PERBANDINGAN METODE GAUSS-SEIDEL, METODE NEWTON-RAPHSON, DAN METODE BROYDEN DALAM PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN NONLINIER

Skripsi

Oleh

ARVI HASANAH
NPM 2157031001

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

ABSTRACT

COMPARISON OF THE GAUSS-SEIDEL METHOD, NEWTON-RAPHSON METHOD, AND BROYDEN METHOD IN SOLVING NONLINEAR EQUATION SYSTEMS

By

Arvi Hasanah

Nonlinear systems of equations are sets of nonlinear equations that are typically challenging to solve analytically. One common approach to solving nonlinear systems of equations is through numerical methods in the form of iterative techniques, which yield approximate solutions. Several numerical methods can be applied to solve nonlinear systems of equations, such as the Gauss-Seidel Method, Newton-Raphson Method, and Broyden Method. To obtain effective and efficient solutions, selecting the appropriate method is crucial. Therefore, this study aims to compare the performance of the Gauss-Seidel Method, Newton-Raphson Method, and Broyden Method in solving nonlinear systems of equations. MATLAB software is used in this study to assist in solving the nonlinear system. The results indicate that the Newton-Raphson Method is more effective in solving nonlinear systems of equations compared to the Gauss-Seidel and Broyden Methods.

Keywords: Nonlinear System of Equations, Gauss-Seidel Method, Newton-Raphson Method, Broyden Method.

ABSTRAK

PERBANDINGAN METODE GAUSS-SEIDEL, METODE NEWTON-RAPHSON, DAN METODE BROYDEN DALAM PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN NONLINIER

Oleh

Arvi Hasanah

Sistem persamaan nonlinear merupakan sekumpulan persamaan nonlinear yang cenderum sulit diselesaikan secara analitik. Salah satu pendekatan yang umum digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinear yaitu secara numerik dalam bentuk metode iterasi, yang menghasilkan solusi berupa nilai hampiran atau pendekatan. Terdapat banyak metode numerik yang dapat diterapkan untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinear, seperti Metode Gauss-Seidel, Metode Newton-Raphson, dan Metode Broyden. Untuk memperoleh solusi yang efektif dan efisien, dibutuhkan pemilihan metode yang tepat. Oleh karena itu, penelitian ini akan membandingkan kinerja antara Metode Gauss-Seidel, Metode Newton-Raphson, dan Metode Broyden dalam menyelesaikan sistem persamaan nonlinear. Penelitian ini menggunakan perangkat lunak MATLAB untuk membantu dalam proses penyelesaian sistem persamaan nonlinier. Hasil penelitian menunjukkan bahwa Metode Newton-Raphson lebih efektif dalam menyelesaikan sistem persamaan nonlinear dibandingkan dengan Metode Gauss-Seidel dan Metode Broyden.

Kata-kata kunci: Sistem persamaan nonlinier, Metode Gauss-Seidel, Metode Newton-Raphson, Metode Broyden.

PERBANDINGAN METODE GAUSS-SEIDEL, METODE NEWTON-RAPHSON, DAN METODE BROYDEN DALAM PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN NONLINIER

ARVI HASANAH

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

Judul Skripsi	:	**PERBANDINGAN METODE GAUSS-SEIDEL, METODE NEWTON-RAPHSON, DAN METODE BROYDEN DALAM PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN NONLINIER**
Nama Mahasiswa	:	***Arvi Hasanah***
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2157031001**
Program Studi	:	**Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dorrah

Dra. Dorrah Azis, M.Si.
NIP.196101281988112001

Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.
NIP.197008311999031002

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si.,M.
NIP.197403162005011001

MENGESAHKAN

1. tim penguji

Ketua	:	**Dra. Dorrah Azis, M.Si.**	Dorrah ....
Sekretaris	:	**Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **22 Januari 2025**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Arvi Hasanah**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2157031001**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Perbandingan Metode Gauss-Seidel, Metode Newton-Raphson, dan Metode Broyden dalam Menyelesaikan Sistem Persamaan Nonlinier**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi inni merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai degnan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung,

Penulis,

Arvi Hasanah

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Arvi Hasanah, lahir di Jakarta pada tanggal 26 Maret 2003. Penulis merupakan anak keempat dari empat bersaudara pasangan Bapak Warisman dan Ibu Poniyah.

Penulis mengawali pendidikan di Taman Kanak-Kanak (TK) Cendrawasih pada tahun 2008-2009 dan menempuh pendidikan dasar di SDN Joglo 09 Jakarta pada tahun 2009-2015. Kemudian penulis melanjutkan jenjang pendidikannya di SMPN 206 Jakarta pada tahun 2015-2018 dan Sekolah Menengah Atas di SMAN 101 Jakrta pada tahun 2018-2021. Setelah itu penulis diterima sebagai mahasiswi Program Studi S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Mandiri Masuk Perguruan Tinggi Negeri Wilayah Barat (SMM PTN-Barat) pada tahun 2021.

Selama menjadi mahasiswi, penulis aktif di beberapa kegiatan di antaranya aktif dalam kepengurusan organisasi Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) FMIPA Unila sebagai Anggota Bidang Eksternal, Staff Ahli divisi Pemberdayaan Wanita (PW) BEM FMIPA, anggota bidang dua gugus FMIPA UKM-U KOPMA Unila, dan anggota divisi ngan Sumber Daya Mahasiswa (PSDM) Himpunan Mahasiswa Banten (HMB) pada tahun 2022. Lalu menjabat sebagai Sekretaris Bidang Eksternal pada tahun 2023 dan Dewan Pembimbing Organisasi (DPO) HIMATIKA pada tahun 2024.Penulis juga menjadi bagian dari kepanitian Dies Natalis Jurusan Matematika (DINAMIKA) ke-23 sebagai anggota divisi acara, DINAMIKA Ke-24 sebagai Sekertaris Koordinator divisi acara, dan DINAMIKA Ke-25 sebagai *Steering Committee*.

Kemudian pada Bulan Desember-Februari 2024 penulis melaksanakan Praktik Kerja Lapangan (PKL) di PAM JAYA DKI Jakarta yang berlokasi di Jakarta Pusat dengan posisi pada divisi *accounting*. Selanjutnya pada bulan Juli-Agustus 2024 penulis terpilih menjadi perwakilan Universitas Lampung untuk melaksanakan Kuliah Kerja Nyata Kebangsaan (KKNK) angkatan XII yang berlokasi di Ambon, Maluku.

KATA INSPIRASI

"Maka, sesungguhnya beserta kesulitan ada kemudahan. Sesungguhnya beserta kesulitan ada kemudahan."
(QS. Al-Insyirah: 5-6)

"*Do not wait to strike till the iron is hot, but make it hot by triking*."
(William Butle yeats)

"Seberat apa pun, langkah kecil tetap membawa ke garis akhir."
(Arvi Hasanah)

"Jangan gimana nanti, tapi nanti gimana."
(Jumi Sandani)

"*With great power comes great responsibility*."
(*Uncle* Ben *Spider-Man*)

PERSEMBAHAN

Untuk angka-angka yang tak pernah berbohong, untuk iterasi yang setia mengulang demi sebuah solusi, untuk konvergensi yang akhirnya menemukan jalannya, dan untuk semua *error* yang akhirnya bisa diminimalkan dengan mengucap Alhamdulillah dan syukur kepada Allah SWT atas nikmat serta hidayah-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan Bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Bapak dan Ibuku Tercinta

Sumber energi terbesar penulis, terima kasih telah menjadi sistem pendukung yang tak pernah *error*, tak kenal limitasi, dan selalu bekerja dalam mode *unconditional love*. Tanpa kalian penulis hanyalah persamaan tanpa solusi. maka, biarlah setiap huruf dalam skripsi ini menjadi bukti kecil bahwa setiap doa yang terpancarkan menemukan jalannya. Terima kasih karena selalu percaya bahwa penulis bisa, bahkan sebelum penulis sendiri yakin bahwa penulis mampu.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih atas waktu, ilmu, serta arahan yang tak hanya membentuk tulisan dalam skripsi ini, tetapi juga membentuk cara berpikir penulis. Setiap koreksi, catatan, dan saran yang diberikan bukan hanya sekedar revisi, tetapi juga batu loncatakan menuju pemahaman yang lebih dalam. Semoga ilmu yang dibagikan menjadi pahala yang terus mengalir tanpa batas.

Sahabat-sahabatku

Terima kasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan kekuatan yang diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul ”Perbandingan Metode Gauss-Seidel, Metode Newton-Raphson, dan Metode Broyden dalam Penyelesaian Sistem Persamaan Nonlinier” dengan baik untuk memperoleh gelar S.Mat di Univeristas Lampung.

Proses penyusunan skripsi ini bukanlah perjalanan yang mudah. Banyak tantangan dan dinamika pemikiran yang harus dilalui. Namun dengan dukungan dari berbagi pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Dra. Dorrah Azis, M.Si. selaku Pembimbing I yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.
4. Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Dr. Ahmad Faisol, S.Si.,M.Sc. selaku dosen pembimbing akademik.
6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Keluarga tercintaku, Ibu, Bapak, Mas Ai, Mba Uwi, Mba Iyang, Mba Yati, Mas Andri, Wawang, Arkan, Atar, Eja yang selalu Menjadi titik awal dan akhir dari setiap perjalanan penulis. kalian adalah jeda bagi penulis yang selalu membuat perjalanan ini terasa lebih ringan. Terima kasih telah menjadi rumah yang selalu membuat penulis kembali dengan hati penuh dan semangat yang utuh.
8. Ilma, Anggun yang bukan sekedar teman, yang selalu ada di setiap tawa paling riang hingga lelah paling sunyi. Terima kasih telah menjadi sandaran di saat terberat, pengingat disaat tersesat, dan energi di saat hampir menyerah.
9. Alam, Amri, Gading, Randia, Zanzabil terima kasih untuk setiap tawa, lelucon, dan kenangan yang sudah di ciptakan bersama dalam keadaan apapun.
10. JJ, mahluk kecil yang diam tapi selalu setiap menemani. Terima kasih sudah menjadi saksi bisu dari setiap lembar skripsi, serta gerakan lincah yang selau jadi hiburan kecil di tengah kepenatan. Dan tidak lupa untuk abahnya JJ, terima kasih telah menghadirkan teman kecil ini untuk menemani melewati skripsi ini.
11. Keluarga kecil Calista, Yazid, Eri, Erwin, Ridho, Yunda Rani, Yunda Lia, Yunda Salsa, Yunda Demi, Falen, Margel, Najia, Rara yang merupakan *charging station* terbaik. Terima kasih sudah selalu ada, dari chaos skripsi, tawa yang tidak ada habisnya, sampai motivasi yang datang disaat paling dibutuhkan.
12. Pembuat kukis handal Aurel, Anggun, Aini, Fika, Katarina, Leony, dan Farhan yang selalu menebarkan keceriaan dan kebahagiaan di setiap saat. Seperti rasa kukis yang mereka buat, kehadiran mereka membuat setiap hari terasa lebih manis, gurih, dan memberi semangat serta kehangatan yang tak ternilai.
13. Teman-teman pimpinan HIMATIKA Unila periode 2023, bidang eksternal periode 2023 dan 2022 yang selalu memberikan semangat, doa, dan dukungan terus menerus yang tidak pernah berhenti mengalir.
14. Teman-teman KKN Kebangsaan ke-XII Siti, Tata, Rara, Kiska, Selvi, Arman, Fonda, Viqi, Thomas meski terpisah oleh jarak, dukungan, dan doa yang tetap mengalir dari Sabang hingga Merauke.
15. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan laporan ini.

Insyaallah skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik.

Bandar Lampung, 22 Januari 2025

Arvi Hasanah

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Pada kenyatannya, matematika merupakan disiplin ilmu eksakta yang berkaitan dengan rumus serta perhitungan. Dengan menggunakan matematika dapat membantu menyajikan, memahami, menganalisis, dan menyelesaikan masalah menjadi lebih mudah. Suatu pendekatan dalam matematika yang digunakan untuk menyelesaikan suatu masalah dengan menggunakan rumus aljabar disebut metode analitik.

Metode analitik merupakan metode yang berfokus pada pemecahan masalah dengan menggunakan aturan dan prinsip matematika secara sistematis. Meskipun demikian, tidak semua masalah perhitungan dapat diselesaikan dengan metode analitik. Adapun metode numerik yang merupakan alternatif perhitungan dalam menyelesaikan suatu masalah matematika yang tidak dapat diselesaikan secara analitik.

Metode numerik merupakan teknik dalam menyelesaikan permasalahan yang di rumuskan dengan matematis. Teknik ini menggunakan operasi hitung atau aritmetika yang berupa penambahan, pengurangan, bagi, dan kali. Salah satu penerapan metode ini dalam perhitungan aritmetika berupa akar persamaan. Beberapa metode numerik yang digunakan dalam menyelesaikan permasalahan persamaan, meliputi metode Gauss-Seidel, metode Newton-Raphson, Metode Broyden, dan metode lainnya.

Metode Gauss-Seidel merupakan metode penyelesaian sistem persamaan nonlinier dengan menggunakan nilai iterasi terbaru. Metode ini mempunyai keunggulan pada kecepatan proses iterasi sampai konvergen (Sahid, 2005).

Metode Newton-Raphson merupakan metode untuk mencari pendekatan atau hampiran terhadap akar fungsi asli. metode Newton-Raphson sering konvergen dengan cepat, bila iterasi yang dimulai cukup dekat dengan akar yang diinginkan. metode ini merupakan metode tercepat dalam menentukan akar persamaan nonlinier secara numerik (Pandi & Sitepu, 2021).

Metode Broyden termasuk pengembangan dari metode secant dengan variabel yang lebih dari satu. seperti pada penelitian ”Nilai Konsentrasi Unsur Paracetamol dan Kafein yang Membentuk Sistem Persamaan Taklinier dengan Metode Broyden” (Syata dkk, 2023), yang berisi tentang pencarian solusi sistem persamaan nonlinier dengan metode Broyden dari nilai konsentrasi unsur paracetamol dan kafein. Selain itu, terdapat pada penelitian ”*On The Newton-Broyden Method For Solving Systems Of Nonlinear Equations*” (Shakhno & Yarmola, 2023), yang mengatakan bahwa metode Broyden dapat diterapkan untuk sistem dengan fungsi yang tidak dapat di turunkan.

Beberapa penelitian sebelumnya yang mengkaji mengenai perbandingan dari metode numerik di antaranya yaitu penelitian “Penerapan Metode Iterasi Jacobi dan Gauss-Seidel dalam Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear Kompleks” (Ihsan dkk, 2024), menyatakan bahwa metode Gauss-Seidel lebih baik digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear kompleks karena mempunyai iterasi yang lebih sedikit di bandingkan metode Jacobi. Dalam penelitiaan “Perbandingan Kecepatan Konvergensi Akar Persamaan Nonlinier Metode Titik Tetap dengan Metode Newton Raphson Menggunakan Matlab” (Ritonga & Suryana, 2019) mengatakan bahwa metode Newton-Raphson lebih cepat konvergensi menuju akar dibanding metode Titik Tetap. Selain itu, dalam penelitian ”Aplikasi Penyelesaian Numerik Pencarian Akar Persamaan Nonlinier dan Penerapannya dalam Menyelesaikan Analisis *Break Even Point*” (Sutrisno, 2023). Hasil penelitian ini menunjukkan metode Newton-Raphson paling efisien ditunjukkan dengan nilai galat terkecil di banding metode lainnya.

Dalam penelitian ini, penulis akan menfokuskan membandingkan metode Gauss-Seidel, metode Newton-Raphson, dan metode Broyden, untuk solusi sistem persamaan nonliner dengan menggunakan 3 contoh kasus.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini yaitu membandingkan antara metode Gauss-Seidel, metode Newton-Raphson, dan metode Broyden yang lebih efektif dan efisien dalam menyelesaikan sistem persamaan nonlinier.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini sebagai berikut:

1) Menambah pengetahuan dan wawasan tentang metode Gauss-Seidel, metode Newton-Raphson, dan metode Broyden dalam menyelesaikan sistem persamaan nonlinier.
2) Mengetahui metode yang lebih efektif untuk mendekati kekonvergenan dari ketiga metode yang ada.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan

Persamaan merupakan pernyataan matematika yang menujukan hubungan dua hal yang berbeda tetapi memiliki nilai setara atau sama. secara matematis persaman di simbolkan dengan tanda sama dengan $(=)$. Pada persamaan matematika terdapat ruas kanan dan ruas kiri yang di pisahkan dengan simbol ”sama dengan”. Jika tidak ada simbol ”sama dengan” dalam pernyataan berarti dianggap bukan merupakan persamaan, melainnya sebagai ekspresi atau ungkapan.

Contoh 2.1.1 pernyataan ”$1 + 2 = 3$” merupakan persamaan karena adanya simbol sama dengan $(=)$ yang memisahkan dua ruas dan nilai yang sama. Persamaan juga digunakan untuk menunjukkan kesetaraan atau kesamaan antara dua ekspresiyang terdiri dari satu atau lebih variabel.

Secara umum, nilai variabel pada suatu persamaan dikatakan benar jika terdapat solusi. Maka dari itu, menyelesaikan suatu persamaan berarti menemukan solusi dari persamaan tersebut. Misalkan:

$$x + 4 = 10 \text{ yang menyatakan bahwa solusi } x = 6$$
$$6 + 2x = 10 \text{ yang menyatakan bahwa solusi } x = 2$$

Penggunaan huruf alfabet, seperti $a, b, c, d, \ldots$ sering digunakan sebagai konstan dan huruf akhir alfabet seperti $x, y,$ dan z digunakan untuk mewakili variabel (Hulu & Sinaga, 2019).

Bentuk umum suatu persamaan tergantung pada jenis persamaan yang ada. setiap jenis persamaan memiliki struktur dan pola tertentu yang digunakan untuk mengidentifikasi dan menyelesaikan suatu masalah. salah satu contoh dari suatu persamaan adalah persamaan linier dan persamaan nonlinier.

2.1.1 Persamaan Linier

Persamaan linier merupakan persamaan aljabar yang paling sederhana, dimana pada setiap sukunya mengandung konstanta dengan variabel tunggal atau satu. dikatakan sederhana karena di gambarkan dengan garis lurus dalam bentuk grafik.

Secara umum, persamaan linear dengan n variabel $x_1, x_2, \ldots, x_3$ dapat ditunjukan dalam bentuk:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n = b \tag{2.1.1}$$

di mana $a_1, a_2, \ldots a_n$ dan b merupakan konstanta dan semua a tidak nol (Soebagyo dkk, 2022).

2.1.2 Persamaan Nonlinier

Persamaan nonlinier termasuk persamaan yang mempunyai pangkat lebih tinggi dari variabel. Persamaan nonlinier tidak membentuk garis lurus ketika di gambarkan dalam bentuk grafik. Persamaan nonlinier bisa melibatkan pangkat variabel lebih dari satu atau perkalian antar variabel. Sehingga persamaain ini bisa merupakan persamaan yang berpangkat selain satu misalnya x^2 atau persamaan yang mempunyai dua buah variabel misalnya xy (Hidayati dkk, 2022).

Secara umum suatu persamaan $f(x)$ merupakan fungsi yang terlibat dalam fungsi nonlinier (Basuki & Ramadijanti, 2005). Salah satu persamaan nonlinier adalah sebagai berikut:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 9 = 0 \tag{2.1.2}$$

Persamaan (2.1.2) merupakan persamaan lingkaran yang mempunyai titik pusat (0.0) dan jari-jari 3. Untuk menyelesaikan persamaan tersebut, dengan menemukan akar-akar persamaan. Di mana nilai x adalah nilai yang membuat nilai $f(x) = 0$.

2.2 Sistem Persamaan Nonlinier

Sistem persamaan nonlinier dapat dipahami sebagai kumpulan dari dua atau lebih persamaan, di mana satu dari persamaan tersebut tidak dapat mempresentasikan garis lurus pada grafik yang di hasilkan. Berikut merupakan bentuk dari persamaan nonlinier:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Untuk f_n dengan $n = 1, 2, \ldots, n$

Sistem persamaan nonlinier ini mempunyai metode khusus dikarenakan tingkat kesulitan yang lebih tinggi dibandingkan pada sistem persamaan linier. Untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinear ini, bisa menggunakan metode grafis, substitusi, atau eliminasi.

2.3 Metode Numerik

Metode numerik merupakan suatu penyelesaian permasalahan matematis menggunakan operasi hitung. Metode ini digunakan karena terdapat permasalahan matematis yang rumit dan memerlukan banyak waktu sehingga, tidak efisien jika di selesaikan dengan metode analitik. terdapat perbedaan antara metode numerik dan metode analitik yang terdapat pada solusi penyelesaian masalah.

Terdapat dua hal utama dalam membedakan solusi metode numerik dan analitik. Pertama, pada solusi metode numerik yang dihasilkan selalu berupa angka, sedangkan metode analitik memberikan solusi dalam bentuk fungsi matematis yang dapat dievaluasi untuk menghasilkan nilai numerik. Kedua, metode numerik menghasilkan solusi yang merupakan pendekatan atau hampiran terhadap solusi yang sebenarnya (Hidayati dkk, 2022).

Dalam penggunaan metode numerik terdapat beberapa keuntungan dan kelemahan antara lain:

1. kelebihan
   a. Perhitungan dapat dilakukan secara cepat dan hasil yang sedekat mungkin dengan bantuan komputer.
   b. Solusi persoalan selalu dapat diperoleh.
2. kekurangan
   a. Nilai yang diperoleh berupa pendekatan.
   b. Jika dihitung secara manual menggunakan waktu yang cukup lama.

Pada umumnya metode numerik tidak mendapatkan solusi yang eksak ataupun tepat. Metode numerik biasanya hanya menghasilkan nilai aproksimasi pada penentuan akar persamaan nonlinier yang dilakukan (Pandi & Sitepu, 2021).

2.4 Metode Gauss-Seidel

Metode Gauss-Seidel merupakan metode iteraif dalam menyelesaikan sistem persamaan linier. Metode ini juga dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan nonlinier dengan modifikasi dari metode aslinya. Pada persamaan linier memiliki pendekatan yang lebih sederhana karena memiliki hubungan langsung, sedangkan persamaan nonlinier tidak memiliki hubungan linier yang mengakibatkan pedekatan dan penyelesaian lebih rumit.

Penyelesaian sistem persamaan nonlinier menggunakan metode ini dengan menentukan x_1^{k+1} berdasarkan nilai x_n^k (Ripai, 2012). Persamaan umum dari metode Gauss-Seidel sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
x_1^{k+1} &= f_1(x_1^k, x_2^k, x_3^k, \ldots, x_n^k) \\
x_2^{k+1} &= f_2(x_1^k, x_2^k, x_3^k, \ldots, x_n^k) \\
&\vdots \\
x_n^{k+1} &= f_n(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, x_3^{k+1}, \ldots, x_n^k)
\end{aligned} \tag{2.4.4}
$$

Adapun persamaan untuk menghitung galat sebagai berikut:

$$
error = max(\left|x_1^{k+1} - x_1^k\right|, \left|x_2^{k+1} - x_2^k\right|, \ldots, \left|x_n^{k+1} - x_n^k\right|) \tag{2.4.5}
$$

Agoritma metode Gauss-Seidel untuk menyelesaian permasalahan nonlinier diantaranya sebagai berikut:

1. Definsikan setiap variabel (x_1, x_2, x_3,..., x_n)
2. Tentukan nilai tebakan awal untuk setiap variabel (x_1, x_2, x_3,..., x_n)
3. Menentukan nilai pendekatan awal x_n^0
4. Untuk setiap iterasi hitung x menggunakan persamaan (2.4.4) dimana x_n^{k+1} merupakan nilai terbaru dari x_n
5. Mengitung galat atau nilai *error* untuk semua variabel dengan persamaan (2.4.5), jika $error(<)$ toleransi, iterasi berhenti

Contoh 2.4.1 Tentukan solusi dari sistem persamaan nonlinier berikut:

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0 \\
f_2(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 - 2 = 0
\end{aligned}
$$

dengan nilai toleransi 10^-6.

Penyelesaian:

$$
\begin{gathered}
x_1 = \sqrt{4 - x_2^2} \\
x_2 = 2 - x_1 \\
x_1^{(0)} = 1 \text{ dan } x_2^{(0)} = 1
\end{gathered}
$$

Iterasi 1

$$
\begin{gathered}
x_1^{(1)} = \sqrt{4 - (1)^2} = \sqrt{3} = 1,732 \\
x_2^{(1)} = 2 - 1.732 = 0.268
\end{gathered}
$$

$$error_1 = |1,732 - 1| = 0,732$$
$$error_2 = |0,268 - 1| = 0,732$$

Iterasi 2

$$x_1^{(2)} = \sqrt{4 - (0.268)^2} = 1,981$$
$$x_2^{(2)} = 2 - 1,981 = 0.019$$
$$error_1 = |1,981 - 1,732| = 0,249$$
$$error_2 = |0,019 - 0,268| = 0,249$$

Iterasi 3

$$x_1^{(3)} = \sqrt{4 - (0.019)^2} = 1,9999$$
$$x_2^{(3)} = 2 - 1,9999 = 0.0001$$
$$error_1 = |1,9999 - 1,981| = 0,018$$
$$error_2 = |0,0001 - 0,019| = 0,0189$$

Iterasi 4

$$x_1^{(4)} = \sqrt{4 - (0.0001)^2} = 2$$
$$x_2^{(4)} = 2 - 2 = 0$$
$$error_1 = |2 - 1,999| = 0,001$$
$$error_2 = |0 - 0,0001| = 0,0001$$

Iterasi 5

$$x_1^{(4)} = \sqrt{4 - (0)^2} = 2$$
$$x_2^{(4)} = 2 - 2 = 0$$
$$error_1 = |2 - 2| = 0$$
$$error_2 = |0 - 0| = 0$$

Pada iterasi 5 diperoleh nilai $error(<)$ toleransi yang berarti proses iterasi dapat berhenti dengan nilai $x_1 = 2$ dan $x_2 = 0$.

Pada contoh 2.4.1 juga dapat diselesaikan menggunakan program MATLAB dengan keluaran yang di hasilkan terpadat pada Tabel 2.2 dengan sintaks pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Sintaks Metode Gauss-Seidel

```
function gauss_seidel_nonlinear()
    x1 = sqrt(4 - x2^2); x2 = 2 - x1;
    x1 = 1; x2 = 1; tol = 1e-6;
    iter_max = 100;

    for k = 1:iter_max
        x1_old = x1; x2_old = x2;
        err1 = abs(x1 - x1_old);
        err2 = abs(x2 - x2_old);
        fprintf('Iterasi %d: x1 = %f, x2 = %f,
        err1 = %f, err2 = %f\n', k, x1, x2,
        err1, err2);

        if max(err1, err2) < toleransi
            fprintf('Metode Gauss-Seidel
            konvergen setelah %d iterasi\n',
            k);
            break;
        end
    end
    if k == iter_max
        fprintf('Metode Gauss-Seidel tidak
        konvergen setelah %d iterasi\n',
        iter_max);
    end
    fprintf('Solusi akhir: x1 = %f, x2 = %f\
    n',
    x1, x2);
end
```

Tabel 2.2 Keluaran Metode Gauss-Seidel

Iter	x_1	x_2	Err_1	Err_2
1	1.732051	0.267949	0.732051	0.732051
2	1.981970	1.981970	0.249919	0.249919
3	1.1.999919	0.000081	0.017949	0.017949
4	2.000000	0.000000	0.000081	0.000081
5	2.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Metode Gauss-Seidel konvergen setelah 5 iterasi dengan solusi akhir $x_1 = 2$ dan $x_2 = 0$.

2.5 Metode Newton-Raphson

Metode Newton-Raphson digunakan untuk menyelesaian persamaan nonlinier yang menggunakan pendekatan satu titik awal dan memperhatikan gradien. Metode ini menghampiri grafik $f(x)$ dengan garis singgung yang sesuai. Untuk mendapatkan nilai x_0 sebagai tebakan awal, akar dari $f(x)$ dilokasikan dan x_1 merupakan titik potong antara sumbu x dan garis singgung kurva $f(x)$ di titik x_0. Jika merupakan sudut antara garis singgung dengan sumbu x maka:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

Jika dua hampiran akar beruntun menghasilkan nilai yang hampir sama, iterasi dihentikan (Purcell & Varberg, 1984).

Metode Newton-Raphson memilik kekurangan, yaitu tidak semua fungsi f dapat diturunkan dengan mudah. Selain itu, diperlukan suatu x_0 yang tepat agar barisan x_n menghasilkan konvergen pada solusi eksak (Ramadhini dkk, 2019).

Adapun agoritma metode Newton-Raphson diantaranya sebagai berikut:

1. Definsikan $f(x)$ dan $f'(x)$
2. Menentukan nilai iterasi maksimum (n) dan toleransi *error* (e).
3. Menentukan pendekatan awal x_0
4. Mengitung nilai $f(x)$ dan $f'(x)$
5. Iterasi $i = 1$ s/d n atau $f(x_i) > e$, hitunglah nilai x menggunakan persamaan (2.5.6)
6. x_i terakhir yang diperoleh merupakan akar persamaan yang di dapat

Contoh 2.5.1 Cari akar persamaan $x - e^{-x} = 0$ dengan $x_0 = 0$ $f(x) = x - e^{-x}$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} f(x) &= x - e^{-x} \\ f'(x) &= 1 + e^{-x} \\ f(x_0) &= 0 - e^{-x} = -1 \\ f'(x_0) &= 1 + e^{-x} = 2 \end{aligned}$$

Iterasi 1

$$x_1 = x_0 - \tfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \tfrac{-1}{2} = 0,5$$
$$f(x_1) = -0,106631 \text{ dan } f'(x_1) = 1,60653$$

Iterasi 2

$$x_2 = x_1 - \tfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,5 - \tfrac{-0,106531}{1,60653} = 0,566311$$
$$f(x_2) = -0,00130451 \text{ dan } f'(x_2) = 1,56762$$

Iterasi 3

$$x_3 = x_2 - \tfrac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1,56762 - \tfrac{-0,00120451}{1,56762} = 0,567143$$
$$f(x_3) = -1,96 \times 10^{-7}$$

Sehingga akar persaman $x = 0,567143$ pada iterasi ke-3.

Pada contoh 2.5.1 juga dapat diselesaikan menggunakan program MATLAB keluaran yang di hasilkan terpadat pada Tabel 2.4 dengan sintaks pada Tabel 2.3.

Tabel 2.3 Sintaks Metode Newton-Raphson

```
function newton_raphson()
    f = @(x) x - exp(-x);
    df = @(x) 1+exp(-x);

    x0 = 0; tol = 1e-6;max_iter = 100;
    for iter = 1:max_iter
```

```
        x1 = x0 - f(x0) / df(x0);
        fprintf('Iterasi %d: x = %.6f, f(x) =
        fprintf('Iterasi %d: x = %.6f, f(x) =
        %.6f\n', iter, x1, f(x1));

        if abs(x1 - x0) < tol
            fprintf('Akar ditemukan: x = %.6f
            setelah %d iterasi\n', x1, iter);
            return;
        end
        x0 = x1;
    end
    fprintf('Metode tidak konvergen setelah %d
    iterasi\n',max_iter);
end
```

Tabel 2.4 keluaran Metode Newton-Raphson

Iter	x	$f(x)$
1	0.500000	-0.106531
2	0.566311	-0.001305
3	0.567143	-0.000000

Akar ditemukan $x = 0.567143$ setelah 3 iterasi.

2.6 Metode Broyden

Metode bryoden merupakan metode numerik yang dirancang untuk mengembangkan mEtode Newton dalam menyelesaikan sistem persamaan nonlinier (Ramli dkk, 2010). Selain itu Metode Broyden termasuk perluasan dari Metode Secant untuk variabel yang lebih dari satu.

Adapun agoritma metode Broyden antara lain:

1. Definisikan fungsi $f(x)$
2. Menentukan tebakan awal x_0, perkiraan Jacobian, toleransi *error* (ϵ)
3. Menghitung $\epsilon = -\frac{f(x_n)}{J_n}$
4. Menghitung $x_{n+1} = x_n + \epsilon$ dan $f(x)$

5. Menghitung pembaruan Jacobian dengan rumus:

$$J_n = J_{n-1} + \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n) - J_n \times (x_{n+1} - x_n)}{x_{n+1} - x_n}$$

6. Iterasi berhenti jika $\epsilon (<)$ toleransi
7. akar persamaan merupakan nilai x_n terakhir yang diperoleh

Contoh 2.6.1 Cari akar persamaan dari persamaan nonlinier tersebut:

$$f(x) = x^2 - 2 = 0$$

dengan batas toleransi *error* 10^{-6}.

Penyelesaian:

$$x_0 = 1,5$$
$$f(x_0) = (1,5)^2 - 2 = 2,25 - 2 = 0,25$$
$$J_0 = 2 \times 1,5 = 3$$

Iterasi 1

$$\epsilon = -\frac{f(x_0)}{J_0} = -\frac{0,25}{3} = -0,08333$$
$$x_1 = x_0 + \epsilon = 1,5 - 0,08333 = 1,41667$$
$$f(x_1) = (1,41667)^2 - 2 = 2,00694 - 2 = 0,00694$$
$$J_1 = J_0 + \frac{f(x_1) - f(x_o) - J \times (x_1 - x_o)}{x_1 - x_o} = 3 + \frac{-0,24306 - 3 \times (-0,08333)}{-0,08333} = 2,916$$

Iterasi 2

$$\epsilon = -\frac{f(x_1)}{J_1} = -\frac{0,00694}{2,916} = -0,00238$$
$$x_2 = x_1 + \epsilon = 1,41667 - 0,00238 = 1,41429$$
$$f(x_2) = (1,41429)^2 - 2 = 2,0002 - 2 = 0,0002$$
$$J_2 = 2,916 + \frac{-0,00684 - 2,916 \times (-0,00238)}{-0,00238} = 2,88$$

Iterasi 3

$$\epsilon = -\frac{f(x_2)}{J_2} = -\frac{0,0002}{2,88} = -0,00007$$
$$x_3 = x_2 + \epsilon = 1,41429 - 0,00007 = 1,41422$$
$$f(x_3) = (1,41422)^2 - 2 = 2 - 2 = 0$$
$$J_3 = 2,88 + \frac{-0,0002 - 2,88 \times (-0,00007)}{-0,00007} = 2,85$$

Iterasi 4

$$\epsilon = -\frac{f(x_3)}{J_3} = -\frac{0}{2{,}85} = 0$$
$$x_4 = x_3 + \epsilon = 1,41422 - 0 = 1,41422$$
$$f(x_4) = (1,41422)^2 - 2 = 2 - 2 = 0$$

Iterasi berhenti karena $\epsilon(<)$ toleransi dengan solusi yang diperoleh $x = 1,41421$ pada iterasi ke-4.

Pada contoh 2.6.1 juga dapat diselesaikan menggunakan program MATLAB keluaran yang di hasilkan terpadat pada Tabel 2.6 dengan sintaks pada Tabel 2.5.

Tabel 2.5 Sintaks Metode Bryoden

```
function broyden()
x0 = 1.5; J = 3; tol = 1e-6; iter_max = 100;
f = @(x) x^2 - 2;

for k = 1:iter_max
   fx0 = f(x0); dx = -fx0 / J;
   x1 = x0 + dx;
   err = abs(x1 - x0);
   fprintf('Iterasi %d: x = %.6f, f(x) = %.6f,
   galat = %.6f\n', k, x1, f(x1), err);

   if err < tol
       fprintf('Metode Broyden konvergen
       setelah
      %d iterasi\n', k);
       break;
   end

   fx1 = f(x1);
   J = J+(fx1-fx0-J*(x1-x0))/(x1-x0);
  x0 = x1;
end

if k == iter_max
   fprintf('Metode Broyden tidak konvergen
   setelah
```

```
    %d iterasi\n', iter_max);
end
fprintf('Solusi akhir: x = %.6f\n', x1);
```

Tabel 2.6 Keluaran Metode Bryoden

Iter	x	$f(x)$	**Galat**
1	1,416667	0,006944	0,083333
2	1,414286	0,000204	0,002381
3	1,414214	0.000000	0,000072
4	1,414214	0.000000	0,000000

Solusi Akhir $x = 1,4142$

2.7 Galat

Galat atau *error* merupakan selisih atau perbedaan antara nilai taksiran dengan nilai yang sesungguhnya. Nilai sesungguhnya dirumuskan sebagai hubungan antara nilai perkiraan dan galat sebagai berikut:

$$V = V' + \epsilon \tag{2.7.7}$$

di mana:
V : nilai sesungguhnya
V': nilai perkiraan
ϵ : galat atau *error*

Besarnya error atau galat pada suatu nilai taksiran dapat di nyatakan secara kuantitatif atau disebut kesalahan absolut dan kualitatif yang disebut kesalahan relatif. Solusi numerik yang dihasilkan lebih akurat jika galatnya lebih kecil (Hidayati dkk, 2022).

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil pada tahun pelajaran 2024/2025 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur yang berfokus pada buku-buku yang terdapat pada perpustakaan Universitas Lampung, ruang baca jurusan matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Universitas Lampung, ataupun perpustakaan umum dan jurnal dalam negeri ataupun jurnal luar negeri yang menunjang pada penelitian yang dilakukan.

Adapun langkah yang digunakan dalam menyelesaikan penelitian ini antara lain:

1. Mempelajari definisi dan teorema yang menjadi topik penelitian.
2. Menentukan dan mengidentifikasi kasus permasalahan yang akan diselesaikan menggunakan tiga metode, yaitu Metode Gauss-Seidel, Metode Newton-Raphson, dan Metode Broyden.
3. Merancang algoritma berdasarkan definisi dan konsep yang telah dipelajari, kemudian mengimplementasikannya dalam bentuk program komputer menggunakan software MATLAB.
4. Menggunakan program yang telah dibuat untuk menyelesaikan kasus permasalahan pada masing-masing metode.

5. Menganalisis hasil iterasi dan galat dari setiap metode, serta membandingkan performa masing-masing metode dalam menyelesaikan kasus yang telah ditentukan.
6. Menentukan kesimpulan.

Adapun algoritma yang digunakaan untuk setiap metode dalam menyelesaikan kasus pada penelitian ini yaitu sebagai berikut.

3.2.1 Algoritma Gauss-Seidel

Algoritma Gauss-Seidel yang akan digunakan dengan rincian berikut:

1. Mulai
2. Inisialisasi
   a. set tol = $1e - 6$
   b. maks iter = 100
   c. $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$
3. Iterasi
   a. iter = 1 : max iter
   b. x_1 lama =x_1, x_2 lama =x_2, x_3 lama =x_3
   c. *Update* nilai x_1, x_2, x_3
   d. galat = max(abs([$x_1 - x_1$lama , $x_2 - x_2$lama , $x_3 - x_3$ lama]))
4. *If* galat $(<)$ toleransi solusi konvergen
5. *If* galat $(>)$ toleransi solusi tidak konvergen ubah tebakan awal dan ulangin.
6. Stop

3.2.2 Algoritma Newton-Raphson

Algoritma Newton-Raphson yang akan digunakan dengan rincian berikut:

1. Mulai
2. mendefinisikan fungsi $f(x)$.
3. Mendefinisikan Jacobian $df(x)$
4. Inisialisasi nilai awal

a. set $x_0 = [1;1;1]$
b. set tol = $1e-6$
c. set Max iter=100

5. Iterasi

a. Iter = 1: max iter
b. $fx = f(x_0)$
c. $Jx = df(x_0)$

6. $\delta x = \frac{-Jx}{fx}$
7. $x1 = x_0 + \delta x$
8. *If* galat $(<)$ toleransi solusi konvergen
9. *If* galat $(>)$ toleransi solusi tidak konvergen ubah tebakan awal dan ulangin.
10. stop

3.2.3 Algoritma Broyden

Algoritma Broyden yang akan digunakan dengan rincian berikut:

1. Mulai
2. Mendefinisikan fungsi $f(x)$
3. Inisiasi nilai awal

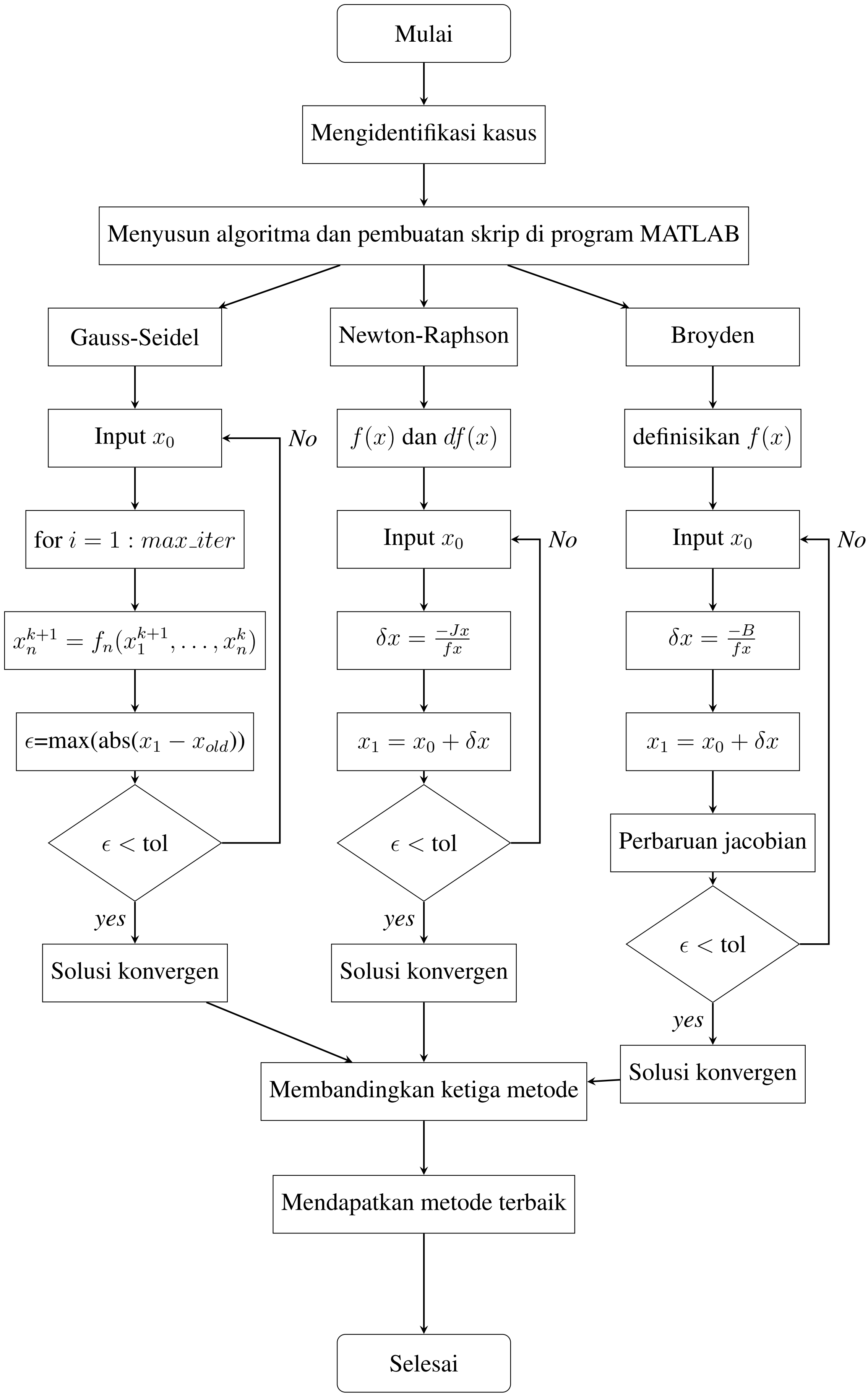
a. set $x_0 = [1;1;1]$
b. set B = I
c. set tol = $1e-6$
d. set max iter = 100

4. Iterasi

a. iter = 1:max iter
b. $\delta x = \frac{-B}{f(x)}$
c. perbarui nilai $x_1 = x_0$+delta x
d. Hitung perubahan dan pebarui jacobian
$fx1 = f(x_1)$
$\delta f = f(x_1) - f(x)$
e. Jacobian aproksimasi $B = B + \frac{(\delta f - B \times \delta x) \times \delta x'}{\delta x' \times \delta x}$

5. *If* galat $(<)$ toleransi solusi konvergen
6. *If* galat $(>)$ toleransi solusi tidak konvergen ubah tebakan awal dan ulangin.
7. stop

Agar memberikan suatu gambaran yang lebih jelas tentang tahapan penelitian ini, disediakan *flowchart* yang disusun untuk mengilustrasikan aliran kerja secara sistematis.sebagai berikut



Mulai
Mengidentifikasi kasus
Menyusun algoritma dan pembuatan skrip di program MATLAB
Gauss-Seidel
Newton-Raphson
Broyden
Input x_0
No
$f(x)$ dan $df(x)$
definisikan $f(x)$
for $i = 1 : max\_iter$
Input x_0
No
Input x_0
No
$x_n^{k+1} = f_n(x_1^{k+1}, \ldots, x_n^k)$
$\delta x = \frac{-Jx}{fx}$
$\delta x = \frac{-B}{fx}$
ϵ=max(abs($x_1 - x_{old}$))
$x_1 = x_0 + \delta x$
$x_1 = x_0 + \delta x$
$\epsilon <$ tol
$\epsilon <$ tol
Perbaruan jacobian
$\epsilon <$ tol
yes
yes
yes
Solusi konvergen
Solusi konvergen
Solusi konvergen
Membandingkan ketiga metode
Mendapatkan metode terbaik
Selesai

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan dalam membandingkan ketiga metode untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinier, perbandingan dilakukan berdasarkan akurasi galat (*error*), waktu komputasi, dan jumlah iterasi yang diperlukan oleh masing-masing metode. Dari hasil yang diperoleh, dapat disimpulkan kinerja tiap metode untuk setiap kasus yang dianalisis sebagai berikut:

Kasus 1

$$
\begin{gathered}
2x^2 + y - z^2 - 10 = 0 \\
3x^2 + 6y - z^2 - 25 = 0 \\
x^2 - 5y + 6z^2 - 4 = 0
\end{gathered}
$$

Kasus 2

$$
\begin{gathered}
15x + y^2 - 4z - 13 = 0 \\
x^2 + 10y - e^{-z} - 4 = 0 \\
y^3 - 25z + 22 = 0
\end{gathered}
$$

Kasus 3

$$
\begin{gathered}
x + cos(xy) - z^2 - 1.1 = 0 \\
x^2 - 10y - e^{xy} + 0.8 = 0 \\
xz + y^2 - z - 0.3 = 0
\end{gathered}
$$

pada ketiga kasus diatas menghasilkan galat (*error*), waktu komputasi, dan jumlah iterasi setiap metode yang berbeda. Hal tersebut dapat ditunjukan pada Tabel 5.1.

Tabel 5.1 Hasil Iterasi dan Galat pada Kasus 1-3 dengan Metode Gauss-Seidel, Newton-Raphson, dan Broyden

	Gauss-Seidel			Newton-Raphson			Broyden		
	Galat	Iterasi	W	Galat	Iterasi	W	Galat	Iterasi	W
K1	8.8×10^{-7}	9	0.003	5.8×10^{-7}	5	0.002	1.7×10^{-5}	14	0.005
K2	2.2×10^{-7}	5	0.003	6.0×10^{-11}	3	0.002	5.5×10^{-7}	13	0.031
K3	9.1×10^{-7}	18	0.003	4.7×10^{-7}	5	0.002	1.5×10^{-5}	13	0.006
$\bar{x}$	6.7×10^{-7}	10.7	0.003	3.8×10^{-7}	4.3	0.002	8.6×10^{-6}	13.3	0.014

Berdasarkan Tabel 5.1 Metode Newton-Raphson mempunyai nilai iterasi, galat, dan waktu komputasi di setiap kasus yang lebih kecil di banding dengan Metode Gauss-Seidel dan Metode Broyden. Dari ketiga kasus yang ada rata-rata Newton-Raphson konvergen pada iterasi 4 dalam rata-rata waktu komputasi 0.003 detik, dengan rata-rata galat 3.8×10^{-7}. Hal ini menunjukkan bahwa metode Newton-Raphson memiliki akurasi solusi yang lebih tinggi, konvergensi yang lebih cepat, serta lebih efektif dan efisien dibandingkan dengan Metode Gauss-Seidel dan Metode Broyden.

5.2 Saran

Penelitian selanjutnya disarankan untuk menerapkan metode pada kasus yang nyata misalnya seperti optimasi sistem energi, sistem kelistrikan dan lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Azmi, A. U., Hidayat, R., & Arif, M. Z. (2019). *Perbandingan Algoritma Particle Swarm Optimization (PSO) dan Algoritma Glowworm Swarm Optimization (GSO) dalam Penyelesaian Sistem Persamaan Nonlinier*. Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika Vol.19 No.1.

Basuki, A., & Ramadijanti, N. (2005). *Metode Numerik dan Algoritma Komputer*. Yogyakarta: Andi.

Cao, H., & Han, J. (2022). A Class of Sparse Direct Broyden Method for Solving Sparse Nonlinear Equations. Symmetry, 14, 1552.

Devitriani, Kiftiah M., & Yudhi (2019). *Analisis Metode Newton-Raphson Ganda Orde Konvergensi Empat Dalam Menyelesaikan Sistem Persamaan Nonlinier*. Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster). Vol.08 hal 213-220.

Hidayati, T., Aedi, W.G., & Masitoh, L.F (2022). *Metode Numerik*. Banten: Unpam Press.

Hulu, V.T. & Sinaga, T.R. (2019). *Analisis Data Statistik Parameter Aplikasi SPSS dan Statcal*. Ed. ke-11. Medan: Yayasan Kita Menulis.

Nurman, T.A., Maryani, A., & Nurhidayati, R. (2024). Perbandingan Metode Muller dan Metode Newton-Raphson dengan Dekomposisi Adomian yang Dimodifikasi dalam Menyelesaikan Persamaan Polinomial. *Jurnal Matematika dan Statistika serta Aplikasinya*, Vol.6 no.1.

Ihsan, H., Wahyuni, S. M., & Waode S. Y. (2024). Penerapan Metode Iterasi Jacobi dan Gauss-Seidel dalam Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier Kompleks. *Jurnal of mathematics, Computations, and Statistics*. Vol.7 No.1.

Pandi, W., dan Sitepu, I. (2021). Penentuan Akar Persamaan Non Linier dengan Metode Numerik. *Jurnal Mutiara Pendidikan*. Vol.6 No.2.

Purcell, J, E & Varberg, D. (1984). *Calculus With Analytic Geometry, 4th Edition*.

Ramadhini, D.S., Syafwan, M., & Jenizon. (2019). Syarat Cukup Kekonvergenan Metode Newton-Raphson. *Jurnal Matematika UNAND*. Vol.VIII No.2 Hal. 173-180.

Ramli, A., Abdullah, M. L., & Mamat, M. (2010). Broydens method for solving fuzzy nonlinear equations. *Advances in Fuzzy Systems, 2010.*

Ripai. (2012). *Pengantar Analisis dan Komputasi Metode Numerik*. Mataram: IAIN Mataram.

Ritonga, J., & Suryana, D. (2019). Perbandingan Kecepatan Konvergensi Akar Persamaan Non Linier Metode Titik Tetap dengan Metode Newthon Raphson Menggunakan MATLAB. *Jurnal Informasi dan Sistem Informasi*.vol XI No.2.

Rosidi, M. (2019).Metode Numerik Menggunakan R untuk Teknik Lingkungan. Diakses pada 20 September 2024, dari `https://bookdown.org/moh_rosidi2610/Metode_Numerik/`.

Sahid. (2005). *Pengantar Komputasi Numerik dengan Matlab.* Ed. ke-1. Yogyakarta: Andi.

Shakhno, S., & Yarmola, H. (2023). On the Newton-Broyden method for solving systems of nonlinear equations. *Journal of Applied and Numerical Analysis*.

Soebagyo, J., Maatif, S., & Purwanto, S.E. (2022). *Matematika Teknik Aljabar Linier & Matriks*. Bandung: Manggun.

Sutrisno. T. (2023). Aplikasi Penyelesaian Numerik Pencarian Akar Persamaan Non-linier dan Penerapannya dalam Menyelesaikan Analisis Break Even Point. *Journal of Computer Science and Information Systems*.

Syata, I., Suriadi, N. P., & Halim, H. N. (2023). Nilai Konsentrasi Unsur Paracetamol dan Kafein yang Membentuk Sistem Persamaan Taklinear dengan Metode Broyden. *Jurnal Matematika dan Statistika serta Aplikasinya* Vol.11 No.1.

Utami, N. N. R., Widana, I. N., & Asih, N. M. (2013). Perbandingan Solusi Sistem Persamaan Nonlinier Menggunakan Metode Newton-Raphson dan Metode Jacobian. *Jurnal Matematika* vol.2 N0.2.

Wulandari, R. (2016). Solusi sistem persamaan nonlinier dengan menggunakan Metode Broyden.