PEMODELAN MATEMATIKA PADA KASUS TIGA *PREDATOR* SATU *PREY* DENGAN DUA *PREDATOR* TERINFEKSI

Skripsi

Oleh

HASNA WIDA SAIFANA
2057031014

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

ABSTRACT

MATHEMATICAL MODELING IN THE CASE OF THREE PREDATORS ONE PREY WITH TWO INFECTED PREDATORS

By

Hasna Wida Saifana

Predator-Prey or Lotka-Voltera mathematical modeling usually involves 2 species, namely one type of predator species and one type of prey species. However, this research will involve three types of predator species(x, y, z) and one type of prey species(m). Where the three types of predator species compete with each other to hunt for food (prey), and there are two types of predator species, namely the second type of predator(y) and the third type of predator(z) that are infected with infection into the second type of predator infected(i) and the third type of predator infected(j). Both infected predator species(i, j) are given treatment. Healthy predators(y, z) are vaccinated to reduce the chance of more predators becoming infected. This situation results in a nonlinear system of equations. With predetermined constraints, four equilibrium points are obtained, namely $E_0 = (0,0,0,0,0,0), E_1 = (0,0,\frac{\beta}{f_3},0,0,\frac{c_3}{c_2}), E_2 = (\frac{\beta}{f_1},0,0,0,0,\frac{a_2}{a_1})$, dan $E_3 = (0,\frac{\beta}{f_2},0,0,0,\frac{b_3}{b_2})$. The stability of the system can be known by substituting the equilibrium points into the Jacobian matrix to obtain the eigenvalues of the characteristic equation.

Keywords: Predator-Prey Modeling, Lotka-Voltera, Equilibrium Point, Ecosystem

ABSTRAK

PEMODELAN MATEMATIKA PADA KASUS TIGA *PREDATOR* SATU *PREY* DENGAN DUA *PREDATOR* TERINFEKSI

By

Hasna Wida Saifana

Pemodelan matematika Predator-Prey atau Lotka-Voltera biasanya melibatkan 2 spesies yaitu satu jenis spesies predator dan satu jenis spesies prey. Namun penelitian kali ini akan melibatkan tiga jenis spesies predator(x, y, z) dan satu jenis spesies prey(m). Dimana ketiga jenis spesies predator saling bersaing untuk berburu makanan (prey), dan terdapat dua jenis spresies predator yaitu predator jenis kedua(y) dan predator jenis ketiga(z) yang terjangkit infeksi menjadi predator jenis kedua terinfeksi(i) dan predator jenis ketiga terinfeksi(j). Kedua spesies predator yang terinfeksi(i, j) diberikan perlakuan treatment atau pengobatan. Predator(y, z) yang sehat diberikan perlakuan vaksinasi untuk mengurangi peluang lebih banyak predator(y, z) yang terinfeksi. Keadaan ini menghasilkan sistem persamaan nonlinear. Dengan Batasan yang telah ditentukan, diperoleh empat titik ekulibrium yaitu $E_0 = (0,0,0,0,0,0), E_1 = (0,0,\frac{\beta}{f_3},0,0,\frac{c_3}{c_2}), E_2 = (\frac{\beta}{f_1},0,0,0,0,\frac{a_2}{a_1})$, dan $E_3 = (0,\frac{\beta}{f_2},0,0,0,\frac{b_3}{b_2})$. kestabilan sistem dapat diketahui dengan mensubstitusikan titik ekuilibrium kedalam matriks *Jacobian* untuk mendapatkan nilai eigen dari persamaan karakteristiknya.

Kata Kunci: Pemodelan *Predator-Prey*, *Lotka-Voltera*, Titik Ekuilibrium, Ekosistem

PEMODELAN MATEMATIKA PADA KASUS TIGA *PREDATOR* SATU *PREY* DENGAN DUA *PREDATOR* TERINFEKSI

Oleh

HASNA WIDA SAIFANA
2057031014

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

Judul Skripsi : **PEMODELAN MATEMATIKA PADA KASUS TIGA *PREDATOR* SATU *PREY* DENGAN DAU *PREDATOR* TERINFEKSI**

Nama Mahasiswa : **Hasna Wida Saifana**

Nomor Pokok Mahasiswa : **2057031014**

Jurusan : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.
NIP. 19700831 199903 1 002

Dra. Dorrah Aziz, M.Si.
NIP. 19610128 198811 2 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.**	....
Sekretaris	: **Dra. Dorrah Aziz, M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Dr. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 19711001 200501 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **07 Mei 2024**

PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama Mahasiswa : **Hasna Wida Saifana**

Nomor Pokok Mahasiswa : **2057031014**

Jurusan : **Matematika**

Judul Skripsi : **PEMODELAN MATEMATIKA PADA KASUS TIGA *PREDATOR* SATU *PREY* DENGAN DUA *PREDATOR* TERINFEKSI**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 07 Mei 2024
Penulis

Hasna Wida Saifana
NPM. 2057031014

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Hasna Wida Saifana lahir di Tulang Bawang pada Tanggal 17 Januari 2002. Penulis merupakan anak ketiga dari empat bersaudara dari pasangan Bapak Saring Santoso dan Ibu Umi Astuti.

Penulis menempuh pendidikan pertama nya di Paud Permata Tulang Bawang Barat. Kemudian pada tahun 2008 melanjutkan Pendidikan Sekolah Dasar(SD) di SDIT Bustanul Ulum hingga kelas 2 SD. Kemudian pada tahun 2010 melanjutkan kelas 3 dan 4 SD di SD Al-Furqon. Kemudian dilanjutkan di Madrasah Ibtida'iyah(MI) Daarul Hufaz Bandar Lampung hingga kelas 6 SD. Setalah lulus pada tahun 2014 penulis melanjutkan pendidikannya ke jenjang Sekolah Menengah Pertama(SMP) di SMP Binaul Ummah Kuningan, Jawa Barat. Pada tahun 2017 penulis melanjutkan Pendidikannya di Madrasah Aliyah(MA) Husnul Khotimah Kuningan, Jawa Barat. Pada tahun 2020 penulis terdaftar sebagai mahasiswi S1 jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam universitas Lampung.

Pada tahun 2021 penulis mengikti Unit Kegiatan Mahasiswa(UKM) ROIS sebagai anggota biro kemuslimahan dan UKM Himpunan Mahasiswa Matematika(Himatika) sebagai anggota biro Kesekreatriatan. Pada tahun 2022 penulis menjadi sekretaris biro kesekretariatan UKM Rois dan berpartisipasi sebagai panitia dalam beberapa kepanitiaan yang di selenggarakan oleh ROIS. Pada tahun 2023 penulis menjadi sekretaris departemen akademik dan prestasi UKM-U Birohmah. Pada tahun yang sama penulis melaksanakan Kerja Praktik(KP) di BPS Tulang Bawang Barat. Penulis juga melaksanakan Kuliah Kerja Nyata(KKN) di Desa Hurun, Kecamatan Teluk Pandan, Kabupaten Pesawaran, Provinsi Lampung sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat.

KATA INSPIRASI

"Siapa yang bertakwa kepada Allah, niscaya Dia menjadikan kemudahan baginya dalam urusannya"

(Q.S. At-Thalaq: 4)

"Allah tidak membebani seseorang diluar kemampuannya"

(Q.S. Al-Baqarah: 286)

"barang siapa menempuh jalan untuk mendapatkan ilmu, Allah akan memudhkan baginya jalan menuju surga"

(H.R. Muslim)

"Barang siapa yang Allah kehendaki kebaikan, maka Allah akan memahamkan dia tentang ilmu agama"

(H.R. Bukhari Muslim)

"Menuntut ilmu itu wajib atas setiap Muslim"

(H.R. Ibnu Majah)

"Sekarang dan masa depan adalah buah dari yang kita lakukan di masa lalu dan masa sekarang"

(Hasna Wida Saifana)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap Alhamdulillah dan rasa syukur kepada Allah SWT atas limpahan nikmat dan rejeki-Nya, dan Nabi Muhammad SAW sebagai panutan untuk umatnya. Penulis mempersembahkan skripsi ini kepada:

Bapak Saring Santoso dan Ibu Umi Astuti

Terima kasih kepada kedua orang tuaku atas limpahan kasih sayang, doa, dukungan dan pengorbanannya di setiap langkah saya sehingga saya sampai di titik ini dan mampu menyelesaikan skripsi ini. Karena doa dan dukungan dari kalian Allah memudahkan perjalanan hidup ini.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terima kasih kepada dosen pembimbing dan dosen pembahas yang telah memberikan ilmunya kepada kami, memberikan pengalaman yang berharga dan memberikan arahan untuk menyelesaikan skripsi ini.

Teman-teman Seperjuanganku

Terima kasih kepada teman-teman seperjuanganku yang telah membantu, menemani, berbagi ilmu, menyemangati dan mendukung saya dalam menyelasaikan skripsi ini.

Almamater

Universitas Lampung

SANWACANA

Puji syukur kehadirat Allah Subhanahu Wa Ta'ala atas berkat dan rahmatnya lah penulis diberikan kemudahan dan kelancaran dalam menyelesaikan skripsi ini dalam rangka sebagai syarat untuk mendapatkan gelar sarjana dari program studi S1 matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dengan judul skripsi yaitu,: **Pemodelan Matematika pada Kasus Tiga *Predator* Satu *Prey* dengan Dua *Predator* Terinfeksi.**

Dalam penyusunan skripsi, penulis mendapatkan banyak bantuan dari berbagai pihak untuk itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing satu yang telah meluangkan waktu, memberikan arahan dan ilmunya selama penyusunan skripsi sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si. selaku dosen pembimbing dua yang telah membimbing, memberi masukan dan perhatiannya demi kelancaran proses pembuatan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D. selaku dosen pembahas yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.
4. Bapak Dr. Aang Nur Yaman, S.Si., M.Si. selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D. selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan arahan selama masa perkuliahan.
6. Bapak Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Seluruh dosen, staff, dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Ibunda Umi Astuti dan Ayahanda Saring Santoso yang selalu memberikan dukungan, doa, motivasi dan semangat selama proses penulisan skripsi ini.
9. Untuk kakak-kakak tersayangku kak Rifki, Mba Qonita, Mba Salma, mas Lilis dan adik tercintaku Hilmi beserta seluruh keluarga besar yang selalu memberikan dukungan dan doa-doanya.
10. Untuk Tiara Nur Salsabilla dan Nunung Nur Hasanah yang telah menemani, berbagi ilmu, menyemangati dan membantu dalam proses penulisan skripsi ini.
11. Teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2020 dan teman-teman kelas B yang telah memberikan motivasi dan semangat kepada penulis.
12. Seluruh pihak yang telah membantu kelancaran penulisan skripsi maupun proses penulisan skripsi.

Bandar Lampung, 07 Mei 2024
Penulis

Hasna Wida Saifana

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Populasi adalah kumpulan individu yang memiliki jenis dan karakteristik yang sama. Kumpulan dari beberapa populasi berbeda yang saling mempengaruhi dan berinteraksi di suatu wilayah tertentu disebut komunitas. Interaksi antara komunitas dan lingkungannya disebut ekosistem. Termasuk diantaranya interaksi dengan organisme abiotik. Didalam suatu ekosistem terdapat interaksi dalam hal mencari makanan yang disebut rantai makanan. Rantai makanan memiliki peranan yang sangat penting dalam suatu kehidupan ekosistem. Sehingga apabila salah satu rantai makanan terganggu maka akan mempengaruhi keseimbangan ekosistem dan mengancam populasi *predator* dan/atau *prey* (Sayekti et al., 2017).

Salah satu bentuk interaksi yang ada dalam ekosistem adalah hubungan mangsa-memangsa. Hubungan ini dilakukan demi kelangsungan hidup dan berkaitan erat dengan jumlah populasi mereka. Jika tidak ada *prey*, *predator* tidak memiliki sumber makanan dan jumlah populasinya akan terancam. Begitu pula jika tidak ada *predator*, laju pertumbuhan populasi *prey* akan sangat tinggi dan jumlahnya tidak akan terkontrol. Seperti dalam ekosistem sawah, ular yang memangsa tikus sebagai sumber makanan. Jika populasi tikus tidak ada, populasi ular akan terancam karena berkurangnya atau tidak adanya sumber makanan bagi populasi ular. Ketika tidak ada populasi ular, populasi tikus akan meningkat dan merusak seluruh tanaman padi yang ada sehingga mengakibatkan gagal panen.

Hubungan antara mangsa dan pemangsa dapat dimodelkan secara matematis menjadi pemodelan matematika dalam model *predator-prey* (Taufiq & Agustito, 2018). Model ini pertama kali di kenalkan oleh Lotka dan voltera pada tahun 1926.

Model ini mengemukakan bahwa *predator* dan *prey* memiliki laju pertumbuhan dalam bentuk eksponensial yang dikenal sebagai model *Lotka-Voltera*. Tetapi model ini masih memiliki kelemahan dan perlu di sempurnakan. Maka pada tahun 1948 Leslie dan Gower mengembangkan model ini dan dikenal sebagai model Leslie Gower (Djafar & Pimpi, 2023).

Pada model *Lotka-Voltera, predator* dan *prey* yang dilibatkan hanya satu populasi *prey* dan satu populasi *predator* dimana masing-masing populasi dalam keadaan sehat. Padahal kenyataannya di suatu ekosistem banyak kasus yang tidak berfokus pada satu *predator* dan satu *prey* yang sehat saja. salah satu contonya adalah predasi yang melibatkan tiga *predator* dan satu *prey* dimana dua populasi *predator* rentan terjangkit penyakit dan terinfeksi. Dan masih banyak sekali kemungkinan-kemungkinan hubungan *predator-prey* lain yang terjadi di suatu ekosistem dengan variasi dan faktor-faktor penentu lainnya.

Beberapa penelitian terdahulu membahas tentang *predator-prey* dengan diberikannya perilaku treatmen pada *prey* yang terinfeksi (Djafar & Pimpi, 2023). *Prey* terinfeksi yang menjadi mangsa dua *predator* yang saling bersaing (Taufiq & Agustito, 2018) *Predator-prey* dengan efek ketakutan pada *prey* pada (Rahmawati & Savitri, 2023). Dan masih banyak penelitian yang membahas tentang *predator-prey* dengan kasus-kasus berbeda dan berbagai macam faktor yang mempengaruhi. Berbeda dengan beberapa penelitian terdahulu, penelitian ini akan melibatkan tiga preadator dan satu *prey* dimana dua populasi *predator* terinfeksi dan akan dilakukan treatmen dan pemberian vaksin kepada populasi *predator* yang terinfeksi dengan membuat variabel baru.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian adalah memodelkan perkembangan populasi dari semua populasi yang terlibat, yaitu populasi *predator* jenis pertama yang dipengaruhi oleh kematian alami dan proses predasi, populasi *predator* jenis kedua dan *predator* jenis ketiga yang sehat dengan dipengaruhi oleh beberapa faktor (pemberian vaksinasi, interaksi dengan *predator* yang terinfeksi, dan kematian alami), populasi *predator* jenis kedua dan *predator* jenis ketiga yang terinfeksi dengan dipengaruhi oleh beberapa faktor (*treatmen,* dan kematian alami), dan populasi *prey* yang dipengaruhi oleh laju pertumbuhan, dan proses predasi oleh ketiga *predator*.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian adalah sebagai berikut:

1. Hasil dari penelitian ini dapat menjadi indikator untuk mengetahui perilaku penyebaran infeksi pada kasus nyata yang ada di masyarakat dan di aplikasikan dalam kehidupan nyata.
2. Penelitian ini dapat menjadi bahan acuan bagi mahasiswa yang ingin mengetui lebih lanjut mengenai penyebaran infeksi.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika adalah suatu pendekatan untuk memahami, menganalisis, dan meramalkan fenomena alam atau situasi nyata melalui konstruksi model matematika. Model matematika ini dapat berupa sistem persamaan diferensial, persamaan aljabar, atau struktur matematis lainnya yang merepresentasikan hubungan antara variabel-variabel yang terlibat. Tujuan utama dari pemodelan matematika adalah menyederhanakan kompleksitas suatu fenomena dan memperoleh wawasan yang berguna untuk pengambilan keputusan atau pemahaman konsep-konsep tertentu.

Pemodelan matematika dapat di terapkan diberbagai bidang ilmu seperti ilmu sains, ilmu sosial, ekonomi, ilmu teknik dan berbagai bidang ilmu lainnya. Pemodelan matematika dapat di terapkan pada laju pertumbuhan dan laju kematian makhluk hidup, mendeskripsikan fenomena penyebaran infeksi, menganalisis tingkat kemenangan pemilu, dan mendeskripsikan pertumbuhan nilai tukar mata uang (Asmaidi, 2021).

Model matematika merupakan abstraksi, penyederhanan, dan konstruksi matematika terkait masalah dalam kehidupan nyata (Saria & Waluyab, 2021). Dari permasalahan yang ada akan dibentuk model matematika yang kemudian diselesaikan dengan aturan-aturan yang ada. Setelah itu diperlukan uji hasil untuk mengetahui model yang digunakan valid atau tidak. Jika hasil yang didapat valid maka akan memberikan model matematika dan solusi yang tepat. Sebaliknya, jika hasil yang didapat tidak valid maka model matematika dan solusi yang didapat tidak tepat sehingga perlu adanya pemodelan ulang untuk mendapatkan hasil dan solusi yang tepat.

2.2 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem Persamaan Diferensial (SPD) adalah kumpulan dari persamaan diferensial yang memiliki keterkaitan. Biasanya SPD menggambarkan hubungan variable yang saling terkait dan berkaitan dengan waktu dan variable independent lainnya. SPD juga merupakan suatu sistem yang memuat n buah persamaan diferensial dengan n buah fungsi yang tidak diketahui dan n merupakan bilangan bulat positif ≥ 1. Bentuk umum dari SPD adalah sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= g_1(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\
\frac{dx_2}{dt} &= g_2(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\
\frac{dx_3}{dt} &= g_3(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= g_n(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Dengan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ adalah variable bebas dari t adalah variable terikat, sehingga rumus $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), x_3 = x_3(t), \dots, x_n = x_n(t)$, dimana $\frac{dx_n}{dt}$ merupakan sebuah derivatif fungsi x_n terhadap t dan g_1 adalah fungsi yang tergantung pada variabel $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ dan t (Neuheuser, 2004) dalam (Fakhza, 2023)

Menurut (Shams et al., 2023) SPD berperan penting dalam memodelkan fenomena yang terjadi secara alami seperti model populasi, model ekonomi, model budidaya bakteri dan model *Predator-Prey*. Penerapan SPD adalah pada model *predator-prey* atau Lotka-Voltera yang biasa digunakan untuk memodelkan interaksi antara dua spesies dalam satu ekosistem.

Sistem ini memiliki bentuk:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma xy + \delta xy \tag{2.2}$$

Dimana x dan y adalah populasi dua spesies, dan α, β, γ adalah parameter-parameter tertentu yang menggambarkan karakteristik interaksi antar spesies tersebut.

2.3 Sistem Persamaan Diferensial Biasa Linear

Sistem persamaan diferensial biasa adalah SPD di mana setiap persamaan dalam sistem tersebut bersifat linear. Suatu persamaan diferensial dikatakan linear jika semua suku-sukunya adalah linear terhadap variabel dependen dan turunannya. Dengan kata lain, variabel dependen dan turunannya hanya muncul dalam pangkat satu, bukan pangkat dua atau lebih. Bentuk umum dari persamaan diferensial biasa linear orde pertama adalah:

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y + b(t) \tag{2.3}$$

Dimana y adalah variabel terikat dan t adalah variabel bebas. $a(t)$ dan $b(t)$ adalah fungsi-fungsi yang tergantung pada t.

$F(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^n) = 0$ dikatakan linear jika F adalah linear dan variabel-variabelnya adalah $x, y, y', y'', y''', \ldots, y^n$. Secara umum persamaan diferensial biasa linear dapat ditulis sebagai berikut:

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y^1 + a_0(x)y = f(x) \tag{2.4}$$

Misal koefisien-koefisien $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x), a_0(x)$ dan fungsi $f(x)$ merupakan fungsi-fungsi yang kontinu pada selang l. Persamaan (2.4) dikatakan homogen jika fungsi $f(x) = 0$. Sebaliknya, akan dikatakan tak homogen apabila fungsi $f(x) \neq 0$. Jika semua koefisien $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_1(x), a_0(x)$ adalah suatu kosntanta, maka persamaan (2.4) disebut persamaan linear koefisien kontanta, dan jika semua variabelnya berupa fungsi makan persamaan (2.4) disebut persamaan linear koefisien variabel.

2.4 Sistem Persamaan Diferensial Biasa Non Linear

Sistem persamaan diferensial biasa nonlinear adalah sistem di mana setidaknya satu persamaan memiliki bentuk nonlinear. Nonlinearitas dapat muncul ketika variabel atau fungsi terlibat dalam pangkat yang lebih tinggi atau dalam suku-suku yang tidak bersifat linear. Persamaan diferensial nonlinear memiliki setidaknya satu suku dalam bentuk seperti $y^2, xy,$ atau suku pangkat lainnya.

Contoh sistem persamaan diferensial biasa nonlinear adalah:

$$\frac{dx}{dt} = x - y$$

$$\frac{dy}{dt} = xy$$

Sistem persamaan diferensial nonlinear dapat memberikan solusi yang lebih kompleks dan sulit dipecahkan secara analitis dibandingkan dengan sistem persamaan diferensial linear. Pendekatan numerik sering digunakan untuk memperoleh solusi numerik pada sistem persamaan diferensial nonlinear. Nonlinearitas dapat menyebabkan perilaku sistem yang lebih kompleks, seperti keberadaan solusi yang tidak stabil, siklus, atau bahkan kekacauan, tergantung pada bentuk persamaan dan parameter-parameternya. Model *predator-prey* merupakan model interaksi antar mangsa dan pemangsa yang membentuk sistem persamaan diferensial nonlinear (Fitria, 2011)

2.5 Model *Lotka-Voltera*

Model *Lotka-Voltera* adalah suatu sistem persamaan diferensial yang digunakan untuk memodelkan interaksi antara dua spesies dalam suatu ekosistem. Model ini pertama kali diusulkan oleh Alfred Lotka pada tahun 1925 untuk menjelaskan dinamika populasi dua spesies, dan kemudian dikembangkan lebih lanjut oleh Vito Volterra pada tahun 1926. Model ini umumnya digunakan dalam konteks *predator*-mangsa, di mana satu spesies berperan sebagai *predator* dan yang lainnya sebagai mangsa.

Bentuk umum dari model Lotka-Volterra untuk dua populasi adalah sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy \tag{2.4}$$

Dimana x dan y adalah populasi dari dua spesies, sedangkan t adalah waktu, dan $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ adalah parameter yang menggambarkan karakteristik biologis dari interaksi antar spesies. Persamaan di atas menyatakan laju pertumbuhan atau penurunan populasi masing-masing spesies.

αx = Laju pertumbuhan alami dari spesies x

βxy = Laju penurunan populasi x karena predasi oleh spesies y

δxy = Laju pertumbuhan populasi y karena konsumsi mangsa x

γy = Laju penurunan alami dari populasi y

Jika diasumsikan laju pertumbuhan populasi *prey* dengan tidak adanya *predator*, maka laju pertumbuhannya cepat mendekati eksponensial dan tak terbatas dapat dibentuk seperti berikut:

$$\frac{dx(t)}{dt} = N(t)r \tag{2.5}$$

$N(t)$ = Populasi spesies *prey*

r = Laju pertumbuhan *prey*

Karena sumber daya alam yang terbatas, laju pertumbuhan *prey* menjadi fungsi logistik dan dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dN(t)}{dt} = N(t)r\left(1 - \frac{N(t)}{k}\right) \tag{2.6}$$

$\left(1 - \frac{N(t)}{k}\right)$ = sisa jumlah individu dalam populasi yang belum digunakan

k = *Carrying Capacity* atau jumlah maksimum individu dalam suatu ekosistem

Populasi pada tingkay K biasa disebut dengan tingkat kejenuhan karena lebih besarnya tingkat kematian daripada tingkat kelahiran pada populasi besar.

Carrying Capacity Adalah maksimum banyaknya individu yang mampu didukung oleh sumber daya dari suatu ekosistem. dengan kata lain *Carrying Capacity* dapat dikatakan sebagai kemampuan ekosistem untuk mendukung semua kehidupan makhluk hidup yang ada di dalamnya secara berkelanjutan. *Carrying Capacity* erat kaitannya dengan persediaan makanan *prey* yaitu tumbuh-tumbuhan. sehingga dibentuk suatu persamaan dengan *prey* dan *predator* yang akan saling berinteraksi yaitu sebagai berikut.

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\beta N(t)P(t) \tag{2.7}$$

Dengan β adalah laju predasi *prey* oleh *predator* dan $P(t)$ adalah populasi *predator*. Berdasarkan penjelasan di atas maka dapat dibentuk model pertumbuhan *prey* sebagai berikut.

$$\frac{dN(t)}{dt} = N(t)r\left(1 - \frac{N(t)}{k}\right) - \beta N(t)P(t) \tag{2.8}$$

$K, \beta, r > 0$, karena setiap populasi memiliki potensi berkembang biak.

karena dalam hubungannya *prey* akan berinteraksi dengan *predator*, maka persamaan di atas bersifat mengurangi banyaknya populasi *prey*. Sedangkan terjadi sebaliknya pada model pertumbuhan *predator*, model ini akan bersifat menambah jumlah populasi *predator* (Timuneno et al., 2008).

2.6 Linearisasi Sistem (Matriks *Jacobian)*

Linearisasi sistem adalah cara untuk menyederhanakan sistem yang memiliki hubungan non linier menjadi bentuk yang lebih mudah dimengerti, yaitu sistem yang bersifat linear. Dalam konteks ini, sistem dapat mencakup berbagai hubungan dan interaksi antara variabel-variabel tertentu.

Linearisasi diperlukan untuk menganalisa sistem persamaan diferensial non linear. Untuk memperoleh hasil linearisasi sistem persamaan diferensial non linear biasanya digunakan Matriks *Jacobian.*

Definisi 1. Diberikan fungsi $f = (f_1, \dots, f_n)$ pada sistem $\bar{x} = f(x)$ dengan $f_i \in C(E), i = (1,2, \dots, n)$.

$$Jf(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1}(\bar{x}) & \frac{\delta f_1}{\delta x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1}(\bar{x}) & \frac{\delta f_2}{\delta x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\delta f_2}{\delta x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f_n}{\delta x_1}(\bar{x}) & \frac{\delta f_n}{\delta x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\delta f_n}{\delta x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix} \qquad (2.9)$$

Matriks = dinamakan matriks *Jacobian* dari f ke titik $\bar{x}$ (Hale & Kocak, 2012).

Definisi 2. Sistem Linear $\bar{x} = Jf(\bar{x}) - (x - \bar{x})$disebut linearisasi sistem non linear $\bar{x} = f(\bar{x})$ di sekitar titik $\bar{x}$ (Hale & LaSalle, 1968)

Contoh:
Diberikan persamaan nonlinear sebagai berikut:

$$f_1(x, y, z) = xy + xz + yz$$
$$f_1(x, y, z) = xz + yz^2 - 2xy$$
$$f_1(x, y, z) = -yz + x^2y^2 - z$$

Penyelesaian:

$$J_{3x3} = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x} & \frac{\delta f_1}{\delta y} & \frac{\delta f_1}{\delta z} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x} & \frac{\delta f_2}{\delta y} & \frac{\delta f_2}{\delta z} \\ \frac{\delta f_3}{\delta x} & \frac{\delta f_3}{\delta y} & \frac{\delta f_3}{\delta z} \end{bmatrix}$$

$$J_{3x3} = \begin{bmatrix} y+z & x+z & x+y \\ z-2y & z^2-2x & x+2yz \\ 2xy^2 & -z+2xy & -y-1 \end{bmatrix}$$

2.7 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Misal A adalah matriks berordo n x n, maka sebuah vektro taknol x pada $\mathbb{R}^n$ disebut vektor eigen dari A jika Ax adalah sebuah kelipatan dari x. Yaitu:

$$Ax = \lambda x$$

untuk skalar sebarang λ. Skalar λ ini merupakan nilai eigen dari A, sedangkan x adalah vektor eigen dari A yang terkait dengan λ.

Contoh:
Misal diberikan vektor $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ dan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$= 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3x$$

Vektor $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ yang terkait dengan nilai eigen $\lambda = 3$.

Untuk mencari nilai eigen dari sebarang matriks A berordo n x n, persamaan $Ax = \lambda x$ dapat di tulis kembali menjadi ......(Side, 2013):

$$Ax = \lambda I x$$
$$Ax - \lambda I x = 0$$
$$(A - \lambda I)x = 0$$

Untuk membuat λ menjadi nilai eigen, harus ada satu solusi taknol dari persamaan ini. Persamaan ini akan memiliki solusi taknol jika dan hanya jika:

$$det(A - \lambda I) = 0$$

Persamaan di atas disebut juga dengan persamaan karakteristik dari matriks A. Nilai-nilai eigen dari matriks A adalah sklar-skalar yang memenuhi persamaan karakteristik dari matriks A.

2.8 Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium atau titik kesetimbangan disebut juga titik tetap atau titik kritis. Missal diberikan sistem persamaan diferensial yang berbentuk:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

Sebuah titik (x_0, y_0) dikatakan sebagai titik kesetimbangan dari sistem persamaan di atas apabila memenuhi syarat $f(x_0, y_0) = 0$ dan $g(x_0, y_0) = 0$. Karena turunan suatu konstanta sama dengan nol, maka sepasang fungsi konstanta $x(t) = x_0$ dan y$(t) = y_0$ merupakan penyelesaian keseimbangan dari sistem persamaan di atas(Campbell & Haberman, 2019).

Untuk menentukan titik ekuilibrium dapat digunakan metode nullcline
- Tentukan x-nullcline $\frac{dx}{dt} = 0$ dan y-nullcline $\frac{dy}{dt} = 0$
- Titik ekuilibrium adalah perpotongan dari x-nullcline dan y-nullcline

Contoh
Tentukan titik kesetimbangan dari sistem berikut:

$$x' = x + y - 4$$
$$y' = x - 2y - 1$$

x-nullcline → $x + y - 4 = 0$
y-nullcline → $x - 2y - 1 = 0$

kemudian gunakan eliminasi dan substitusi untuk mendapatkan nilai x dan y.

$$\begin{array}{r} x + y - 4 = 0 \\ x - 2y - 1 = 0 \quad - \\ \hline 3y - 3 = 0 \\ 3y = 3 \\ y = 1 \end{array}$$

Substitusi $y = 1$ ke x-nullcline

$$x + (1) - 4 = 0$$
$$x = 3$$

Maka diperoleh titik ekuilibrium (3,1).

2.9 Analisa Kestabilan Sistem Titik Ekuilibrium

Konsep perilaku sistem pada titik ekuilibrium dikenal sebagai kestabilan titik kesetimbangan. kestabilan tersebut merupakan informasi untuk menggambarkan perilaku sistem. Titik kesetimbangan dikatakan stabil apabila perubahan kecil pada sistem hanya sedikit mengubah perilaku penyelesaian untuk waktu yang akan datang dan dikatakan tidak stabil apabila perubahan kecil pada sistem mengakibatkan perubahan yang besar pada perilaku penyelesaian untuk waktu yang akan datang.

Kestabilan titik ekuilibrium dapat ditentukan dengan memperhatikan nilai-nilai eigen, yaitu λ_i dengan $i = 1,2, \dots, n$ yang di peroleh dari persamaan karakteristik. Jenis-jenis kestabilan titik ekuilibrium diantaranya adalah:

1. Stabil

Titik kesetimbangan $\vec{x}^*$ dari sistem $\vec{x}' = f(x)$ dikatakan stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga pada saat $1 = 0$ memenuhi $||\vec{x}(0) - \vec{x}^*|| < \delta$ maka untuk penyelesaian $\vec{x}(t)$ dari sistem $\vec{x}' = f(x)$ berlaku $||\vec{x}(0) - \vec{x}^*|| < \varepsilon$ untuk t menuju tak hingga.

“Jika ada nanya jika akar-akar dari persamaan karakteristiknya adalah riil dan negatif atau mempunyai bagian riil tak positif”.

2. Stabil Asimtotis

Titik kesetimbangan $\vec{x}^*$ dari sistem $\vec{x}' = f(x)$ dikatakan stabil asimtotis jika titik tersebut stabil dan terdapat $\delta > 0$ sehingga jika pada saat $t = 0$ memenuhi memenuhi $\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta$ maka untuk penyelesaian $\vec{x}(t)$ dari sistem $\vec{x}' = f(x)$ berlaku $\lim_{t\to\infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*$.

"Jika dan hanya jika akar-akar dari persamaan karakteristiknya adalah riil dan negatif atau mempunyai bagian riil yang negatif".

3. Tidak Stabil

Titik kesetimbangan $\vec{x}^*$ dari sistem $\vec{x}' = f(x)$ dikatakan tidak stabil jika titik tersebut tidak memenuhi definisi titik kesetimbangan stabil.

"Jika dan hanya jika akar-akar dari persamaan karakteristiknya adalah riil dan positif atau jika paling sedikit satu akar mempunyai bagian riil yang positif".

Contoh:

1. Misal diketahui sistem $\bar{x} = A\bar{x}$ dengan A telah dikethui, Tentukan kestabilan dari sistem $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Penyelesaian

$$x' = x + 3y \quad \to x - nullcline \quad x + 3y = 0$$
$$y' = x - y \quad \to y - nullcline \quad \underline{x - y = 0 \ \ -}$$
$$4y = 0$$
$$y = 0$$

Substitusi $y = 0$ ke persamaan y-nullcline

$$x - y = 0$$
$$x - 0 = 0$$
$$x = 0$$

Maka diperoleh titik ekuilibrium (0,0).

Kemudian menentukan persamaan karakteristik $|\bar{A} - \lambda I|$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

Det $|\bar{A} - \lambda I| = 0 \leftrightarrow [(1-\lambda)(-1-\lambda)] - [3(1)] = 0$

$$(1-\lambda)(-1-\lambda) - 3 = 0$$
$$-1 - \lambda + \lambda + \lambda^2 - 3 = 0$$
$$\lambda^2 - 4 = 0$$
$$(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$$

Jadi $\lambda_1 = -2$ dan $\lambda_2 = 2$
Karena $\lambda_2 = 2 > 0$ maka titik ekuilibrium (0,0) tidak stabil.

2. Misal diketahui sistem $\bar{x} = A\bar{x}$ dengan A telah dikethui, Tentukan kestabilan dari sistem $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$.

Penyelesaian
$x' = -x - 2y \quad \rightarrow x - nullcline \quad -x - 2y = 0$
$y' = x - 4y \quad \rightarrow y - nullcline \quad \underline{-x + 4y = 0 \ -}$ (y-nullcline dikali(-1))

$$-6y = 0$$
$$y = 0$$

Substitusi $y = 0$ ke persamaan y-nullcline

$$x - 4y = 0$$
$$x - 4(0) = 0$$
$$x = 0$$

Maka diperoleh titik ekuilibrium (0,0).

Kemudian menentukan persamaan karakteristik $|\bar{A} - \lambda I|$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 1 & -4-\lambda \end{bmatrix}$$

Det $|\bar{A} - \lambda I| = 0 \leftrightarrow [(-1-\lambda)(-4-\lambda)] - [-2(1)] = 0$

$$(-1-\lambda)(-4-\lambda) + 2 = 0$$
$$4 + \lambda + 4\lambda + \lambda^2 + 6 = 0$$
$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$
$$(\lambda + 3)(\lambda + 2) = 0$$

Jadi $\lambda_1 = -3$ dan $\lambda_2 = -2$
Karena λ_1 dan $\lambda_2 < 0$ maka titik ekuilibrium (0,0) stabil.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2023/2024 yang bertempat di Jurusan matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini bersifat studi literatur secara sistematis yang diperoleh dari jurnal-jurnal ilmiah yang berkaitan dengan penelitian serta buku dan catatan yang terdapat di perpustakaan Jurusan Matematika dan perpustakaan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Adapun langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian adalah sebagai berikut:

1. Menganalisis model *predator-prey* dengan kasus *predator* terinfeksi yang sudah pernah dikaji pada jurnal-jurnal ilmiah *online.*
2. Mengidentifikasi masalah pada model *predator-prey* pada kasus tiga *predator* satu *prey* dengan dua *predator* terinfeksi.
3. Menyusun dan mengembangkan asumsi-asumsi yang terstruktur untuk memfasilitasi proses analsis secara sistematis.
4. Mendefiniskan variable-variabel yang akan digunakan dalam kerangka persamaan sistem.
5. Membentuk skema interaksi pada model *predator-prey* pada kasus tiga *predator* satu *prey* dengan dua *predator* terinfeksi.

6. Merumuskan model matematika pada model *predator-prey* pada kasus tiga *predator* satu *prey* dengan dua *predator* terinfeksi.

BAB V KESIMPULAN

Pada akhir skripsi ini, penulis akan memberikan kesimpulan dari hasil penelitian model matematika pada kasus tiga *predator* satu *prey* dengan dua *predator* terinfeksi yang telah dilakukan dan memberi sedikit saran bagi pembaca yang tertarik dan ingin mengkaji topik ini.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, telah dimodelkan model *predator-prey* pada kasus tiga *predator* satu *prey* di dalam suatu ekosistem. Dimana terdapat dua jenis *predator* yang terinfeksi dan berpeluang menularkan ke sesame jenisnya. Dari asumsi-asumsi tersebut dan beberapa faktor lain yang mempengaruhi, berikut adalah model *predator-prey* yang di dapat:

1. Perkembangan populasi *predator* jenis pertama yang dipengaruhi oleh kematian alami dan proses predasi dapat dimodelkan sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = a_1 xm - a_2 x$$

2. Perkembangan populasi *predator* jenis kedua yang tidak terinfeksi yang dipengaruhi oleh pemberian vaksinasi, interaksi dengan *predator* yang terinfeksi, dan kematian alami dapat dimodelkan sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dt} = -b_1(1-\mu_1)yi + \mu_2 i + b_2 ym - b_3 y$$

3. Perkembangan populasi *predator* jenis ketiga yang tidak terinfeksi yang dipengaruhi oleh faktor pemberian vaksinasi, interaksi dengan *predator* yang terinfeksi, dan kematian alami dapat dimodelkan sebagai berikut

$$\frac{dz}{dt} = -c_1(1-\rho_1)zj + \rho_2 j + c_2 zm - c_3 z$$

4. Perkembangan populasi *predator* jenis kedua yang terinfeksi dengan dipengaruhi oleh beberapa faktor yaitu pemberian *treatmen* untuk menghilangkan infeksi dan kematian alami dapat di modelkan sebagai berikut:

$$\frac{di}{dt} = b_1(1-\mu_1)yi - \mu_2 i - d_1 i - d_2 i$$

5. Perkembangan populasi *predator* jenis ketiga yang terinfeksi dengan dipengaruhi oleh beberapa faktor yaitu pemberian *treatmen* untuk menghilangkan infeksi dan kematian alami dapat di modelkan sebagai berikut:

$$\frac{dj}{dt} = c_1(1-\rho_1)zj - \rho_2 j - e_1 j - e_2 j$$

6. Perkembangan populasi *prey* yang dipengaruhi oleh laju pertumbuhan, proses predasi oleh kedua *predator* dan kematian alami dapat dimodelkan sebagai berikut:

$$\frac{dm}{dt} = \beta m - f_1 xm - f_2 ym - f_3 zm - f_4 im - f_5 jm$$

5.2 Saran

Hasil dari penelitian ini tidak hanya dapat diterapkan di kehidupan ekosistem flora dan fauna saja, tetapi juga dapat diterapkan pada kehidupan sehari-hari seperti polisi-penjahat, dunia bisnis, dan infeksi bakteri. Kepada pembaca yang menemukan kasus *predator-prey* pada kehidupan sehari-hari, dapat menggunakan pemodelan ini untuk mengetahui kestabilan lingkungan tersebut dengan menyesuaikan asumsi dan variabel terkait.

DAFTAR PUSTAKA

Campbell, S. L., & Haberman, R. (2019). Introduction to Differential Equations with Dynamical Systems. In *Introduction to Differential Equations with Dynamical Systems*. https://doi.org/10.2307/j.ctvcmxp4x

Fitria, V. A. (2011). Analisis Sistem Persamaan Diferensial Model Predator-prey dengan Perlambatan. *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni Dan Aplikasi*, *2*(1). https://doi.org/10.18860/ca.v2i1.1807

Hale, J. K., & LaSalle, J. P. (1968). Differential Equations and Dynamical Systems. *Mathematics of Computation*, *22*(102). https://doi.org/10.2307/2004696

Asmaidi. (2021). Pemodelan Matematika Penyebaran COVID19 Tipe SV1V2EIR. *Journal of Applied Sciences, Electrical Engineering and Computer Technology*, *2*(2). https://doi.org/10.30871/aseect.v2i2.3513

Saria, A. P., & Waluyab, S. B. (2021). Analisis Model Predator-Prey dengan Protection Zone Menggunakan Fungsi Respon Holling Tipe II. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika*, *2*.

Sayekti, I. M., Malik, M., & Aldila, D. (2017). One-prey two-predator model with prey harvesting in a food chain interaction. *AIP Conference Proceedings*, *1862*. https://doi.org/10.1063/1.4991228

Shams, M., Kausar, N., Alayyash, K., Al-Shamiri, M. M., Arif, N., & Ismail, R. (2023). Semi-Analytical Scheme for Solving Intuitionistic Fuzzy System of Differential Equations. *IEEE Access*, *11*. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2023.3241482

Taufiq, I., & Agustito, D. (2018). Model Predator-Prey dengan Dua Predator dan Satu Prey Terinfeksi. *Indonesian Journal of Mathematics Education*, *1*(1). https://doi.org/10.31002/ijome.v1i1.887

Timuneno, H. M., Utomo, R. H. S., & Widowati. (2008). MODEL PERTUMBUHAN LOGISTIK DENGAN WAKTU TUNDA. *Jurnal Matematika*, *Vol 11*(No 1).