PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BERNOULLI MENGGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN LAPLACE

Skripsi

Oleh

ILMA ISYAHNA SHOLEHA
NPM 2157031006

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

ABSTRACT

SOLVING BERNOULLI DIFFERENTIAL EQUATIONS USING THE LAPLACE DOMIAN DECOMPOSITION METHOD

By

Ilma Isyahna Sholeha

The Bernoulli differential equation is a form of first order ordinary differential equation. Because the Bernoulli differential equation is a non-linear equation whose form is quite complex, this research uses the Adomian Laplace decomposition method to find the solution. This method is a semi-analytic method that combines the Laplace transformation and the Adomian decomposition method. The solution steps include applying the Laplace transform to the Bernoulli differential equation, defining the solution as an infinite series, using Adomian polynomials to solve the non-linear part, and applying the inverse Laplace transform. The simulation results and error analysis show that the Adomian Laplace decomposition method can provide an accurate approach to the exact solution for the value $0 \leq t \leq 0,2$. Meanwhile, for a value of $t \geq 0,2$ the resulting solution tends to be far from the exact solution.

Keywords: Bernoulli differential equation, Adomian Laplace decomposition method.

ABSTRAK

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BERNOULLI MENGGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN LAPLACE

Oleh

Ilma Isyahna Sholeha

Persamaan diferensial Bernoulli merupakan salah satu bentuk dari persamaan diferensial biasa orde satu. Karena persamaan diferensial Bernoulli merupakan persamaan non linear yang bentuknya cukup kompleks, maka pada penelitian ini digunakan metode dekomposisi Adomian Laplace untuk mencari penyelesaiannya. Metode ini merupakan metode semi analitik yang mengkombinasikan antara tranformasi Laplace dan metode dekomposisi Adomian. Langkah-langkah penyelesaiannya meliputi penerapan transformasi Laplace pada persamaan diferensial Bernoulli, mendefinisikan solusi sebagai deret tak hingga, menggunakan polinomial Adomian untuk menyelesaikan bagian non linear, dan menerapkan invers transformasi Laplace. Hasil simulasi dan analisis galat menunjukkan bahwa metode dekomposisi Adomian Laplace dapat memberikan pendekatan yang akurat terhadap solusi eksak untuk nilai $0 \leq t \leq 0,2$. Sedangkan, untuk nilai $t \geq 0,2$ solusi yang dihasilkan cenderung menjauhi solusi eksak.

Kata-kata kunci: Persamaan diferensial Bernoulli, metode dekomposisi Adomian Laplace.

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BERNOULLI MENGGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN LAPLACE

ILMA ISYAHNA SHOLEHA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

Judul Skripsi	:	**PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BERNOULLI MENGGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN LAPLACE**
Nama Mahasiswa	:	**Ilma Isyahna Sholeha**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2157031006**
Program Studi	:	**Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dorrah

Dra. Dorrah Azis, M.Si.
NIP 198406272006042001

Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.
NIP 198002062003121003

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. tim penguji

Ketua	:	**Dra. Dorrah Azis, M.Si.**	Dorrah ....
Sekretaris	:	**Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Drs. Tiryono Ruby, M.Sc, Ph.D.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **23 Januari 2025**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Ilma Isyahna Sholeha**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2157031006**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BERNOULLI MENGGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN LAPLACE**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai degnan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 23 Januari 2025
Penulis,

Ilma Isyahna Sholeha

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Ilma Isyahna Sholeha yang lahir di Kuripan pada tanggal 05 Maret 2004. Penulis merupakan anak kelima dari lima bersaudara pasangan Bapak Syahrul Effendi dan Ibu Husna.

Penulis mengawali pendidikan di pendidikan dasar di SDN Taman Baru pada tahun 2009-2015. Kemudian penulis melanjutkan jenjang pendidikannya di SMPN 1 Kalianda pada tahun 2015-2018 dan Sekolah Menengah Atas di SMAN 1 Kalianda pada tahun 2018-2021. Setelah itu penulis diterima sebagai mahasiswi Program Studi S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Mandiri Masuk Perguruan Tinggi Negeri Wilayah Barat (SMM PTN-Barat) pada tahun 2021.

Selama menjadi mahasiswi, penulis aktif di beberapa kegiatan di antaranya aktif dalam kepengurusan organisasi HIMATIKA FMIPA Unila sebagai Anggota Bidang Kaderisasi dan Kepemimpinan pada tahun 2022 serta pada tahun yang sama penulis juga tergabung sebagai Anggota Dinas Pengembangan Sumber Daya Manusia (PSDM) dari kepengurusan organisasi BEM FMIPA Unila. Lalu menjabat sebagai Sekretaris Bidang Kaderisasi dan Kepemimpinan pada tahun 2023.

Kemudian pada Bulan Januari-Februari 2024 penulis melaksanakan Praktik Kerja Lapangan (PKL) di Badan Perencanaan Pembangunan Daerah (BAPPEDA) Kabupaten Lampung Selatan yang berlokasi di Kalianda dengan posisi di Bidang Ekonomi. Selanjutnya pada bulan Juni-Agustus 2024 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Cempaka Nuban, Kecamatan Batanghari Nuban, Kabupaten Lampung Timur, Provinsi Lampung.

KATA INSPIRASI

"Kun Fa Yakun."

"Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya."
(QS. Al-Baqarah: 286)

"Maka, sesungguhnya beserta kesulitan ada kemudahan. Sesungguhnya beserta kesulitan ada kemudahan."
(QS. Al-Insyirah: 5-6)

"Boleh jadi kamu membenci sesuatu, padahal itu baik bagimu, dan boleh jadi (pula) kamu menyukai sesuatu, padahal itu buruk bagimu. Allah mengetahui, sedang kamu tidak mengetahui."
(QS. Al-Baqarah:216)

"Ketika seseorang menghinamu, itu adalah sebuah pujian bahwa selama ini mereka menghabiskan waktu untuk memikirkan kamu, bahkan ketika kamu tidak memikirkan mereka."
(B.J. Habibie)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin,

Hari ke hari, minggu ke minggu, bulan ke bulan, akhirnya tibalah saat pekerjaan besar ini selesai. Entah berapa banyak kesedihan yang terluapkan, berapa emosi yang terbuang, dan berapa besar harapan yang tergenggam. Puji syukur kehadirat Allah SWT, sebuah karya yang penuh perjuangan telah terselesaikan. Dengan rasa syukur dan Bahagia, penulis persembahkan rasa terima kasih kepada:

Kedua orang tua tercinta

Emak dan Ayah yang senantiasa selalu berada di samping membersamaiku dengan penuh kasih sayang, dukungan, dan doa yang tiada henti. Semoga dengan karya sederhana ini menjadi salah satu bukti dari rasa terima kasih yang tidak bisa digantikan oleh apapun.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terima kasih atas waktu, ilmu, serta arahan yang tak hanya membentuk tulisan dalam skripsi ini, tetapi juga membentuk cara berpikir penulis. Setiap koreksi, catatan, dan saran yang diberikan bukan hanya sekedar revisi, tetapi juga batu loncatakan menuju pemahaman yang lebih dalam. Semoga ilmu yang dibagikan menjadi pahala yang terus mengalir tanpa batas.

Sahabat-sahabatku

Terima kasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta
Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Penyelesaian Persamaan Diferensial Bernoulli Dengan Metode Dekomposisi Adomian Laplace" dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Dra. Dorrah Azis, M.Si. selaku Pembimbing 1 yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing 2 yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Drs. Tiryono Ruby, M.Sc, Ph.D. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.
4. Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung dan dosen pembimbing akademik.
5. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Keluarga tercintaku, Emak, Ayah, Kak Lusi, Bang Ricky, Kak lia, Bang Prilly, Kak Irma, Bang Okta, Faathir, Syahmi, Ainin, dan Hagia yang selalu

menjadi titik awal dan akhir dari setiap perjalanan penulis. Terima kasih telah menjadi rumah terhangat untuk selalu kembali.

7. Pinki, boneka berwarna pink kesayangan penulis dengan bulu lembut dan hangat, selalu setia menemani penulis di kala tidur setelah melewati hari-hari yang penuh kesibukan. Terima kasih juga kepada seseorang yang telah menghadiahkan Pinki, yang bukan hanya memberikan kenangan indah, tetapi juga menjadi tempat ternyaman untuk 'pulang' saat penulis membutuhkan sandaran. Meski terpisah oleh jarak sejauh 2.265 Km, tetapi kehadirannya selalu terasa, memberikan kehangatan dan ketenangan di setiap waktu.

8. Anggun dan Arvi, yang telah penulis anggap seperti kakak sendiri, selalu hadir dalam suka dan duka sejak awal perkuliahan. Mereka bukan hanya teman, tetapi juga bagian dari perjalanan serta menyaksikan setiap langkah yang penulis tempuh, berbagi cerita, dan menjadi bagian dari kenangan berharga yang tak terlupakan.

9. Falen, Gading, Alam, Amri, dan Randia, sahabat yang selalu hadir, membantu, dan menemani penulis dalam setiap perjalanan perkuliahan. Bersama mereka, hari-hari penuh kesibukan terasa lebih ringan, dan setiap momen menjadi lebih berwarna serta penuh kebahagiaan.

10. Keluarga kaderku Kabid, Margo, Kodri, Josep, Insan, Dafiani, Dela, Diah, Gebi, Intan, Nawang, Nisa, Sabet, dan Veny yang tidak hanya menguatkan, tetapi juga menghadirkan tawa dan semangat di setiap langkah.

11. Anak-anak Ayah Reca, Diva, Jepi, dan Aisyah yang telah banyak membantu penulis dengan ketulusan dan kebaikan.

12. Sahabat SMA Penulis, Rizka, Nisrina, Diah, dan Oka yang tetap mendukung dan mendoakan penulis, walau kesempatan untuk bertemu sangat terbatas.

13. Teman-teman Pimpinan HIMATIKA periode 2023 serta Bidang Kaderisasi dan Kepemimpinan 2022 dan 2024 yang selalu memberikan semangat, doa, dan dukungan terus menerus yang tidak pernah berhenti mengalir.

14. Teman-teman KKN Desa Cempaka Nuban yang senantiasa selalu menemani.

15. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa karya ini masih jauh dari sempurna, sehingga dengan rendah hati mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk perbaikan di masa depan.

Bandar Lampung, 23 Januari 2025

Ilma Isyahna Sholeha

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Persamaan diferensial merupakan salah satu topik penting dalam matematika dan aplikasinya di berbagai bidang seperti fisika, teknik, dan ekonomi. Salah satu jenis persamaan diferensial yang sering dijumpai adalah persamaan diferensial Bernoulli. Persamaan diferensial Bernoulli adalah salah satu bentuk dari persamaan diferensial biasa orde satu yang memiliki bentuk umum:

$$\frac{dy}{dt} + A\left(t\right)y = B\left(t\right)y^{n}$$

dengan n adalah bilangan real. (Brannan dan Boyce, 2015)

Karena persamaan diferensial Bernoulli merupakan persamaan non linear yang bentuknya cukup kompleks, sehingga dapat digunakan metode semi analitik dengan pendekatan alternatif untuk menemukan solusinya. Metode Dekomposisi Adomian Laplace merupakan metode semi analitik yang mengkombinasikan antara tranformasi Laplace dan metode dekomposisi Adomian (Abdy dkk, 2018). Metode tersebut sudah banyak digunakan untuk menyelesaikan berbagai persamaan diferensial linear maupun non linear.

Berdasarkan penelitian terdahulu yang dilakukan oleh (Sari, 2017) yaitu menyelesaikan persamaan diferensial Riccati menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace, dalam penelitiannya menyatakan bahwa hasil perhitungan dari metode dekomposisi Adomian Laplace cukup efektif untuk menghampiri penyelesaian eksak. Metode ini memungkinkan penulis untuk mendapatkan solusi dalam bentuk deret yang dapat dihitung secara numerik, sehingga memberikan fleksibilitas dalam menangani masalah yang kompleks.

Selanjutnya, penelitian yang dilakukan oleh (Sanusi dkk, 2019) yaitu mencari solusi untuk persamaan Transport dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace yang menyatakan bahwa hasil penelitian tersebut solusinya sama dengan metode analitik pada umumnya yaitu fungsi matematik yang berbentuk $u(x,t)$ dengan x dan t adalah konsentrasi polutan dalam posisi x dan waktu t. Serta penelitan lainnya yang juga menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace untuk mencari solusi dari berbagai persamaan yaitu penelitian oleh (Abdy dkk, 2022) terhadap persamaan Adveksi-Divusi dan (Sari dkk, 2023) terhadap persamaan Burgers. Selain untuk mencari solusi dari suatu persamaan, metode dekomposisi Adomian Laplace juga digunakan dalam menganalisis model persamaan diferensial fraksional dari penyebaran penyakit campak dan solusi numeriknya yang dilakukan oleh (Gumelar dkk, 2023).

Dalam penelitian ini, penulis akan membahas penerapan metode dekomposisi Adomian Laplace dalam menyelesaikan persamaan diferensial Bernoulli. Penelitian ini dimulai dengan menerapkan transformasi Laplace pada persamaan diferensial Bernoulli, mendefinisikan solusi sebagai deret tak hingga, menyatakan suku non linear dalam polinomial adomian, dan menerapkan invers transformasi Laplace untuk menyelesaikannya.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini sebagai berikut:

1) Menyelesaikan persamaan diferensial Bernoulli menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace.
2) Menentukan galat dari solusi yang diperoleh menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace dengan solusi eksaknya.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang dapat diperoleh dari penelitian ini sebagai berikut:

1) Mengetahui langkah-langkah penyelesaian persamaan diferensial Bernoulli menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace.
2) Mengetahui perbandingan solusi yang diperoleh menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace dan solusi eksak.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan yang hanya melibatkan turunan biasa dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas tunggal (Sugiyarto, 2015). Orde merupakan turunan tertinggi pada sebuah persamaan diferensial. Sedangkan, derajat merupakan pangkat dari turunan tertinggi pada sebuah persamaan diferensial.

Contoh 2.1.1 Diberikan persamaan berikut ini:
$5x + y\frac{d^2y}{dx^2} = 9$
Persamaan pada contoh (2.1.1) merupakan contoh dari persamaan diferensial biasa dengan orde dua dan derajat satu.

2.1.1 Persamaan Diferensial Biasa Linear

Suatu persamaan diferensial biasa disebut linear jika tidak ada perkalian antar variabel-variabel tak bebas atau derivatif-derivatifnya atau dapat ditulis dalam bentuk:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \qquad (2.1.1)$$

Dengan syarat semua variabel dan turunan dari y adalah derajat pertama serta hanya terdapat satu variabel bebas yaitu x. (Sugiyarto, 2015)

Pada bentuk (2.1.1) jika $g(x) = 0$ maka suatu persamaan diferensial merupakan persamaan diferensial homogen. Sedangkan, jika $g(x) \neq 0$ disebut persamaan diferensial non homogen.

Contoh 2.1.2 Perhatikan persamaan berikut ini:

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} - x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 5y = sin\, x \tag{2.1.2}$$

Karena memenuhi bentuk (2.1.1) maka persamaan pada contoh (2.1.2) merupakan persamaan diferensial biasa linear non homogen dengan derajat satu dan orde tiga.

2.1.2 Persamaan Diferensial Biasa Non Linear

Jika suatu persamaan diferensial biasa tidak memenuhi bentuk (2.1.1) maka persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial biasa non linear.

Contoh 2.1.3 Diberikan persamaan berikut ini:

$$x(\frac{dy}{dx})^2 + x^2y = 0 \tag{2.1.3}$$

Persamaan pada contoh (2.1.3) merupakan persamaan diferensial biasa non linear homogen dengan derajat dua dan orde satu.

2.2 Persamaan Diferensial Bernoulli

Persamaan Diferensial Bernoulli diberi nama oleh Jacob Bernoulli (1654–1705) dan diselesaikan pertama kali oleh Leibnitz pada tahun 1696. Persamaan diferensial Bernoulli adalah persamaan diferensial orde pertama yang memiliki rumus sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dt} + A\,(t)\,y = B\,(t)\,y^n \tag{2.2.4}$$

dimana n adalah bilangan real.

Jika $n = 0$ atau $n = 1$, maka persamaan (2.2.4) adalah linier. Sedangkan, jika $n \neq 0$ atau $n \neq 1$, maka persamaan (2.2.4) adalah non linear. Untuk menyelesaikan persamaan Bernoulli ketika $n \neq 0$ atau $n \neq 1$ harus merubah persamaan (2.2.4) menjadi persamaan linear, berikut merupakan langkah-langkahnya:

1) Membagi persamaan (2.2.4) dengan y^n, diperoleh:

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dt} + A(t)y^{1-n} = B(t) \tag{2.2.5}$$

2) Mengubah variabel y ke z, dimana:

$$z = y^{1-n} \tag{2.2.6}$$

3) Mencari diferensial dari z terhadap t dari persamaan 2.2.6 sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dt} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dt} \Leftrightarrow \frac{1}{1-n}\frac{dz}{dt} = \frac{1}{y^n}\frac{dy}{dt} \tag{2.2.7}$$

4) Mensubstitusikan persamaan (2.2.6) dan (2.2.7) ke dalam persamaan (2.2.5), sehingga didapat persamaan (2.2.4) linear sebagai berikut:

$$\frac{dz}{dt} + (1-n)A(t)z = (1-n)B(t) \tag{2.2.8}$$

5) Bentuk dari persamaan (2.2.8) dapat ditulis juga menjadi:

$$\frac{1}{(1-n)}\frac{dz}{dt} + A(t)z = B(t) \tag{2.2.9}$$

(Brannan dan Boyce, 2015)

Contoh 2.2.1 Selesaikan persamaan berikut ini dengan metode persamaan Bernoulli.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = xy^2$$

Penyelesaian:
Diketahui $n = 2$
Substitusikan nilai n ke persamaan (2.2.6), didapatkan:

$$z = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y}$$

Persamaan pada contoh (2.2.1) dapat diselesaikan menjadi:

$$\begin{aligned}\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{y^2}\frac{1}{x}y &= x\frac{y^2}{y^2}\\ \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{y}\frac{1}{x} &= x\\ y^{-2}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y^{-1} &= x\end{aligned}$$

Karena $\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$, maka:

$$\begin{aligned}z' &= (1-2)y^{-2}\frac{dy}{dx}\\ &= -\,y^{-2}\frac{dy}{dx}\end{aligned}$$

Substitusikan n ke persamaan (2.2.9), sehingga:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-2}z' - \frac{1}{x}z &= x\\ -z' - \frac{1}{x}z &= x\\ z' + \frac{1}{x}z &= -\,x\end{aligned}$$

Gunakan faktor integrasi untuk mencari y berikut:

$$\begin{aligned}\mu &= e^{\int A(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{ln\,x} = x\\ z &= \frac{\int \mu B(x)dx}{\mu}\\ &= \frac{\int x(-x)dx}{x}\\ &= \frac{-\frac{x^3}{3} + c}{x} = -\frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}\end{aligned}$$

Karena $z = \frac{1}{y}$, maka didapat:

$$\begin{aligned}\frac{1}{y} &= -\,\frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}\\ y &= \frac{3x}{-x^3 + c}\end{aligned}$$

Jadi, solusi umum untuk persamaan diferensial pada contoh (2.2.1) adalah:

$$y(t) = \frac{3x}{-x^3 + c}$$

2.3 Transformasi Laplace

Misalkan $F(t)$ suatu fungsi t yang tertentu untuk $t > 0$. Maka transformasi Laplace dari $F(t)$, yang dinyatakan oleh $f(s) = L\{F(t)\}$ didefinisikan sebagai berikut :

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt = F(s) \tag{2.3.10}$$

dengan parameter s adalah bilangan real. Transformasi Laplace suatu fungsi mempunyai beberapa sifat, sifat-sifat tersebut antara lain:

a. Sifat Linear

   Teorema 2.3.1 Jika c_1 dan c_2 adalah sebarang konstanta, sedangkan $F_1(t)$ dan $F_2(t)$ adalah fungsi-fungsi dengan transformasi-transformasi Laplacenya masing-masing $F_1(s)$ dan $F_2(s)$, maka:

   $$L\{c_1F_1(t) + c_2F_2(t)\} = c_1L\{F_1(t)\} + c_2L\{F_2(t)\} = c_1F_1(s) + c_2F_2(s)$$

b. Sifat Translasi atau Pergeseran Pertama

   Teorema 2.3.2 Jika $L\{F(t)\} = F(s)$ maka $L\{e^{at}F(t)\} = F(s-a)$.

c. Sifat Translasi atau Pergeseran Kedua

   Teorema 2.3.3 Jika $L\{F(t)\} = F(s)$ dan $G(t) = \begin{cases} F(t-a) & \text{untuk } t > a \\ 0 & \text{untuk } t < a \end{cases}$.
   Maka: $L\{G(t)\} = e^{-as}F(s)$

d. Sifat Peubah Skala

   Teorema 2.3.4 Jika $L\{F(t)\} = F(s)$ maka $L\{F(at)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right)$.

e. Transformasi Laplace dari Turunan-Turunan

   Teorema 2.3.5 Jika $L\{F(t)\} = F(s)$ maka $L\left\{F'(t)\right\} = sF(s) - F(0)$.

f. Transformasi Laplace dari Integral-Integral

Teorema 2.3.6 Jika $L\{F(t)\} = F(s)$ maka $L\left\{\int_0^t F(u)\,du\right\} = \frac{F(s)}{s}$.

g. Perkalian dengan t^n

Teorema 2.3.7 Jika $L\{F(t)\} = F(s)$ maka $L\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) = (-1^n) F^n(s)$.

h. Sifat Pembagian oleh t

Teorema 2.3.8 Jika $L\{F(t)\} = F(s)$ maka $L\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_0^\infty F(u)\,du$ dengan syarat bahwa $\lim_{t\to 0} f(t)/t$ ada.

(Sugiyarto, 2015)

2.4 Invers Transformasi Laplace

Jika transformasi Laplace dari suatu fungsi $F(t)$ adalah $f(s)$ atau dapat ditulis dengan $L\{F(t)\} = f(s)$, maka $F(t)$ disebut sebagai transformasi Laplace invers dari $f(s)$ dan dapat ditulis sebagai berikut:

$$F(t) = L^{-1}\{F(s)\} \tag{2.4.11}$$

dengan L^{-1} disebut operator transformasi laplace invers. Transformasi Laplace invers dari beberapa fungsi sederhana dapat dilihat pada tabel berikut ini:

Tabel 2.1 Transformasi Laplace invers dari beberapa fungsi sederhana

No.	$F(t)$	$L^{-1}\{F(t)\} = F(s)$
1.	$\frac{1}{s}$	1
2.	$\frac{1}{s^2}$	t
3.	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ $n = 0, 1, 2, ...$	$\frac{t^n}{n!}$
4.	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
5.	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{sin\,at}{a}$
6.	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$cos\,at$
7.	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{sinh\,at}{a}$
8.	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$cosh\,at$

(Sugiyarto, 2015)

Contoh 2.4.1 Selesaikan persamaan di bawah ini dengan menggunakan transformasi Laplace.

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1$$

Penyelesaian:
Persamaan pada contoh (2.4.1) dapat ditulis dalam bentuk:

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

Terapkan transformasi Laplace pada kedua ruasnya, yaitu:

$$L\{(y'')\} - 2L\{(y')\} + 2L\{(y)\} = L\{(0)\}$$

Berdasarkan teorema (2.3.5) dan kondisi awal, diperoleh bahwa:

$$\begin{aligned} L\{(y'')\} &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) \\ &= s^2Y(s) - s.1 - 1 \\ &= s^2Y(s) - s - 1 \\ &= s^2Y - s - 1 \\ L\{(y')\} &= sY(s) - y(0) \\ &= sY(s) - 1 \\ &= sY - 1 \\ L\{(y)\} &= Y(s) = Y \end{aligned}$$

Semuanya disubtitusikan ke dalam transformasi Laplace dari persamaan diferensial yang diberikan, yaitu:

$$\begin{aligned} [s^2Y - s - 1] - 2[sY - 1] + 2Y = 0 \\ \Leftrightarrow\ s^2Y - 2sY + sY + 1 - s = 0 \end{aligned}$$

Persamaan ini dinamakan persamaan pembantu, sehingga penyelesaiannya:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (s^2 - 2s + 2)Y + 1 - s = 0 \\ &\Leftrightarrow (s^2 - 2s + 2)Y = s - 1 \\ &\Leftrightarrow Y = \frac{s-1}{s^2 - 2s + 2} = \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1} \end{aligned}$$

Terapkan transformasi Laplace invers pada kedua ruasnya, didapat:

$$L^{-1}\{(Y)\} = L^{-1}\left\{(\frac{s-1}{(s-1)^2+1})\right\}$$
$$y = e^t\, cos\, t$$

Jadi, solusi khusus persamaan diferensial pada contoh (2.4.1) yang memenuhi kedua kondisi awal adalah:

$$y(t) = e^t\, cos\, t$$

Pada contoh (2.4.1) dapat diselesaikan menggunakan metode numerik yaitu dengan program MATLAB, berikut ini merupakan sintaks yang digunakan untuk mencari solusinya:

Tabel 2.2 Sintaks Transformasi Laplace

```
% Definisikan variabel simbolik
syms y(t) Y s

% Persamaan diferensial
LHS = s^2*Y - s*1 - 1 - 2*(s*Y - 1) + 2*Y;
eqn = LHS == 0;
% Selesaikan dalam domain Laplace
Y_sol = solve(eqn, Y);

% Transformasi balik ke domain waktu
y_sol = ilaplace(Y_sol, s, t);

% Tampilkan hasil
disp('Solusi eksak untuk y(t):');
disp(vpa(y_sol, 6));
```

2.5 Metode Dekomposisi Adomian

Pada metode dekomposisi Adomian, persamaan yang diberikan dalam persamaan operator sebagai berikut:

$$Ly + Ry + Ny = g\left(x\right) \tag{2.5.12}$$

dengan N merupakan operator diferensial non linear. Sedangkan L dan R merupakan operator diferensial linear. Persamaan (2.5.12) dapat ditulis menjadi:

$$Ly = g\left(x\right) - Ry - Ny \tag{2.5.13}$$

dengan $L = \frac{d^n}{dx^n}$ adalah operator diferensial yang mempunyai invers yaitu L^{-1}.

L^{-1} merupakan integral sebanyak orde pada L terhadap x dari 0 sampai x.

$$L^{-1}\left\{Ly\right\} = L^{-1}\left\{g(x)\right\} - L^{-1}\left\{Ry\right\} - L^{-1}\left\{Ny\right\} \tag{2.5.14}$$

Sehingga,

$$y = \varphi + L^{-1}\left\{g(x)\right\} - L^{-1}\left\{Ry\right\} - L^{-1}\left\{Ny\right\} \tag{2.5.15}$$

dengan φ adalah konstanta integral yang memenuhi $Ly = 0$. Kemudian, Adomian mendefinisikan penyelesaian y merupakan deret tak hingga yaitu:

$$y = y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n y_n \tag{2.5.16}$$

Sedangkan, suku non linear Ny dinyatakan dalam suatu polinomial khusus sebagai berikut:

$$Ny = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n \tag{2.5.17}$$

Dengan komponen A_n disebut polinomial Adomian khusus yang dibentuk untuk menghitung suku non linear. Polinomial Adomian hanya bergantung pada komponen-komponen y_0 sampai y_n. Polinomial A_n dibentuk menggunakan ekspansi deret Taylor di titik y_0 dan ditulis:

$$Ny = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n = Ny_0 + N^{'}y_0 \left(y - y_0\right) + N^{''}y_0 \frac{\left(y - y_0\right)^2}{2!} + ... \quad (2.5.18)$$

Dengan mensubstitusikan

$$y - y_0 = \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + ... \quad (2.5.19)$$

Maka diperoleh

$$A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + ... = Ny_0 + N^{'}y_0 \left(\Lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + ...\right) + N^{''}y_0 \frac{\left(\Lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + ...\right)}{2!} + ... \quad (2.5.20)$$

Jika koefisien dari perpangkatan λ disamakan, maka koefisian dari λ^0,λ^1,λ^2,λ^3,... diperoleh Adomian A_0,A_1,A_2,A_3,... sebagai berikut:

$$\begin{aligned} A_0 &= Ny_0 \\ A_1 &= y_1 N^{'}y_0 \\ A_2 &= y_2 N^{'}y_0 + \frac{y_1^2}{2!} N^{''}y_0 \\ A_3 &= y_3 N^{'}y_0 + y_1 y_2 N^{''}y_0 + \frac{y_1^3}{3!} N^{'''}y_0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.5.21)$$

Dapat disimpulkan bahwa y dan Ny merupakan solusi dan suku non linear yang diselesaikan menggunakan A_n. Sehingga, pendekatan n-suku $\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} y_i$ mendekati $y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ untuk $n \to \infty$. Solusinya dapat ditulis menjadi:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n = y_0 - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} y_n + L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (2.5.22)$$

(Astreandini, 2016)

2.6 Metode Dekomposisi Adomian Laplace (LDAM)

Metode Dekomposisi Adomian Laplace adalah gabungan dari metode dekomposisi adomian dan transformasi Laplace. Tinjau kembali persamaan (2.5.13) dan terapkan transformasi Laplace pada persamaan tersebut, diperoleh:

$$L\left\{Ly\right\} = L\left\{g\left(x\right)\right\} - L\left\{Ry\right\} - L\left\{Ny\right\} \tag{2.6.23}$$

Oleh karena

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} yn \ dan \ Ny = \sum_{n=0}^{\infty} An \tag{2.6.24}$$

Substitusikan persamaan (2.6.24) ke dalam persamaan (2.6.23), sehingga dihasilkan:

$$L\left\{Ly\right\} = L\left\{g\left(x\right)\right\} - L\left\{Ry\right\} - L\left\{\sum_{n=0}^{\infty} An\right\} \tag{2.6.25}$$

(Wartono dan Muhaijir, 2013)

2.7 Galat

Galat merupakan selisih antara nilai asli dengan nilai hampiran. Jika semakin kecil nilai galatnya maka solusi hampiran yang didapatkan lebih teliti. Misalkan $\hat{a}$ adalah nilai hampiran terhadap nilai sejatinya yang disimbolkan dengan a maka diperoleh:

$$\varepsilon = a - \hat{a} \tag{2.7.26}$$

ε disebut galat.

Contoh 2.7.1 Diberikan $\hat{a} = 8.50$ merupakan nilai hampiran dari $a = 8.46$
Penyelesaian

$$\varepsilon = 8.46 - 8.50 = -0.04$$

Sehingga, didapat nilai galatnya $\varepsilon = -0.04$

Jika tanda galat untuk positif atau negatif diabaikan, maka galat mutlak dapat didefinisikan sebagai:

$$|\varepsilon| = |a - \hat{a}| \tag{2.7.27}$$

(Munir, 2010)

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

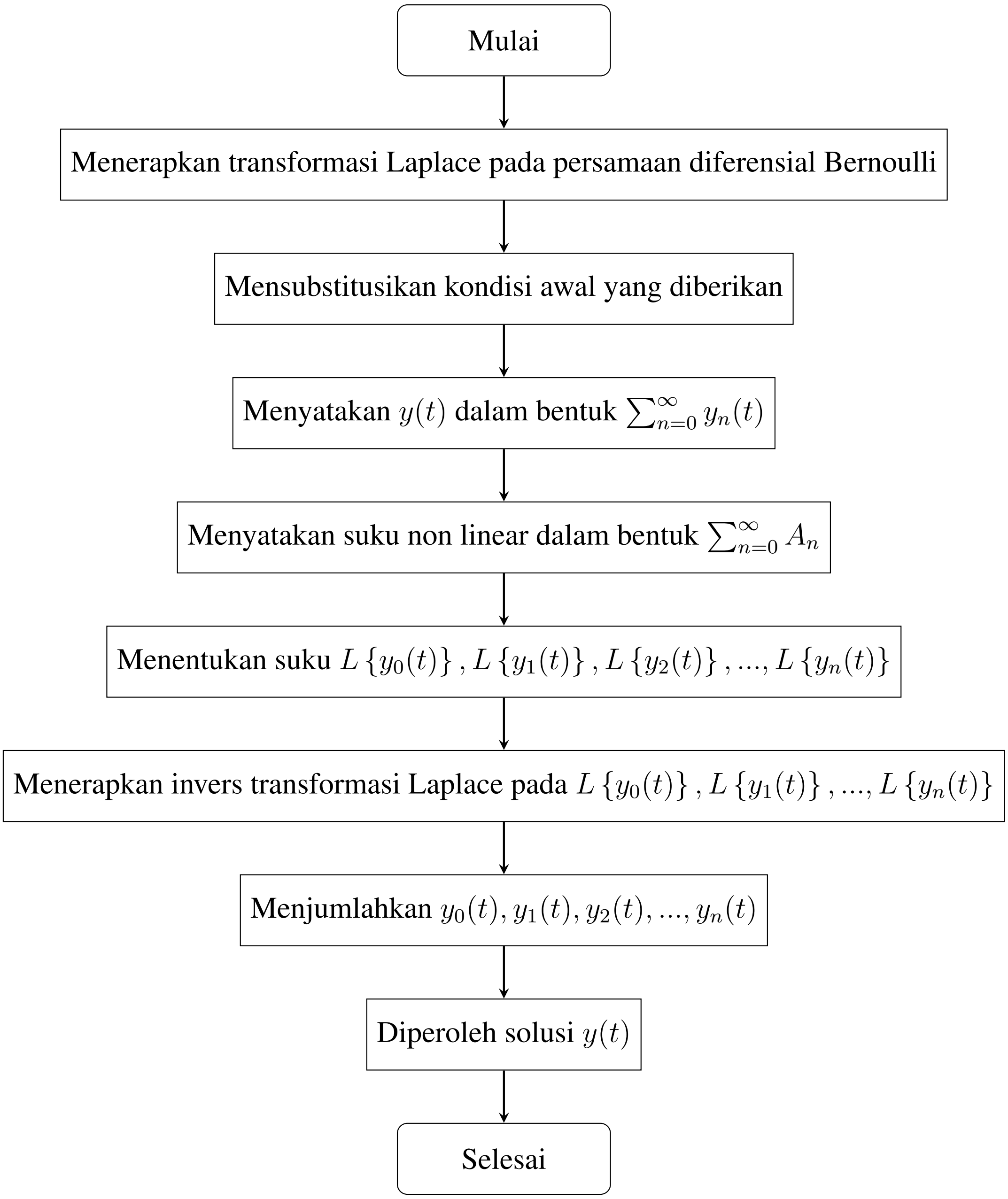
Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2024/2025 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini sebagai berikut:

1. Mempelajari materi yang berkaitan dengan topik penelitian.
2. Mengidentifikasi langkah-langkah penyelesaian dari metode dekomposisi Adomian Laplace.
3. Menentukan contoh penyelesaian dari bentuk persamaan diferensial Bernoulli dengan metode dekomposisi Adomian Laplace secara manual dan menggunakan *software*.
4. Mencari solusi eksak dari contoh penyelesaian bentuk persamaan diferensial Bernoulli.
5. Melakukan analisis dan simulasi galat.
6. Menentukan kesimpulan.

Berikut ini diberikan *flowchart* untuk memperlihatkan secara jelas tahapan penelitian yang lebih sistematis:


Mulai
Menerapkan transformasi Laplace pada persamaan diferensial Bernoulli
Mensubstitusikan kondisi awal yang diberikan
Menyatakan $y(t)$ dalam bentuk $\sum_{n=0}^{\infty} y_n(t)$
Menyatakan suku non linear dalam bentuk $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$
Menentukan suku $L\{y_0(t)\}, L\{y_1(t)\}, L\{y_2(t)\}, ..., L\{y_n(t)\}$
Menerapkan invers transformasi Laplace pada $L\{y_0(t)\}, L\{y_1(t)\}, ..., L\{y_n(t)\}$
Menjumlahkan $y_0(t), y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t)$
Diperoleh solusi $y(t)$
Selesai

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan dalam menyelesaikan persamaan diferensial Bernoulli dengan metode dekomposisi Adomian Laplace yang telah diselesaikan secara manual dan menggunakan *software* yaitu program MATLAB, maka diperoleh:

1. Hasil Penyelesaian dari $\frac{dy}{dt}+3y = y^2$ dengan $y(0) = 1$ dalam bentuk deret, yaitu:

$$
\begin{aligned}
y = 1 - 2t + t^2 + t^3 - \frac{5}{4}t^4 - \frac{7}{20}t^5 + \frac{49}{40}t^6 - \frac{49643}{500000}t^7 \\
-\frac{988839}{1000000}t^8 + \frac{281027}{500000}t^9 + \frac{633973}{1000000}t^{10} + \cdots
\end{aligned}
$$

2. Hasil Penyelesaian dari $\frac{dy}{dt} + 7y = 4y^2$ dengan $y(0) = 1$ dalam bentuk deret, yaitu:

$$
\begin{aligned}
y = 1 - 3t - \frac{3}{2}t^2 + \frac{23}{2}t^3 + \frac{95}{8}t^4 - \frac{2041}{40}t^5 - \frac{395021}{5000}t^6 \\
+\frac{218871}{1000}t^7 + \frac{107562}{125}t^8 + \frac{25821}{25}t^9 + \frac{42459}{20}t^{10} + \cdots
\end{aligned}
$$

3. Persamaan diferensial Bernoulli dapat diselesaikan dengan metode dekomposisi Adomian Laplace pada nilai $0 \leq t \leq 0,2$. Namun, untuk nilai $t \geq 0,2$ solusi LDAM menjauh dari solusi eksaknya dan nilai galat yang diperoleh sangat besar.

5.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya disarankan mengubah metode LDAM menjadi metode lainnya seperti metode *Homotopy Perturbation* (HPM), metode Iteratif Picard, dll. Serta dapat menyelesaikan persamaannya dengan menggunakan *software* yang lebih variatif lainnya seperti phyton, *matematica*, R, dll.

DAFTAR PUSTAKA

Abdy, M., Side, S., & Arisandi, R. (2018). Penerapan Metode Dekomposisi Adomian Laplace dalam Menentukan Solusi Persamaan Panas. *Journal of Mathematics, Computations, and Statistics*, 1(2), 206-211.

Abdy, M., Wahyuni, M. A., & Awaliyah, N. F. (2022). Solusi Persamaan Adveksi-Difusi dengan Metode Dekomposisi Adomian Laplace. *Journal of Mathematics, Computations, and Statistics*, 5(1), 40-47.

Astreandini, Y. (2016). *Penyelesaian Persamaan Korteweg De Vres (KDV) Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace*. (Skripsi, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang: Malang). Diakses dari `http://etheses.uin-malang.ac.id/5504/`.

Brannan, J. R., & Boyce, W. E. (2015). *Differential Equations An Introduction to Modern Methods and Applications* (3^{rd} ed.). USA: *Quad Graphics Versailles*.

Gumelar, W. R., Rusyaman, E., & Anggriani, N. (2023). Analisis Model Persamaan Diferensial Fraksional dari Penyebaran Penyakit Campak dan Solusi Numerik Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace. *Jurnal Matematika*, 22(2), 250-261.

Munir, R. (2010). *Metode Numerik*. Bandung: Informatika Bandung.

Murtafi'ah, W., & Apriandi, D. (2018). *Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya*. Jawa Timur: UNIPMA Press.

Sanusi, W., Side, S., & Fitriani, B. (2019). Solusi Persamaan Transport dengan Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace. *Journal of Mathematics, Computations, and Statistics*, 2(2), 173-182.

Sari, B., Ambarwati, L., & Wiraningsih, E. D. (2023). Solusi Semi Analitik Persamaan Burgers Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace. *Jurnal Matematika dan Terapan*, 5(2), 67-77.

Sari, R. (2017). *Metode Dekomposisi Adomian Laplace Untuk Solusi Persamaan Diferensial Riccati*. (Skripsi, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung: Bandar Lampung). Diakses dari http://digilib.unila.ac.id/id/eprint/29824.

Sugiyarto. (2015). *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Binafsi Publisher.

Wartono, & Muhaijir, M. N. (2013). Penyelesaian Persamaan Riccati dengan Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace. *Jurnal Sains, Teknologi dan Industri*, 11(1), 97-101.