAKAN ALGORITMA *GREEDY* DAN ALGORITMA BARIS
SERTA IMPLEMENTASINYA DALAM MATLAB**

(Skripsi)

Oleh

**MAYDA LUTFIANA
1717031037**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024**

ABSTRAK

PEWARNAAN GRAF PADA PETA KABUPATEN TANGGAMUS DENGAN MENGGUNAKAN ALGORITMA *GREEDY* DAN ALGORITMA BARIS SERTA IMPLEMENTASINYA DALAM MATLAB

Oleh

Mayda Lutfiana

Teori graf adalah sebuah cabang dalam matematika yang memiliki banyak aplikasi dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu contohnya adalah pewarnaan graf yang digunakan dalam pembuatan peta. Pewarnaan graf bukan sekadar memberikan warna agar setiap titik memiliki warna yang berbeda, tetapi juga mencari cara untuk menggunakan warna sedikit mungkin, yang biasa disebut bilangan khromatik. Sebuah penelitian dilakukan untuk menganalisis pewarnaan peta Kabupaten Tanggamus dengan menerapkan dua algoritma, yaitu algoritma Greedy dan algoritma Baris. Hasil akhir dari penelitian ini menunjukkan bahwa peta Kabupaten Tanggamus dapat diwarnai menggunakan empat warna dengan masing-masing algoritma.

Kata kunci : Graf, Pewarnaan Graf, Algoritma *Greedy*, Algoritma Baris

ABSTRAK

GRAPH COLORING ON TANGGAMUS DISTRICT MAP USING *GREEDY* ALGORITHM AND ROW ALGORITHM AND ITS IMPLEMENTATION IN MATLAB

By

Mayda Lutfiana

Graph theory is a branch of mathematics that has many applications in everyday life. One example is graph coloring which is used in map making. Graph coloring is not just assigning colors so that each vertex has a different color, but also finding ways to use the fewest possible colors, commonly called chromatic numbers. A study was conducted to analyze the coloring of Tanggamus Regency map by applying two algorithms, namely Greedy algorithm and Row algorithm. The final result of this research shows that the map of Tanggamus Regency can be colored using four colors with each algorithm.

Keywords: Graph, Graph Coloring, Greedy Algorithm, Line Algorithm

**PEWARNAAN GRAF PADA PETA KABUPATEN TANGGAMUS
DENGAN MENGGUNAKAN ALGORITMA *GREEDY* DAN
ALGORITMA BARIS SERTA IMPLEMENTASINYA DALAM MATLAB**

Oleh

Mayda Lutfiana

Skripsi

**Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA**

pada

**Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024**

Judul Skripsi

: **PEWARNAAN GRAF PADA PETA
KABUPATEN TANGGAMUS DENGAN
MENGGUNAKAN ALGORITMA
GREEDY DAN ALGORITMA BARIS
SERTA IMPLEMENTASINYA DALAM
MATLAB**

Nama Mahasiswa

: **Mayda Lutfiana**

Nomor Pokok Mahasiswa

: **1717031037**

Jurusan

: **Matematika**

Fakultas

: **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**



Dorra

Dra. Dorrah Aziz, M.Si.
NIP. 19610128 198811 2 001

AA

Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.
NIP. 197311092000122001

2. Ketua Jurusan Matematika

Mury

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : Dra. Dorrah Aziz, M.Si.

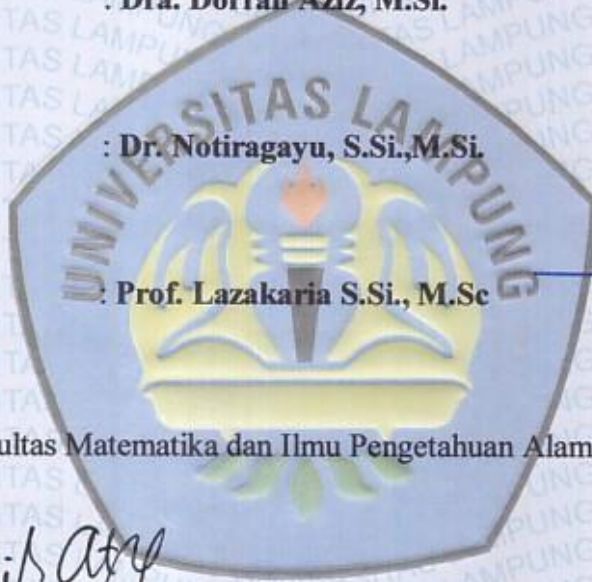
Dorra
.....

Sekretaris : Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.

AAA
.....

Pembahas : Prof. Lazakaria S.Si., M.Sc

[Signature]
.....



2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 19711001 200501 1 002

[Signature]

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : 13 Juni 2024

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **Mayda Lutfiana**

Nomor Pokok Mahasiswa : **1717031037**

Jurusan : **Matematika**

Judul Skripsi : **Pewarnaan Graf Pada Peta Kabupaten
Tanggamus Dengan Menggunakan Algoritma
Greedy Dan Algoritma Baris Serta
Implementasinya Dalam Matlab**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 13 Juni 2024

Penulis,



Mayda Lutfiana
NPM. 1717031037

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Mayda Lutfiana, lahir di Sedayu pada 18 Mei 1999. Penulis merupakan anak pertama dari tiga bersaudara, pasangan Bapak Muksimuddin dan Ibu Supriyatin.

Penulis menempuh pendidikan di SD Negeri 2 Sukaraja pada tahun 2005-2011. Kemudian melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 1 Semaka pada tahun 2011-2014 dan melanjutkan pendidikan di SMA S Al-Kautsar pada tahun 2014-2017. Kemudian penulis diterima Sebagai Mahasiswa S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung melalui jalur SBMPTN pada tahun 2017

Selama menjadi mahasiswa penulis aktif di beberapa organisasi seperti Generasi Muda Himatika (GEMATIKA) 2017, anggota Kaderisasi di Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) periode 2018, anggota Kaderisasi Unit Kegiatan Mahasiswa Fakultas (UKMF) Natural periode 2018. Pemimpin Litbangkes UKMF Natural periode 2019 dan periode 2020, dan anggota Aliansi Pers Mahasiswa Lampung (APML) periode 2020/2021.

Pada bulan Januari tahun 2020 penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di BPPRD kota Bandar Lampung sebagai bentuk pengabdian diri serta pmenerapkan ilmu yang telah di dapat selama perkuliahan. Kemudian pada bulan Agustus tahun 2020 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Pekon Sridadi, Kecamatan Wonosobo, Kabupaten Tanggamus selama 40 hari sebagai bentuk pengabdian mahasiswa terhadap Tri Dharma Perguruan Tinggi.

KATA INSPIRASI

*"Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan. Maka apabila engkau telah selesai (dari sesuatu urusan), tetaplah bekerja keras (untuk urusan yang lain).
(QS. Al-Insyirah : 6-7)*

*"Dan janganlah kamu merasa lemah dan jangan pula bersedih hati, sebab paling tinggi (derajatnya) jika kamu orang beriman."
(QS : Ali Imran ayat 139)*

*"Keberhasilan bukanlah milik orang yang pintar. Keberhasilan adalah kepunyaan mereka yang senantiasa berusaha."
(BJ Habibie)*

PERSEMBAHAN

Puji dan syukur kepada Allah SWT atas segala nikmat dan karunia-Nya. Shalawat beserta salam senantiasa tercurahkan kepada baginda besar Nabi Muhammad SAW, keluarga, serta sahabat-sahabatnya yang mulia.

Kupersembahkan karya sederhana ini kepada:

Kedua Orang Tua Tercinta

Yang selalu memberikan kasih sayang, do'a, dan dukungan di setiap langkahku. Terima kasih untuk selalu menjadi rumah untukku dan atas ridho Ayah dan Ibu yang telah memudahkan setiap perjalanan hidupku.

Adik Tersayang

Semoga apa yang telah aku lakukan selalu bisa menjadi contoh baik dan motivasi kelak di hidup kalian.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terima kasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sangat berjasa dalam membimbing, memberikan arahan, motivasi dan ilmu yang bermanfaat.

Sahabat-sahabat Terbaik

Almamater Tercinta, Universitas Lampung

SANWACANA

Puji syukur penulis ucapkan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Pewarnaan Graf Pada Peta Kabupaten Tanggamus Dengan Menggunakan Algoritma *Greedy* Dan Algoritma Baris Serta Implementasinya Dalam Matlab”.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik karena bimbingan, dukungan, saran, serta do’a dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si., selaku Dosen Pembimbing Akademik sekaligus Dosen Pembimbing I yang telah bersedia memberikan arahan, bimbingan, kritik, dan saran bagi penulis selama penyusunan skripsi ini.
2. Ibu Dr. Notiragayu, S.Si.,M.Si., selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan saran serta arahan bagi penulis selama penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Prof. Lazakaria S.Si., M.Sc., selaku Dosen Penguji yang telah memberikan kritik dan saran serta evaluasi sehingga terselesaikannya skripsi ini.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Bapak Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Seluruh Dosen, Staff, dan Karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Mak, Bak serta keluarga yang selalu memberikan dukungan dan do’a untuk kesuksesan penulis.
8. Arida Febriana Dewi dan Alfinia Juwita Alfath yang selalu memberikan dukungan dan do’a terbaik untuk penulis..

9. Sahabat-sahabat penulis Vivi, Fatimah, Widiyawati, dan Ema yang siap mendengarkan keluh kesah, memberikan dukungan, motivasi, serta bantuan dalam hal apapun.
10. Inas, Atina, Nopus, Bella, Diah, dan Iqbal yang telah saling memberikan bantuan, dukungan, serta motivasi di akhir-akhir masa perkuliahan ini.
11. Teman-Teman Natural yang telah memberi pengalaman saat di dunia perkuliahan.
12. Teman-teman Mahasiswa Jurusan Matematika Angkatan 2017.
13. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih jauh dari kata sempurna, sehingga informasi tambahan, saran, dan kritik untuk pengembangan lebih lanjut sangat penulis harapkan. Semoga skripsi ini dapat berguna dan bermanfaat bagi kita semua.

Bandar Lampung, 13 Juni 2024
Penulis,

Mayda Lutfiana

DAFTAR ISI

	Halaman
DAFTAR TABEL	iii
DAFTAR GAMBAR.....	iv
I. PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang dan Masalah	1
1.2 Tujuan Penelitian	2
1.3 Manfaat Penelitian	3
II. TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Konsep Dasar Graf	4
2.2 Jenis-Jenis Graf	5
2.3 Graf Terhubung, tak Terhubung dan Komponen	6
2.4 Graf Dual.....	7
2.5 Graf Planar	8
2.6 Pewarnaan Graf	9
2.7 Pewarnaan Peta.....	11
2.8 Algoritma Greedy	12
2.9 Algoritma Baris	13
III. METODOLOGI PENELITIAN	15
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian	15
3.2 Metode Penelitian	15
IV. HASIL DAN PEMBAHASAN	16
4.1 Representasi Graf Peta Wilayah Kabupaten Tanggamus	16

4.2	Pewarnaan Peta Kabupaten Tanggamus Menggunakan Algoritma Greedy	18
4.3	Pewarnaan Peta Kabupaten Tanggamus Menggunakan Algoritma Baris	34
4.4	Implementasi Pewarnaan Graf Menggunakan Matlab.....	38
V. KESIMPULAN.....		40
DAFTAR PUSTAKA.....		41
LAMPIRAN		43

DAFTAR TABEL

Tabel	Halaman
1. Keterangan titik-titik berdasarkan derajat tertinggi	17
2. Keterangan hasil dari implementasi pewarnaan peta kabupaten Tanggamus menggunakan Matlab	38

DAFTAR GAMBAR

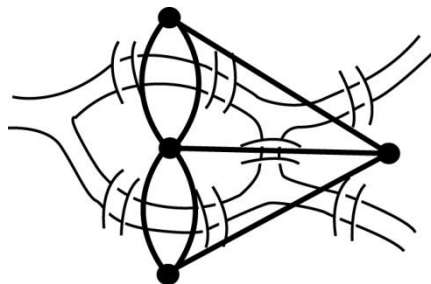
	Halaman
1. Jembatan Konigsberg dan Representasinya	1
2. Contoh graf dengan 6 titik dan 9 sisi	4
3. Contoh graf sederhana	5
4. Contoh graf tak sederhana.....	6
5. Contoh graf berarah	6
6. Contoh graf tak berarah.....	6
7. Contoh graf terhubung (a) dan tak terhubung (b).....	7
8. Contoh graf dual pada graf bidang	7
9. Contoh graf dual pada peta.....	8
10. Contoh graf planar	9
11. Contoh graf tak planar	9
12. Contoh pewarnaan titik pada graf.....	10
13. Contoh pewarnaan sisi pada graf.....	10
14. Contoh pewarnaan wilayah pada graf.....	11
15. Peta kabupaten Tanggamus.....	16
16. Representasi graf dual peta kabupaten Tanggamus	17
17. Pewarnaan pada titik v_{14}	19
18. Pewarnaan pada titik v_{15}	20
19. Pewarnaan pada titik v_{17}	21
20. Pewarnaan pada titik v_9	22
21. Pewarnaan pada titik v_5	22
22. Pewarnaan pada titik v_{20}	23
23. Pewarnaan pada titik v_{19}	24
24. Pewarnaan pada titik v_{18}	24

25.	Pewarnaan pada titik v_{12}	25
26.	Pewarnaan pada titik v_{11}	26
27.	Pewarnaan pada titik v_{10}	27
28.	Pewarnaan pada titik v_6	28
29.	Pewarnaan pada titik v_4	28
30.	Pewarnaan pada titik v_{16}	29
31.	Pewarnaan pada titik v_3	30
32.	Pewarnaan pada titik v_2	31
33.	Pewarnaan pada titik v_8	31
34.	Pewarnaan pada titik v_7	32
35.	Pewarnaan pada titik v_1	33
36.	Pewarnaan pada titik v_{13}	33
37.	Hasil pewarnaan graf menggunakan algoritma Baris.....	37
38.	Hasil pewarnaan setelah diwarnai pada peta kabupaten Tanggamus dengan menggunakan algoritma <i>Greedy</i>	39
39.	Hasil pewarnaan graf menggunakan algoritma <i>Greedy</i>	39
40.	Hasil pewarnaan setelah diwarnai pada peta kabupaten Tanggamus dengan menggunakan algoritma Baris.....	39
41.	Hasil pewarnaan graf menggunakan algoritma Baris.....	39

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Teori graf adalah cabang matematika yang mempelajari himpunan titik yang terhubung oleh himpunan garis. Awalnya, masalah jembatan Königsberg melibatkan tujuh jembatan yang menghubungkan empat wilayah. Penduduk kota ingin menjelajahi semua jembatan sekali dan kembali ke titik awal. Pada tahun 1736, matematikawan Swiss, Leonard Euler, sukses memecahkan masalah ini dengan cara memodelkannya menggunakan graf, di mana daratan diwakili sebagai titik dan jembatan sebagai garis. Pendekatan ini memungkinkan analisis yang lebih mudah terhadap solusi dari masalah yang ada.



Gambar 1. Jembatan Königsberg dan Representasinya

Pada dasarnya, pewarnaan graf telah banyak diteliti sebelumnya. Pewarnaan graf tidak hanya tentang memberi warna pada titik-titik graf sehingga titik yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama. Namun, juga tentang bagaimana memberi warna pada graf dengan menggunakan jumlah warna yang sesedikit mungkin. Dalam teori pewarnaan graf, jumlah warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai setiap titik pada sebuah graf G disebut bilangan kromatik graf G , biasanya dilambangkan dengan $X(G)$.

Ada banyak teori algoritma yang dapat diterapkan untuk menyelesaikan masalah tersebut, antara lain adalah algoritma Greedy dan algoritma Baris. Algoritma Greedy adalah tipe algoritma yang membangun solusi langkah demi langkah dengan memilih nilai maksimum sementara pada setiap langkahnya. Sedangkan algoritma Baris adalah jenis algoritma yang mengolah titik-titik sesuai urutan mereka tanpa memerlukan proses pengurutan (Meilani, 2016).

Penelitian ini bertujuan untuk membandingkan teori pewarnaan graf dengan menggunakan algoritma Greedy dan algoritma Baris, yang akan diimplementasikan pada peta kabupaten Tanggamus. Batas-batas wilayah antar kecamatan di peta tersebut saat ini terlihat kurang efisien karena menggunakan terlalu banyak warna. Oleh karena itu, tujuan dari penelitian ini adalah untuk menciptakan peta kabupaten Tanggamus yang menunjukkan batas wilayah antar kecamatan dengan menggunakan algoritma Greedy dan algoritma Baris, sehingga dapat menghasilkan peta dengan jumlah warna yang minimal melalui analisis graf. Penelitian ini juga bertujuan untuk membandingkan jumlah bilangan kromatik akhir yang dihasilkan oleh kedua algoritma tersebut.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengidentifikasi hasil pewarnaan graf dengan algoritma *Greedy* dan algoritma Baris pada peta kabupaten Tanggamus dan mengetahui jumlah bilangan kromatik atau warna minimum yang dibutuhkan untuk mewarnai peta agar batas antar kecamatan yang berbatasan tidak menggunakan warna yang sama.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini diantara lain :

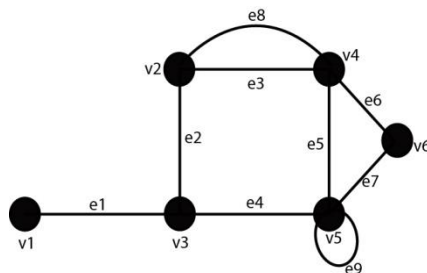
1. Menambah wawasan tentang teori graf dan pewarnaan graf dengan menggunakan algoritma *Greedy* dan algoritma Baris.
2. Dapat mempermudah dalam membaca peta sehingga dapat membedakan kecamatan yang berbatasan secara langsung.
3. Sebagai bahan referensi untuk para peneliti lain dalam mengkaji penelitian dengan objek yang serupa.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

Sebuah graf adalah kumpulan tak kosong titik-titik, yang masing-masing disebut *vertex*, dan juga kumpulan pasangan tak berurut dari titik-titik tersebut yang disebut *edge*.

Adapun menurut Deo (1989), graf merupakan kumpulan titik dan sisi. Graf G merupakan himpunan terurut $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ sebagai himpunan titik $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_k\}$ dari G yang tak kosong dan $E(G)$ sebagai himpunan sisi $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_k\}$ dari G .



Gambar 2. Contoh graf dengan 6 titik dan 9 sisi

Pada gambar 2, graf tersebut merupakan graf (V,E) dengan himpunan titik

$V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan sisi

$E(G)=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$.

Dua titik dalam graf dikatakan bertetangga (*adjacent*) jika mereka terhubung oleh sebuah sisi, dan sebuah sisi dikatakan menempel (*incident*) pada sebuah titik v jika

titik v merupakan salah satu ujung dari sisi tersebut. Dalam Gambar 2, titik v_2 adalah tetangga dari titik v_3 dan v_4 . Sisi e_2 menempel pada titik v_2 dan v_3 .

Derajat (*degree*) suatu titik v pada graf G adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik v , dinotasikan dengan $d(v)$. Daun (*titik pendaan*) adalah titik yang berderajat satu, sedangkan sisi yang menempel pada titik pendaan disebut sisi pendaan. Pada gambar 2, $d(v_1)=1$, $d(v_2)=3$, $d(v_3)=3$, $d(v_4)=4$, $d(v_5)=3$, $d(v_6)=2$ dan Daun terdapat pada titik v_1 .

Loop adalah sisi yang mempunyai titik awal dan akhir yang sama. Sedangkan, sisi paralel (sisi ganda) adalah dua sisi atau lebih yang menghubungkan sepasang titik yang sama. Pada gambar 2, terdapat *loop* pada titik v_5 yaitu e_9 sedangkan e_3 dan e_8 disebut sisi paralel. Graf yang tidak memiliki *loop* dan sisi paralel disebut graf sederhana. Sedangkan graf pada gambar 2 bukan termasuk graf sederhana karena memiliki *loop* dan sisi paralel.

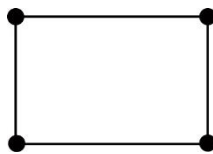
Lintasan (*path*) adalah jalur di mana setiap titik yang dilaluinya adalah berbeda, dan jika titik awal dan titik akhirnya sama, disebut sebagai lintasan tertutup. Sebagai contoh, lintasan pada Gambar 2 adalah $v_1-e_1-v_3-e_2-v_2-e_3-v_4-e_6-v_6$.

2.2 Jenis-jenis Graf

Berdasarkan loop dan sisi ganda pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua, yaitu :

1. Graf sederhana

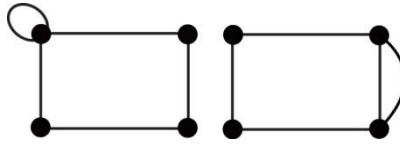
Graf sederhana adalah graf yang tidak memiliki loop atau sisi ganda.



Gambar 3. Contoh graf sederhana

2. Graf tak sederhana

Graf tak sederhana adalah graf yang mengandung loop atau sisi ganda.

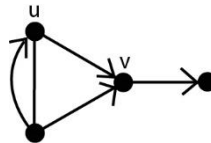


Gambar 4. Contoh graf tak sederhana

Berdasarkan arah pada sisi, secara umum graf dibedakan menjadi dua, yaitu :

1. Graf berarah

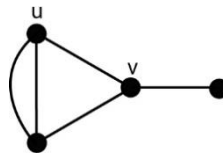
Graf berarah adalah graf di mana setiap sisi memiliki arah tertentu. Sisi-sisi uv dan vu dianggap sebagai dua sisi yang berbeda, $uv \neq vu$.



Gambar 5. Contoh graf berarah

2. Graf tak berarah

Graf tak berarah adalah jenis graf di mana sisinya tidak memiliki arah atau orientasi. Dalam graf ini, urutan pasangan titik yang dihubungkan oleh sisi tidak dianggap penting. $uv = vu$.

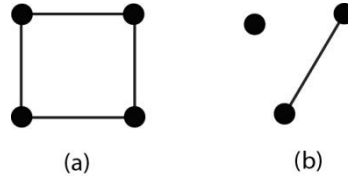


Gambar 6. Contoh graf tak berarah

2.3 Graf Terhubung, tak Terhubung dan Komponen

Sebuah graf dikatakan terhubung jika setiap pasangan simpul di graf G memiliki setidaknya satu lintasan yang menghubungkannya. Jika tidak, graf G dikatakan tidak

terhubung. Sebuah graf juga dapat dikatakan tidak terhubung jika terdiri dari dua atau lebih subgraf terhubung. Setiap subgraf terhubung ini disebut sebagai komponen.



Gambar 7. Contoh graf terhubung (a) dan tak terhubung (b)

Gambar di atas merupakan contoh graf terhubung (a) dan graf tak terhubung (b). Pada gambar tersebut memiliki tiga komponen graf. Satu komponen terdapat pada gambar (a) dan dua komponen terdapat pada gambar (b).

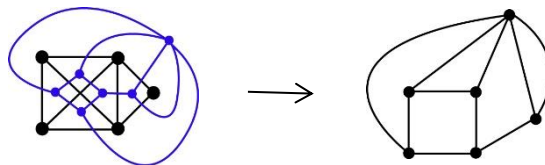
2.4 Graf Dual

Graf dual adalah graf yang terbentuk dengan mengubah setiap wilayah atau region dari graf asal menjadi simpul-simpul dalam graf dual. Simpul-simpul yang terbentuk dalam graf dual akan dihubungkan dengan sisi jika wilayah yang direpresentasikan oleh simpul-simpul tersebut secara langsung dipisahkan oleh sisi-sisi dari graf asal.

Graf dual dapat dibedakan menjadi dua jenis:

a. Graf dual dari Graf

Misalkan G suatu graf bidang, graf dual dari G dapat dibuat dengan menyesuaikan setiap wilayah r pada G adalah titik v pada graf dual dari G dan dua titik v_1, v_2 pada graf dual dihubungkan oleh sisi e pada graf dual jika dan hanya jika wilayah r_1 dan r_2 dibatasi oleh sisi e pada G .



Gambar 8. Contoh graf dual pada graf bidang

b. Graf dual dari peta

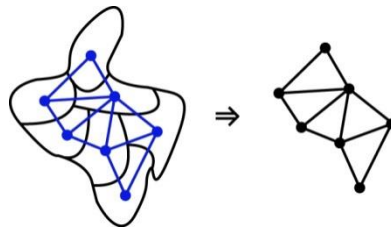
Graf dual dari sebuah peta adalah graf planar G yang direpresentasikan sebagai graf bidang. Dalam pembentukan graf dual ini, setiap wilayah atau region pada peta diwakili oleh sebuah titik dalam graf dual. Sisi-sisi dalam graf dual menghubungkan dua titik jika wilayah-wilayah yang mereka representasikan memiliki perbatasan bersama dalam peta.

Jika sebuah peta mempunyai titik sebanyak V , mempunyai region/wilayah sebanyak R dan mempunyai sisi sebanyak E , maka peta tersebut memenuhi rumus-rumus Euler sebagai berikut:

$$V + R - E = 2$$

$$\sum \text{deg}(r) = 2\sum E$$

$$E \leq 3V - 6$$

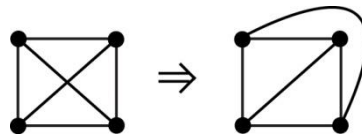


Gambar 9. Contoh graf dual pada peta

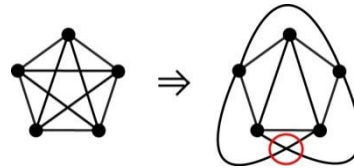
2.5 Graf Planar

Graf yang dapat dilukis pada bidang datar dengan sisi-sisinya tidak saling memotong disebut sebagai graf planar. Jika tidak, disebut sebagai graf tak planar. Sebuah graf diklasifikasikan sebagai graf planar jika dapat disusun pada bidang datar sedemikian rupa sehingga tidak ada dua sisi yang berpotongan kecuali di titik-titik di mana keduanya bertemu (incident).

Graf bidang adalah graf yang dapat digambarkan pada bidang datar sedemikian rupa sehingga setiap pasangan sisi bertemu hanya pada ujung-ujung simpulnya. Graf planar adalah jenis graf yang isomorfik dengan graf bidang, yang berarti dapat digambarkan kembali sebagai graf bidang.



Gambar 10. Contoh graf planar



Gambar 11. Contoh graf tak planar

2.6 Pewarnaan Graf

Pewarnaan graf melibatkan memberikan warna pada suatu graf, yang sering kali diwakili sebagai angka berurutan seperti 1, 2, 3, dan seterusnya, atau secara langsung menggunakan warna seperti merah, biru, atau warna lainnya. Graf ini terdiri dari objek seperti simpul, sisi, dan wilayah. Dalam pewarnaan tersebut, setiap simpul yang saling terhubung tidak boleh memiliki warna yang sama.

Menurut Gross, J.L., dkk, 2014. Pewarnaan graf berhubungan dengan konsep umum dan dapat diterapkan secara luas untuk membagi himpunan dasar dari suatu struktur menjadi bagian-bagian yang masing-masing memenuhi persyaratan tertentu. Salah satu masalah yang paling terkenal dibidang ini dan bahkan dalam teori graf yang saat ini dikenal dengan “Teorema Empat Warna” bahkan saat ini menjadi pedoman penelitian graf selama hampir satu abad.

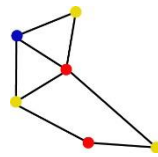
Terdapat tiga macam persoalan pewarnaan graf yaitu pewarnaan titik (*vertex*), pewarnaan sisi (*edge*) dan pewarnaan wilayah (*region*).

1. Pewarnaan titik pada graf

Pewarnaan titik pada graf melibatkan memberikan warna pada simpul-simpul dalam graf G sedemikian rupa sehingga setiap dua simpul yang saling bertetangga memiliki warna yang berbeda.

Sebagian besar studi yang terkait dengan pewarnaan titik berfokus pada menentukan jumlah warna minimum yang diperlukan dalam situasi di mana titik-titik ujung dari setiap sisi harus memiliki warna yang berbeda.

Definisi (Menurut Jhonatan dkk, 2019): Pewarnaan titik pada k merupakan penempatan $f = V_G \rightarrow C$ dari himpunan titiknya ke himpunan elemen k dengan C merupakan warna. Untuk setiap k , penempatan tersebut disebut dengan pewarnaan titik.



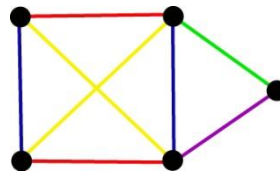
Gambar 12. Contoh pewarnaan titik pada graf

2. Pewarnaan sisi pada graf

Pewarnaan sisi pada graf G adalah proses memberikan warna pada sisi-sisi dalam graf tersebut sedemikian rupa sehingga setiap dua sisi yang berbagi titik ujung memiliki warna yang berbeda.

Untuk masalah tertentu, model graf paling natural untuk suatu masalah mungkin melibatkan pewarnaan sisi bukan pewarnaan titik.

Definisi (Menurut Jhonatan dkk, 2019): Pewarnaan sisi k dari graf G merupakan penempatan $f = E_G \rightarrow C$ dari himpunan sisinya ke elemen k dengan C merupakan warna. Untuk setiap k , penempatan seperti itu disebut pewarnaan sisi

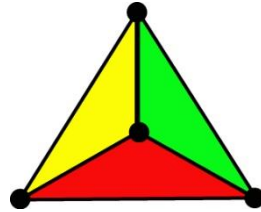


Gambar 13. Contoh pewarnaan sisi pada graf

3. Pewarnaan wilayah pada graf

4. Pewarnaan wilayah pada graf G melibatkan memberikan warna pada setiap wilayah dalam graf tersebut sedemikian rupa sehingga setiap dua wilayah

yang berbatasan memiliki warna yang berbeda. Secara umum, konsep pewarnaan wilayah juga dapat menggunakan prinsip yang sama seperti pada pewarnaan titik.



Gambar 14. Contoh pewarnaan wilayah pada graf

2.7 Pewarnaan Peta

Seorang matematikawan asal Afrika Selatan, Francis Gutri menemukan bahwa tepat empat warna yang diperlukan untuk mewarnai wilayah pada peta Inggris, sehingga tidak ada dua wilayah yang saling berbatasan menerima warna yang sama. Pada tahun 1852, ia mengusulkan bahwa empat warna cukup untuk peta apapun.

Definisi (Menurut Jhonatan dkk, 2019) : Pewarnaan peta dikatakan tepat jika untuk setiap sisi $e \in E_G$, daerah yang bertemu pada tepi e berwarna berbeda.

Bilangan kromatik pada peta adalah jumlah minimum warna yang diperlukan untuk pewarnaan yang tepat.

Dalam pewarnaan sebuah peta dapat dilakukan dengan pewarnaan titik (*vertex*), pewarnaan sisi (*edge*) maupun pewarnaan wilayah (*region*).

Ada beberapa prinsip dalam pewarnaan peta, yaitu :

- Banyak warna yang harus digunakan seminimum mungkin, banyak warna minimum disebut bilangan kromatik
- Dua buah titik yang terhubung oleh satu atau lebih rusuk tidak boleh diberi warna yang sama (pewarnaan titik)
- Dua buah sisi atau lebih yang bertemu pada sebuah titik tidak boleh diberi warna yang sama (pewarnaan sisi)

- Dalam mewarnai peta pakailah sebuah warna secara optimum, artinya warna kedua digunakan setelah warna pertama tidak dapat digunakan lagi. Demikian seterusnya sampai semua titik/sisi/wilayah terwarnai semua.

2.8 Algoritma Greedy

Algoritma Greedy adalah algoritma yang menghasilkan solusi optimal dengan melakukan langkah demi langkah dan menerapkan dua prinsip berikut pada setiap langkahnya.

- a. Pilihan yang terbaik merupakan pilihan terbaik yang dapat diperoleh pada saat itu tanpa memperhatikan konsekuensinya ke depan nanti, hal ini bersesuaian dengan prinsip algoritma *Greedy* yaitu *'take what you can get now'*.
- b. Berharap dengan memilih pilihan terbaik saat itu (*optimum lokal*) dapat mencapai solusi terbaik dari permasalahan yang dihadapi (*optimum global*). Dalam Algoritma *Greedy* diasumsikan bahwa optimum lokal merupakan bagian dari optimum global. Sedangkan untuk aplikasi algoritma *Greedy* digunakan untuk pemecahan yang memerlukan solusi.

Komponen algoritma *Greedy* terdiri dari:

1. Himpunan Kandidat C
Merupakan himpunan yang berisi elemen pembentuk solusi.
2. Himpunan Solusi S
Himpunan yang berisi elemen solusi pemecahan masalah.
3. Fungsi Seleksi
Fungsi yang memilih kandidat yang paling memungkinkan dari himpunan kandidat untuk dimasukkan ke dalam himpunan solusi agar solusi optimal terbentuk. Kandidat yang sudah terpilih pada suatu langkah tidak akan dipertimbangkan lagi pada langkah selanjutnya.
4. Fungsi Kelayakan
Fungsi yang memeriksa apakah suatu kandidat yang terpilih akan menimbulkan solusi yang layak yaitu kandidat tersebut, bersama dengan

himpunan solusi yang terpilih tidak akan melanggar kendala yang berlaku pada masalah.

5. Fungsi Obyektif

Fungsi yang memaksimalkan atau meminimalkan solusi.

Adapun cara kerja algoritma *Greedy* dalam pewarnaan graf adalah sebagai berikut :

1. Inisiasi himpunan solusi dengan kosong.
2. Urutkan *vertex* berdasarkan jumlah *edge* terbanyak (pengurutan dari besar ke kecil).
3. Melakukan pemilihan *vertex* yang akan diisi warnanya dengan fungsi seleksi *vertex*.
4. Memilih kandidat warna dengan menggunakan himpunan kandidat kurangi warna anggota himpunan kandidat dengan warna yang diambil.
5. Periksa kelayakan warna yang dipilih menggunakan langkah 3. Jika layak dimasukkan ke himpunan solusi.
6. Periksa apakah solusi sudah meliputi pewarnaan seluruh *vertex*. Jika sudah maka berhenti, jika belum maka akan kembali ke langkah 3.

2.9 Algoritma Baris

Secara mendasar, algoritma Baris berbeda dengan algoritma Greedy. Dalam algoritma Baris, tidak diperlukan pengurutan titik simpul berdasarkan derajat tertinggi. Sebaliknya, algoritma Baris dilakukan dengan mengikuti urutan titik dalam graf, di mana titik pertama dapat dipilih secara acak.

Misalkan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ merupakan himpunan titik pada graf G .

Langkah pertama dipilih salah satu titik sebagai titik pertama yang akan diberi warna biasanya diawali dari titik v_1 . Misalkan titik v_1 diwarnai dengan x , selanjutnya semua titik yang bertetangga dengan v_1 disusun dalam suatu himpunan yang dinyatakan dengan L_1 . Untuk melanjutkan pewarnaan, dipilih

titik v_2 kemudian titik-titik yang bertetangga dengan v_2 disusun dalam himpunan L_2 . Jika dalam L_2 tidak muncul warna x maka titik v_2 diwarnai dengan warna x . jika warna x muncul maka titik tersebut diwarnai dengan warna yang berbeda. Proses tersebut diulang hingga semua titik diwarnai. Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Langkah ini untuk mengawali parameter I , digunakan untuk mewarnai titik $v_i, i=1$.
2. Langkah ini untuk mengawali titik i , warnai titik $v_i, c=1$.
 - a. Susun titik yang bertetangga dengan v_i dengan indeks naik, susunan itu disebut L_i .
 - b. Jika c tidak muncul dalam L_i , maka warnai titik v_i dengan c kemudian dilanjutkan ke langkah 3. Jika tidak maka dilanjutkan ke langkah 2b.
3. Warna c dinaikan, $c=c+1$ dan kembali ke langkah 2b.
4. Parameter i dinaikan. Jika $i < n$, maka $i = i+1$ kemudian kembali ke langkah 1, jika tidak maka berhenti.

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun akademik 2023/2024 di Gedung Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. Menentukan batas-batas wilayah kecamatan pada peta kabupaten Tanggamus.
- b. Mempresentasikan peta kabupaten Tanggamus dalam graf dengan menjadikan batas-batas wilayah kecamatan sebagai sisi dan perpotongan antar batas wilayah kecamatan sebagai simpul.
- c. Menentukan derajat masing-masing simpul.
- d. Melakukan pewarnaan peta kabupaten Tanggamus dengan menggunakan algoritma *Greedy* dan algoritma Baris.
- e. Menentukan jumlah warna minimum yang diperoleh untuk mewarnai peta dari dua algoritma tersebut.

V. KESIMPULAN

Pewarnaan titik menggunakan algoritma Greedy dan algoritma Baris menghasilkan nilai khromatik, yang menunjukkan jumlah warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai titik pada graf dual peta Kabupaten Tanggamus. Hasil penelitian menunjukkan bahwa nilai khromatik untuk algoritma Greedy dan algoritma Baris sama, yakni 4.

DAFTAR PUSTAKA

- Ardiansyah, dkk. 2010. Implementasi Algoritma Greedy untuk Melakukan Graph Coloring: Studi Kasus Peta Provinsi Jawa Timur. *Jurnal Informatika*. 4(2): 440-448.
- Deo, N. 1974. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.
- Gross, J.L., Yellen, J., and Zhang, P. 2014. *Handbook of Graph Theory*. 2nd Edition . Taylor & Francis Group, LLC, New York.
- Gross, J.L., Yellen, J., and Anderson, M. 2019. *Graph Theory and Its Application*. 3rd Edition. Taylor & Francis Group, LLC, New York.
- Meilani, Susi., Permanasari, Yurika., Sukarsih, Ichi. 2016. Pewarnaan Titik pada Graf Menggunakan Algoritma Baris dan Implementasinya dalam Matlab. *Prosiding Matematika*.2(1):1-4
- Rahayuningsih, Sri. 2018. *Teori Graph dan Penerapannya*. Universitas Wisnuwardhana Press malang (Unidha Press), Malang.
- Rahma, A.N., Rahmawati dan Zukrianto.2021. Aplikasi Pewarnaan Graf Peta Provinsi Riau Menggunakan Algoritma Greedy. *SQUARE : Journal of Mathematics and Mathematics Education*. 3(1) : 41-55.
- Rhohman, F. 2017. Implementasi Graph Coloring pada Pewarnaan Wilayah Kelurahan di Kota Kediri:183-188.
- Wibisono, Samuel. 2008. *Matematika Diskrit*. Ed ke-2. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Himayati, A.I.A., Firdaus, E.M., Findasari. 2023. Pewarnaan Graf pada Peta Wilayah Kota Semarang dengan Algoritma Greedy. *Jurnal Ilmu Komputer dan Matematika* 9-16.