PENERAPAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN LAPLACE DALAM MENENTUKAN SOLUSI PERSAMAAN PANAS DUA DIMENSI

(Skripsi)

Oleh

KETUT SAMANDA
2117031058

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

ABSTRACT

APPLICATION OF ADOMIAN LAPLACE DECOMPOSITION METHOD IN DETERMINING THE SOLUTION OF THE EQUATION TWO-DIMENSIONAL HEAT

By

Ketut Samanda

This research discusses the application of the Adomian Laplace Decomposition Method (ADLM) in determining the solution of the two-dimensional heat equation in the form of partial differential equations equipped with initial values. This method combines the Adomian Decomposition Method and Laplace Transformation to obtain the solution in series form. Furthermore, the results obtained are compared with the solutions obtained using the separate variable method. The results obtained show that the solution using the Adomian Laplace Decomposition Method is the same as the solution using the separate variable method. As an illustration, the approximate solutions for some approximate points and for some values of n are presented.

Keywords: Adomian Laplace Decomposition Method, Two-Dimensional Heat Equation, Partial Differential Equation, Adomian Decomposition Method, Laplace Transformation, Separate Variable Method.

ABSTRAK

PENERAPAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN LAPLACE DALAM MENENTUKAN SOLUSI PERSAMAAN PANAS DUA DIMENSI

Oleh

Ketut Samanda

Penelitian ini membahas penerapan Metode Dekomposisi Adomian Laplace (ADLM) dalam menentukan solusi persamaan panas dua dimensi yang berupa persamaan diferensial parsial yang dilengkapi dengan nilai awal. Metode ini mengombinasikan Metode Dekomposisi Adomian dan Transformasi Laplace untuk memperoleh solusi dalam bentuk deret. Lebih jauh hasil yang diperoleh dibandingkan dengan hasil solusi yang diperoleh menggunakan metode variabel terpisah. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa solusi dengan menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace itu sama dengan solusi menggunakan metode variabel terpisah. Sebagai ilustrasi disajikan solusi hampiran untuk beberapa titik hampiran dan untuk beberapa nilai n.

Kata-kata kunci: Metode Dekomposisi Adomian Laplace, Persamaan Panas Dua Dimensi, Persamaan Diferensial Parsial, Metode Dekomposisi Adomian, Transformasi Laplace, Metode Variabel Terpisah.

PENERAPAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN LAPLACE DALAM MENENTUKAN SOLUSI PERSAMAAN PANAS DUA DIMENSI

Oleh

KETUT SAMANDA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

Judul Skripsi	:	**PENERAPAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN LAPLACE DALAM MENENTUKAN SOLUSI PERSAMAAN PANAS DUA DIMENSI**
Nama Mahasiswa	:	***Ketut Samanda***
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2117031058**
Program Studi	:	**Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Aang Nuryaman, S.Si.,M.Si.	**Dr. Agus Sutrisno, S.Si.,M.Si.**
NIP 19740316 200501 1 001	NIP 19700831 199903 1 002

2. Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si.,M.Si.
NIP. 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. tim penguji

Ketua	:	**Dr. Aang Nuryaman, S.Si.,M.Si.**	....
Sekretaris	:	**Dr. Agus Sutrisno, S.Si.,M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Dra. Dorrah Aziz, M.Si.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 19711001 200501 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **31 Januari 2025**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Ketut Samanda**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2117031058**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**PENERAPAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN LAPLACE DALAM MENENTUKAN SOLUSI PERSAMAAN PANAS DUA DIMENSI**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung,
Penulis,

Ketut Samanda

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Ketut Samanda yang lahir di Balinuraga pada tanggal 29 Maret 2004. Putri bungsu dari Bapak Wayan Satu dan Ibu Nengah Sukri.

Penulis menempuh pendidikan di Paud Widya Mandala lulus pada tahun 2009. Kemudian melanjutkan ke Sekolah Dasar di SDN 2 Balinuraga lulus pada tahun 2015. Sekolah Menengah Pertama di SMP Dharma Bhakti lulus pada tahun 2018. Sekolah Menengah atas di SMAN 1 Sidomulyo lulus pada tahun 2021. Pada tahun 2021 penulis terdaftar sebagai mahasiswa S1 Jurusan Matemtaika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN).

Pada tahun 2023 penulis melaksanakan Kerja Praktek di Badan Perencanaan dan Pembangunan Daerah (BAPPEDA) Kabupaten Lampung Selatan dan melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Braja Dewa, Kecamatan Way Jepara, Kabupaten Lampung Timur.

KATA INSPIRASI

”Kasih sayang orang tua adalah bahan bakar yang memungkinkan manusia
mencapai hal-hal luar biasa.”
(Marion C. Garretty)

”Dia yang selalu memuji Tuhan dengan hati yang tulus akan menerima berkah ilahi.”
(Rig Veda 10.48.5)

”Lakukan kewajibanmu tanpa mengharapkan hasilnya.”
(Bhagavad Gita 2.47)

PERSEMBAHAN

Puji syukur penulis haturkan kepada Tuhan Yang Maha Esa karena berkat limpahan Rahmat serta Karunia-Nya kepada penulis sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan Bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Keluarga Kecilku

Bapakku Wayan Satu dan Ibuku Nengah Sukri serta Kakak-kakakku Wayan Marwati, Made Astini dan Nyoman Sudrata. Keluarga terindah yang ada dalam hidupku. Terimakasih untuk kasih sayang, doa, dukungan, serta pengorbanan dan bimbingan yang diberikan untukku selama ini.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Untuk seorang teman spesial

Terimakasih sudah selalu menemani dari segala macam kondisi, selalu memberikan semangat, selalu mengingatkan untuk tidak menyerah dan terimakasih bee sudah datang dan menjadi bagian dari hidupku.

Almamater Tercinta
Universitas Lampung

SANWACANA

Puji syukur penulis haturkan kepada Tuhan Yang Maha Esa karena berkat limpahan Rahmat serta Karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul ”Penerapan Metode Dekomposisi Adomian Laplace Dalam Menentukan Solusi Persamaan Panas Dua Dimensi” dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si.,M.Si. selaku Pembimbing I yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

2. Bapak Dr. Agus Sutrisno, S.Si.,M.Si. selaku Pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

3. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.

4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

5. Ibu Dr. Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc. selaku dosen pembimbing akademik yang telah banyak memberikan arahan kepada penulis selama masa perkuliahan.

6. Seluruh dosen dan staff Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Ayah, Ibu dan Kakak-kakakku tercinta yang selalu memberikan kasih sayang, nasihat, dukungan, pengorbanan dan doa untuk keberhasilan penulis.
8. Teman-temanku Fitri, Enjel, Aini, Uli, Rizal, dan teman-teman lainnya yang sudah berbagi tawa, tangis dan memberikan semangat dan dukungan kepada penulis.
9. Manusia baik bernama Fesio atau yang akrab penulis panggil Bee terimakasih atas waktu, dukungan, doa dan semuanya.
10. Seluruh pihak terkait lainnya yang telah banyak membantu yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung,

Ketut Samanda

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matematika adalah ilmu fundamental yang diperlukan oleh semua orang dalam kehidupan sehari-hari, baik secara langsung maupun tidak langsung, dan berfungsi sebagai alat untuk menyelesaikan berbagai masalah, seperti perhitungan atau simbol-simbol yang menyederhanakannya. Dalam praktiknya, sering muncul tantangan saat menangani model-model matematika. Salah satu jenis model tersebut adalah persamaan diferensial, persamaan matematis yang melibatkan satu atau lebih fungsi variabel dan menghubungkan nilai fungsi tersebut dengan turunannya pada berbagai orde. Persamaan ini sangat penting dalam bidang rekayasa, fisika, ekonomi, dan disiplin ilmu lainnya. Persamaan diferensial muncul di berbagai bidang sains dan teknologi, terutama ketika hubungan deterministik yang melibatkan besaran yang berubah secara kontinu dimodelkan melalui fungsi matematis, di mana laju perubahan dinyatakan sebagai turunan yang telah diketahui atau diusulkan (Nuraeni, 2017).

Persamaan diferensial ini dibedakan menjadi dua jenis, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial, tergantung pada jumlah variabel bebas yang terlibat (Alwi dkk, 2015). Persamaan diferensial adalah persamaan yang melibatkan turunan-turunan. Jika suatu persamaan memiliki satu atau lebih turunan-turunan terhadap suatu variabel tertentu, maka variabel ini disebut variabel bebas. Suatu variabel disebut tak bebas jika turunan dari variabel tersebut ada. Persamaan yang hanya memuat turunan yang terdiri dari satu atau lebih variabel tak bebas dengan satu variabel bebas disebut persamaan diferensial biasa, sedangkan persamaan yang memuat turunan parsial satu atau lebih variabel tak bebas terhadap dua atau lebih variabel bebas disebut persamaan diferensial parsial (Murtafiah dan Apriandi, 2018).

Dalam persamaan diferensial parsial, terdapat banyak tantangan dalam proses pemodelan matematis, seperti pada pemodelan persamaan panas, persamaan gelombang, persamaan Laplace, dan persamaan transport. Untuk menyelesaikan masalah tersebut, dapat digunakan model pada sebuah batang penghantar. Dari situ, akan diperoleh suatu persamaan yang dikenal sebagai persamaan panas. Persamaan panas sering kali merujuk pada persamaan diferensial parsial yang menggambarkan distribusi temperatur dalam suatu medium seiring waktu. Persamaan ini dikenal sebagai persamaan panas atau persamaan konduksi panas (Haryanto, 2015). Persamaan panas dapat digolongkan berdasarkan bidang penghantarnya yaitu diantara lain persamaan panas satu dimensi yang penghantarnya berbentuk batang atau kabel dan persamaan panas dua dimensi yang penghantar berbentuk bidang atau plat.

Persamaan panas dapat diterapkan dengan berbagai metode, seperti yang sudah diterapkan (Sulistyono, 2020) pada penelitian tersebut persamaan panas diselesaikan dengan Metode Beda Hingga Skema Eksplisit agar dapat diperoleh solusi numeriknya dan juga dietrapkan oleh (Mulyati dan Sugiyanto, 2013) pada penelitian tersebut Persamaan Diferensial Bessel pada masalah perpindahan panas di reduksi dari persamaan panas yang digunakan untuk mengetahui laju perpindahan panas.

Persamaan panas juga dapat diselesaikan menggunakan metode yang diperkenalkan oleh George Adomian, seorang matematikawan asal Amerika, yang lebih dikenal sebagai Metode Dekomposisi Adomian. Dalam metode ini, persamaan diferensial dinyatakan dalam bentuk persamaan operator, di mana operator yang digunakan adalah operator diferensial. Kemudian, operator diferensial dalam Metode Dekomposisi Adomian digantikan dengan operator transformasi Laplace L, dan invers dari operator L adalah invers transformasi Laplace L^{-1}. Oleh karena itu, metode ini dikenal sebagai Metode Dekomposisi Adomian Laplace (Jaradat, 2008).

Metode Dekomposisi Adomian Laplace pernah diterapkan pada penelitian (Sanusi dkk, 2019) pada penelitian ini membahas tentang solusi persamaan transport dengan menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace.

Persamaan transport yang digunakan yaitu persamaan adveksi dimensi satu. Adapun juga pernah diterapkan oleh (Andini dkk, 2020) pada penelitian ini membahas tentang penerapan Metode Dekomposisi Adomian Laplace pada persamaan diferensial riccati dalam menentukan fungsi solusi dan menganalisis kekonvergenan barisan dari fungsi solusinya. Pada tahun 2018 Abdy dkk juga pernah menerapkan Metode Dekomposisi Adomian Laplace pada persamaan panas. Namun, pada penelitian tersebut hanya menggunakan persamaan panas dimensi satu.

Maka pada penelitian ini penulis akan mengkaji metode dekomposisi Adomian Laplace dalam menentukan solusi persamaan diferensial yaitu pada persamaan panas. Persamaan panas yang digunakan yaitu persamaan panas dua dimensi.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan solusi persamaan diferensial parsial pada persamaan panas dua dimensi dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace.

1.3 Manfaat Penelitian

Memperoleh solusi persamaan diferensial parsial pada persamaan panas dua dimensi dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace. Serta memberikan pemahaman bagi pembaca mengenai persamaan panas dua dimensi dan metode dekomposisi Adomian Laplace.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan Diferensial (PD) adalah persamaan yang menyatakan hubungan antara suatu fungsi yang tidak diketahui, dengan satu atau lebih turunan dari fungsi tersebut (Murtafiah dan Apriandi, 2018).

Bentuk Persamaan Diferensial (PD) adalah sebagai berikut (Ricardo, 2009):
$y^n = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$ atau $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$
Misalnya: $y'' = f(x, y, y')$, $y' = f(x, y)$

Secara umum, bentuk persamaan diferensial dapat dibedakan menjadi beberapa jenis (Trench, 2013):

(a) Persamaan Diferensial Biasa (PDB)
Melibatkan turunan fungsi satu variable. Contoh:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Ini adalah bentuk umum dari persamaan diferensial linier.

(b) Persamaan Diferensial Parsial (PDP)
Melibatkan turunan fungsi yang lebih dari satu variabel. Contoh:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$$

Ini adalah bentuk persamaan panas.

(c) Persamaan Diferensial Orde Tinggi
Melibatkan turunan yang lebih tinggi. Contoh:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = g(x)$$

Ini adalah bentuk umum dari persamaan diferensial orde dua.

(d) Persamaan Diferensial Non-linier
Tidak dapat dituliskan dalam bentuk linier. Contoh:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - x$$

Terdapat pangkat yang lebih tinggi dari y atau produk dari y dengan turunan lainnya.

2.2 Persamaan Diferensial Parsial (PDP)

Persamaan diferensial parsial menurut (Murtafiah dan Apriandi, 2018) adalah suatu persamaan yang berisikan turunan dari suatu atau beberapa fungsi yang berhubungan dengan satu atau lebih variabel bebas. Turunan dari suatu fungsi (misalkan fungsi y) didefinisikan sebagai penurunan garis tangen terhadap kurva $y = f(x)$ pada titik (x, y). turunan dari suatu fungsi satu peubah dapat dinyatakan dengan $f'(x)$ atau $\frac{dy}{dx}$.

Persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan diferensial yang berlaku untuk fungsi peubah banyak atau fungsi yang bergantung pada dua atau lebih variabel bebas $u = (x, y, z)$. Orde dari persamaan diferensial parsial adalah turunan dengan pangkat tertinggi yang ada pada persamaan diferensial parsial tersebut (Powers, 2008).

Beberapa contoh persamaan diferensial parsial (Purnomo, 2015):

(a) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ Persamaan gelombang satu dimensi

(b) $\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ Persamaan panas satu dimensi

(c) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ Persamaan transport

(d) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ Persamaan laplace dua dimensi

(e) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$ Persamaan poisson dua dimensi

(f) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ Persaamaan laplace tiga dimensi

Menurut (Gunawan, 2021) persamaan diferensial parsial (PDP) dapat dibedakan menjadi dua kategori utama:

(a) Persamaan Diferensial Parsial Linier

a. Bentuk umum: PDP linier dapat ditulis dalam bentuk:

$$a(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + d(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + e(x, y)u = f(x, y)$$

Dimana u adalah fungsi dari x dan y, dan a, b, c, d, e, f adalah fungsi dari x dan y.

b. Superposisi: jika u_1 dan u_2 adalah solusi, maka kombinasi linear dari solusi tersebut $(C_1 u_1 + C_2 u_2)$ juga merupakan solusi.

c. Contoh persamaan diferensial parsial linier: persamaan panas $u_t = k u_{xx}$ dan persamaan laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

(b) Persamaan Diferensial Non-linier

a. Bentuk umum: PDP non-linier tidak dapat ditulis dalam bentuk linier. Contoh bentuk umum adalah:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Dimana ada istilah yang melibatkan kuadrat atau produk dari u dan turunannya.

b. Tidak ada superposisi: jika u_1 dan u_2 adalah solusi, kombinasi linear dari solusi tersebut tidak selalu merupakan solusi.

c. Contoh persamaan diferensial parsial non-linier: Persamaan burgers $u_t + u u_x = a u_{xx}$ dan persamaan KdV $u_t + a u u_x + b u_{xxx} = 0$.

Persamaan diferensial parsial menurut (Sari dkk, 2014) dikatakan homogen jika setiap suku dari persamaan diferensial parsial mengandung variabel tak bebas u atau salah satu dari turunannya. Untuk kasus lainnya, persamaan diferensial parsial dikatakan sebagai persamaan diferensial parsial nonhomogen.

Persamaan $u_t = ku_{xx}$ dan $u_{xx} + u_{yy} = 0$ merupakan contoh persamaan diferensial homogen. Sedangkan persamaan $u_t = u_{yy} + y$ dan $u_t + u_s = u + 2$ merupakan contoh persamaan diferensial nonhomogen.

2.3 Operator Diferensial Parsial

Operator yang digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial adalah (Yulida, 2012):

(a) Operator Diferensial Parsial, yaitu L_t dan L_{xx} dengan

$$L_t = \frac{\partial}{\partial t}$$

dan

$$L_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

(b) Operator Invers, yaitu L_t^{-1} dan L_{xx}^{-1} dengan

$$L_t^{-1}(.) = \int_0^t (.)\, dt$$

dan

$$L_{xx}^{-1}(.) = \int_0^x \int_0^x (.)\, dxdx$$

2.4 Persamaan Panas

Persamaan panas sering kali merujuk pada persamaan diferensial parsial yang menggambarkan distribusi temperatur dalam suatu medium seiring waktu. Persamaan ini dikenal sebagai persamaan panas atau persamaan konduksi panas (Haryanto, 2015).

Menurut (Widder, 1975) masalah nilai batas dalam persamaan panas terbagi menjadi tiga yaitu:

1. Persamaan diferensial parsial (PDP), ditulis dengan

$$u_t = ku_{xx},\ 0 < x < a,\ t > 0$$

   Dimana $u = u(x,t)$ menyatakan distribusi suhu pada batang di titik x pada waktu t dan k adalah difusitas termal yang mengukur kemampuan batang untuk menghantar panas.
   Difusivitas termal dapat ditulis dengan

$$k = \frac{k}{\rho c'}$$

   Dengan k adalah besaran intensif bahan yang menunjukkan kemampuannya untuk menghantarkan panas (konduktivitas termal), ρ adalah kepadatan benda, dan c adalah jenis benda.

2. Kondisi batas (KB) menyatakan suhu pada kedua ujung batang, ditulis dengan

$$u(0,t) = u(a,t) = 0,\ t \geq 0$$

   Kondisi batas diklasifikasikan menjadi tiga tipe:

   a. Kondisi batas Dirichlet, yaitu kondisi batas yang menentukan fungsi u yang tidak diketahui pada batas.
   b. Kondisi batas Neumann, yaitu kondisi batas yang menentukan turunan normal u terhadap batas.
   c. Kondisi batas Robin, yaitu syarat bebas yang menentukan hubungan linier antara u dan turunan normalnya pada batas.

3. Kondisi awal (KA) menggambarkan suhu awal u pada waktu $t = 0$, ditulis dengan

$$u(x,0) = f(x),\ 0 \geq x \geq a$$

Persamaan panas juga terbagi berdasarkan bidang penyebaran panas diantaranya (Mulyati dan Sugiyanto, 2013):

1. Persamaan Panas Dimensi Satu
   Bidang penyebaran panas persamaan panas dimensi satu berbentuk batang atau kabel yang hanya melibatkan satu variabel. Persamaan panas dimensi satu dibedakan dalam dua jenis:
   i. Persamaan Panas Homogen
   $$u_t = ku_{xx},\ 0 < x < a,\ t > 0$$
   Persamaan panas homogen yang telah kehilangan panas lateral (panas pada sisi batang) ditulis dengan
   $$u_t = ku_{xx} - u,\ 0 < x < a,\ t > 0$$
   ii. Persamaan Panas Nonhomogen
   $$u_t = ku_{xx} + g(x),\ 0 < x < a,\ t > 0$$
   Dimana $g(x)$ adalah suku nonhomogen.
2. Persamaan Panas Dimensi Dua
   Bidang penyebaran panas persamaan panas dimensi dua area yang digunakan lebih luas yang berbentuk plat atau permukaan yang melibatkan dua variabel. Persamaan panas dimensi dua juga dibedakan dalam dua jenis:
   i. Persamaan Panas Homogen
   $$u_t = k(u_{xx} + u_{yy}),\ 0 < x < a,\ 0 < y < b,\ t > 0$$
   Persamaan panas homogen yang telah kehilangan panas lateral (panas pada sisi batang) ditulis dengan
   $$u_t = k(u_{xx} + u_{yy}) - u,\ 0 < x < a,\ 0 < y < b,\ t > 0$$
   ii. Persamaan Panas Nonhomogen
   $$u_t = k(u_{xx} + u_{yy}) + h(x, y),\ 0 < x < a,\ 0 < y < b,\ t > 0$$

Dimana $h(x, y)$ adalah suku nonhomogen.

2.5 Deret Taylor

Misalkan f dan semua turunannya $f', f'', f''', \ldots$ berada pada selang $[a, b]$ dan $x_0 \epsilon [a, b]$, maka untuk nilai-nilai x di sekitar x_0 dan $x \epsilon [a, b]$, $f(x)$ dapat diekspansi ke dalam deret Taylor (Putra dkk, 2023):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + ... + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + ...$$

Jika fungsi diperluas di sekitar $x_0 = 0$, maka deret tersebut dinamakan deret Maclaurin yang merupakan deret Taylor baku. Contoh:

$$\sin(x) = \sin(0) + \frac{(x - 0)}{1!} \cos(0) + \frac{(x - 0)^2}{2!} (-\sin(0)) + ... = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...$$

2.6 Metode Dekomposisi Adomian

Metode Dekomposisi Adomian dikemukakan oleh seorang ahli ilmu matematika dari Amerika yaitu George Adomian (1922-1996). Metode Dekomposisi Adomian merupakan suatu metode yang digunakan untuk memudahkan dalam menyelesaikan solusi dari persamaan diferensial linier dan nonlinier (Wiratama dkk, 2014).

Diberikan persamaan diferensial yang dinotasikan dalam persamaan operator:

$$Ly + Ry + Ny = G \tag{2.6.1}$$

Dengan N adalah operator nonlinear dan L adalah operator diferensial linier orde lebih tinggi R yang diasumsikan dapat dibalik (invertible), R adalah operator diferensial linear dari orde yang kurang dari L dan G suku nonhomogen (Wartono dan Muda, 2011).

Persamaan (2.6.1) dapat ditulis menjadi:

$$Ly = G - Ry - Ny \tag{2.6.2}$$

Selanjutnya jika persamaan (2.6.2) menggunakan operator L^{-1} diperoleh

$$y = h + L^{-1}G - L^{-1}Ry - L^{-1}Ny \quad (2.6.3)$$

Dengan h adalah solusi persamaan homogeny $Ly = 0$ dengan nilai awal atau nilai batas yang diketahui. Kemudian Adomian mendefinisikan solusi y sebagai jumlahan deret tak hingga yaitu

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \quad (2.6.4)$$

Dengan

$$A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N \sum_{k=0}^{\infty} y_k \lambda^k\right]_{\lambda=0} \quad (2.6.5)$$

Selanjutnya komponen A_0 disebut polynomial Adomian, didefinisikan sebagai:

$$A_n = N(y_0)$$

$$A_1 = u_1 N'(y_0)$$

$$A_2 = u_2 N'(y_0) + \frac{u_1^2}{2!} N''(y_0)$$

$$A_3 = u_3 N'(y_0) + u_1 u_2 N''(y_0) + \frac{u_1^3}{3!} N'''(y_0)$$

:

:

Selanjutnya menggunakan persamaan (2.6.3) dan (2.6.4) diperoleh:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = h + L^{-1}G - L^{-1}Ry - L^{-1}Ny \quad (2.6.6)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.6.4) dan (2.6.5) ke persamaan (2.6.6) diperoleh:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = h + L^{-1}G - L^{-1}R\sum_{n=0}^{\infty} y_n - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (2.6.7)$$

Lebih lanjut, Persamaan (2.6.7) dapat diuraikan yaitu:

$$y_0 = h + L^{-1}G$$

dan

$$y_n = -L^{-1}(Ry_{n-1}) - L^{-1}(A_{n-1}), n = 1, 2, 3, ...$$

Kelebihan dari Metode Dekomposisi Adomian Laplace yaitu solusi yang diperoleh lebih sederhana dalam bentuk deret tak hingga.

2.7 Transformasi Laplace

Definisi 2.7.1 (Joel, 1999)
Misalkan $F(t)$ suatu fungsi dari $t > 0$. Transformasi Laplace dari $F(t)$ yang dinyatakan oleh $\mathcal{L}f(t)$, didefinisikan sebagai,

$$\mathcal{L}f(t) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

dengan parameter s adalah riil sehingga nilai integral ada.

Menurut (Yulida, 2012) sifat-sifat dasar transformasi Laplace yang dapat digunakan untuk mempermudah dalam proses menentukan transformasi suatu fungsi sebagai berikut:

1. Sifat linieritas (*Linearity property*)
   Jika $\mathcal{L}f_1(t) = F_1(s)$ dan $\mathcal{L}f_2(t) = F_2(s)$, dan c_1 dan c_2 sebarang konstanta maka $\mathcal{L}c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
   Bukti: Diketahui $\mathcal{L}f_1(t) = F_1(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_1(t)\, dt$ dan $\mathcal{L}f_2(t) = F_2(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_2(t)\, dt$

Untuk sebarang konstanta c_1 dan c_2,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) &= \int_0^\infty e^{-st}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t))\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} c_1 f_1(t) + e^{-st} c_2 f_2(t)\,dt \\ &= c_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t)\,dt + c_2 \int_0^\infty e^{-st} f_2(t)\,dt \\ &= c_1 \mathcal{L} f_1(s) + c_2 \mathcal{L} f_2(s) \\ &= c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s).\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\mathcal{L} c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$.
Sifat linier ini sekaligus membuktikan bahwa Transformasi Laplace $\mathcal{L}$ juga merupakan operator linier.

2. Sifat derivatif
   Jika $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ maka
   a. Turunan pertama

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0) = sF(s)$$

   b. Turunan Kedua

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f''(t)) &= \int_0^\infty e^{-st} f''(t)\,dt = s\mathcal{L}(f'(t)) - f(0) \\ &= s^2 \mathcal{L}(f(t)) - f'(0) - sf(0).\end{aligned}$$

   c. Secara umum untuk turunan ke-n dapat ditulis

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) &= \int_0^\infty e^{-st} f^{(n)}(t)\,dt \\ &= s^n \mathcal{L}(f(t)) - f^{n-1}(0) - ... - s^{n-1} f(0)\end{aligned}$$

Definisi 2.7.2 (Joel, 1999)
Jika Transformasi Laplace suatu fungsi $f(t)$ adalah $F(s)$, yaitu $\mathcal{L}(F(t)) = F(s)$ maka $f(t)$ dinamakan Invers Transformasi Laplace dari $F(s)$ dan dinotasikan dengan $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$ dengan $\mathcal{L}^{-1}$ disebut Operator Invers Transformasi Laplace.
Fungsi Invers Transformasi Laplace tunggal. Berikut diberiikan pada teorema berikut

Teorema 2.7.3 (Joel, 1999)
Jika f dan g fungsi kontinu untuk $t \geq 0$ dan mempunyai Transformasi Laplace F maka $f(t) = g(t)$ untuk setiap $t \geq 0$.
Sifat linieritas (*Linearity property*) juga berlaku pada Invers Transformasi Laplace. Suatu Transformasi Laplace misalkan $F(s)$ dinyatakan

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + ... + F_n(s)$$

Andaikan $f_1(t) = \mathcal{L}(F_1(s)), f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}(F_2(s)), ..., f_n(t) = \mathcal{L}^{-1}(F_n(s))$, maka fungsi $f(t) = f_1 + f_2(t) + ... + f_n(t)$ mempunyai Transformasi Laplace yaitu $F(s)$. Dengan menggunakan sifat ketungggalan diperoleh

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \mathcal{L}^{-1}(F_1(s)) + \mathcal{L}^{-1}(F_2(s)) + ... + \mathcal{L}^{-1}(F_n(s))$$

Jadi Invers Transformasi Laplace $\mathcal{L}^{-1}$ juga merupakan Operator Linier.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2024/2025 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

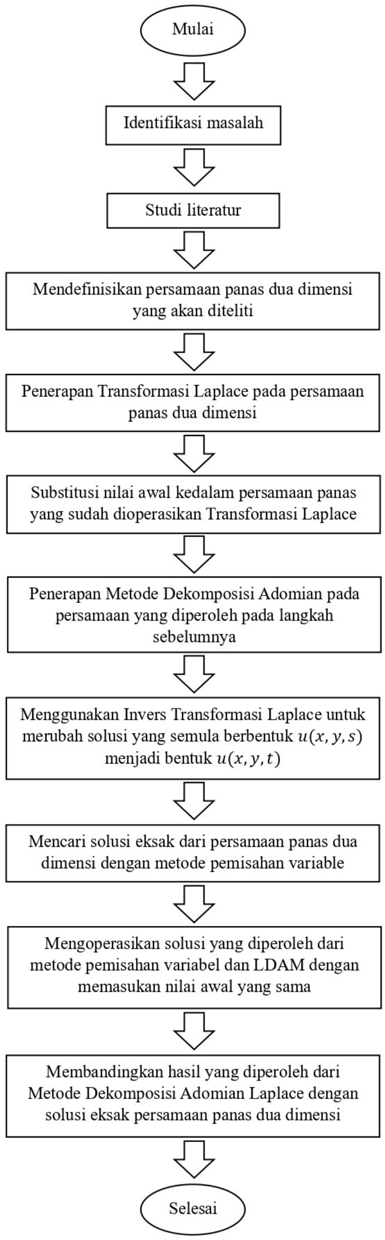
3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

1. Identifikasi masalah, identifikasi masalah dilakukan untuk menentukan permasalahan spesifik yang akan diselesaikan dengan persamaan panas dua dimensi.
2. Studi literatur, studi literatur dilakukan untuk mengumpulkan dan menganalisis literatur yang relevan mengenai Persamaan Panas, Metode Dekomposisi Adomian, dan Transformasi Laplace.
3. Mendefinisikan persamaan panas dua dimensi yang akan diteliti, menulis bentuk umum persamaan panas dalam bentuk matematis yang tepat dan juga menetapkan nilai awal persamaan panas dua dimensi.
4. Penerapan Transformasi Laplace pada persamaan panas dua dimensi, mengubah persamaan diferensial menjadi persamaan aljabar yang lebih mudah diselesaikan.
5. Substitusi nilai awal kedalam persamaan panas yang sudah dioperasikan Transformasi Laplace.
6. Penerapan Metode Dekomposisi Adomian, diawali dengan menyatakan Solusi yang didapat dari Langkah 5 ke dalam bentuk deret tak hingga $\sum_{n=0}^{\infty}$ dengan u_n dihitung secara rekursif, lakukan perhitungan untuk mendapatkan Solusi mendekati.

7. Menggunakan Invers Transformasi Laplace untuk merubah solusi yang semula berbentuk $u(x, y, s)$ menjadi bentuk $u(x, y, t)$.
8. Mencari solusi eksak dari persamaan panas dua dimensi dengan metode pemisahan variabel.
9. Mengoperasikan solusi yang diperoleh dari metode pemisahan variabel dan LDAM dengan memasukan nilai awal yang sama.
10. Membandingkan hasil yang diperoleh dari Metode Dekomposisi Adomian Laplace dengan solusi eksak persamaan panas dua dimensi.

Berikut diberikan *flowchart* metode penelitian:



Gambar 3.1 *Flowchart* metode penelitian

BAB V

KESIMPULAN

Pada penelitian ini telah dikaji penyelesaian persamaan panas dua dimensi yang dilengkapi dengan nilai awal dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace, secara umum ada empat langkah inti dalam menyelesaikan persamaan panas dua dimensi dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace yaitu operasi transformasi laplace, substitusi nilai awal, penerapan metode dekomposisi Adomian, dan invers transformasi Laplace.

Hasil yang diperoleh dengan menerapkan langkah-langkah yang tertera di atas sebagai berikut:

$$u(x,y,t) = f(x,y) + \frac{kt}{1!}\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right) + \frac{k^2t^2}{2!}\left(\frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial y^4}\right) + ... + \frac{k^n t^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^{2n} f(x,y)}{\partial x^{2k}\partial y^{2(n-k)}} + ...$$

Sebagai ilustrasi disajikan contoh kasus persamaan panas dua dimensi dengan nilai awal $u(x,y,0) = f(x,y) = \sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{\pi y}{H}$. Solusi dari masalah ini dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace adalah:

$$u(x,y,t) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{H}\right)e^{-k\left(\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2\right)t}$$

dan sama dengan solusi yang diperoleh menggunakan metode variabel terpisah.

DAFTAR PUSTAKA

Abdy, M., Side, S., & Arisandi, R. (2018). Penerapan Metode Dekomposisi Adomian Laplace Dalam Menentukan Solusi Persamaan Panas. *Journal of Mathematics, Computations, and Statistics*, 1(2), 206-2011.

Andini, H. M., Djauhari, E., & Johansyah, M. D. (2020). Solusi Persamaan Diferensial Fraksional Riccati Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace Dan Analisis Kekonvergenannya. *Majamath: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 3(2), 109-119.

Alwi, W., Ratnasari, & Abidin, W. (2015). Fungsi Green Yang Dikonstruksikan Pada Persamaan Diferensial Linear Tak Homogen Orde-n. *Jurnal MSA*, 3(1), 21-28.

Gunawan, P. H. (2021). *Pengantar Persamaan Diferensial Parsial: untuk Sains dan Teknik*. Yogyakarta: Penerbit Sastrabook Indonesia.

Haryanto, A. (2015). *Perpindahan Panas*. Yogyakarta: Innosain.

Jaradat, O. K. (2008). Adomian Decomposition Method for Solving Abelian Differential Equations. *Journal of Applied Sciences*, 8(10), 1962-1966.

Joel, L. S. (1999). *The Laplace Transform: Theory and Applications*. New York: Springer Science.

Muhaijir, M. N., & Wartono. (2012). Penyelesaian Persamaan Painleve Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace. *Seminar Nasional*

Teknologi Informasi Komuunikasi dan Industri (SNTIKI), 4(3), 377-383.

Mulyati, A. E., & Sugiyanto. (2013). Aplikasi Persamaan Bessel Orde Nol Pada Persamaan Panas Dua Dimensi. *Jurnal Fourier*, 2(2), 113-123.

Murtafi'ah, W., & Apriandi, D. (2018). *Persamaan Diferensial Biasa Dan Aplikasinya*. Madiun: Universitas PGRI Madiun.

Nuraeni, Z. (2017). Aplikasi Persamaan Diferensial Dalam Estimasi Jumlah Populasi. *Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, 5(1), 9-16.

Powers, D. L. (2008). *Boundary Value Problems and Partial Differential Equations*. USA: Elsevier Academic Press.

Purnomo, D. (2015). *Persamaan Diferensial*. Malang: Media Nusa Creative.

Putra, I. F., Syafwan, M., Helmi, M. R., & Nazra, A. (2023). Bentuk Eksplisit Rumus Beda Maju dan Beda Mundur Untuk Turunan Ke-n Dengan Orde Ketelitian Ke-n Berdasarkan Deret Taylor. *Lebesgue: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika, Matematika dan Statistika*, 4(3), 1675-1686.

Ricardo, H. J. (2009). *A Modern Introduction to Differential Equations*. USA: Elsevier Academic Press.

Sanusi, W., Side, S., & Fitriani, B. (2019). Solusi Persamaan Transport dengan Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace. *Journal of Mathematics, Computations, and Statistics*, 2(2), 173-182.

Sari, F. M., Yundari, & Helmi. (2014). Penyelesaian Numerik Persamaan Diferensial Linear Homogen Dengan Koefisien Konstan Menggunakan Metode Adams Bashforth Moulton. *Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)*, 3(2), 125-134.

Sulistyono, B. A. (2020). Aplikasi Metode Beda Hingga Skema Eksplisit Pada Persamaan Konduksi Panas. *Jurnal Math Educator Nusantara:Wahana Publikasi Karya Tulis Ilmiah di Bidang Pendidikan Matematika*, 6(1), 41-46.

Trench, F. W. (2013). *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems*. Quezon: A.T. Still University.

Wartono, & Muda, Y. (2011). Aproksimasi Metode Dekomposisi Adomian Pada Persamaan Diferensial Hiperbolik Linear. *Jurnal Sains, Teknologi dan Industri*, 9(1), 97-103.

Widder, D. V. (1975). *The Heat Equation*. New York: Academisc Press, INC.

Wiratama, A., Thresye, & Yulida, Y. (2014). Aplikasi Metode Dekomposisi Adomian Untuk Menentukan Formula Transformasi Laplace. *Jurnal Matematika dan Terapan "epsilon"*, 6(2), 39-45.

Yulida, Y. (2012). Metode Dekomposisi Adomian Laplace Untuk Solusi Persamaan Diferensial Nonlinier Koefisien Fungsi. *Jurnal Matematika Murni dan Terapan*, 6(1), 17-26.