DERIVASI NILPOTEN PADA RING MATRIKS

Skripsi

Oleh

RENA PUSPITA ANGELIKA
NPM. 2117031001

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

ABSTRACT

NILPOTENT DERIVATION ON MATRIX RINGS

By

Rena Puspita Angelika

Given a ring R. An additive mapping $d : R \to R$ is called a derivation if d satisfies Leibniz's rule, that is, $d(ab) = d(a)b + ad(b)$ for every $a, b \in R$. In a special case, for every $x \in R$ there exists a positive integer n such that $d^n(x) = 0$, the mapping d is called a nilpotent derivation on R. The research is conducted by constructing the nilpotent derivation on the matrix ring, investigating the properties of the nilpotent derivation, investigating the relationship between the *inner* derivation and the nilpotent derivation, and constructing examples of the theorems obtained.

Keywords: nilpotent, *inner* derivation, nilpotent derivation, ring matrix, linear combination.

ABSTRAK

DERIVASI NILPOTEN PADA RING MATRIKS

Oleh

Rena Puspita Angelika

Diberikan ring R. Pemetaan aditif $d : R \to R$ disebut derivasi jika d memenuhi aturan Leibniz, yaitu, $d(ab) = d(a)b + ad(b)$ untuk setiap $a, b \in R$. Dalam kasus khusus, untuk setiap $x \in R$ terdapat sebuah bilangan bulat positif n sedemikian sehingga $d^n(x) = 0$, pemetaan d disebut sebagai derivasi nilpotent pada R. Penelitian dilakukan dengan mengkonstruksi derivasi nilpotent pada ring matriks, menyelidiki sifat-sifat derivasi nilpoten, menyelidiki hubungan antara derivasi *inner* dan derivasi nilpoten, serta mengkonstruksi contoh-contoh dari teorema yang diperoleh.

Kata-kata kunci: nilpoten, derivasi *inner*, derivasi nilpoten, ring matriks, kombinasi linear.

DERIVASI NILPOTEN PADA RING MATRIKS

RENA PUSPITA ANGELIKA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

Judul Skripsi	:	**DERIVASI NILPOTEN PADA RING MATRIKS**
Nama Mahasiswa	:	***Rena Puspita Angelika***
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2117031001**
Program Studi	:	**Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.	**Bernadhita Herindri S. U., M.Sc.**
NIP 198406272006042001	NIP 198002062003121003

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. tim penguji

Ketua	:	**Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**	....
Sekretaris	:	**Bernadhita Herindri S. U., M.Sc.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **15 Januari 2025**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Rena Puspita Angelika**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2117031001**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Derivasi Nilpoten pada Ring Matriks**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 15 Januari 2025

Penulis,

Rena Puspita Angelika

RIWAYAT HIDUP

Penulis dengan nama lengkap Rena Puspita Angelika lahir di Kabupaten Tangerang pada tanggal 19 September 2003. Penulis merupakan anak tunggal dari pasangan Parsono dan Reni.

Pendidikan formalnya dimulai di Raudhatul Athfal pada tahun 2008, kemudian melanjutkan jenjang Sekolah Dasar di SDIT Tunas Cendikia dari tahun 2009 hingga 2015. Setelah menyelesaikan pendidikan dasar, penulis melanjutkan ke MTsN 2 Kabupaten Tangerang dan berhasil menyelesaikannya pada tahun 2018.

Selanjutnya, penulis diterima di salah satu sekolah menengah atas favorit di daerahnya, yaitu SMA Negeri 1 Kabupaten Tangerang, dan menyelesaikan pendidikan menengah atas pada tahun 2021. Selama menempuh pendidikan, penulis dikenal sebagai siswa berprestasi di berbagai bidang akademik.

Pada tahun 2021, penulis berhasil lolos Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN) dan diterima di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung. Selama masa studi, penulis aktif dalam berbagai kegiatan organisasi, termasuk menjabat sebagai Bendahara Umum UKM Penelitian Universitas Lampung periode 2024.

Selain aktif dalam organisasi, penulis juga memiliki pengalaman kerja praktik di Badan Pusat Statistik (BPS) Kabupaten Tangerang. Dengan latar belakang pendidikan dan pengalaman tersebut, penulis berharap hasil penelitian ini dapat memberikan kontribusi yang berarti, khususnya dalam bidang matematika, terutama pada ranah aljabar.

KATA INSPIRASI

”Sesungguhnya beserta kesulitan itu ada kemudahan”.

(Q.S Asy-Syarh:6)

”Allah niscaya akan mengangkat orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu beberapa derajat. Allah Maha teliti terhadap apa yang kamu kerjakan.”

(Q.S Al-Mujadilah:11)

”Satu-satunya cara untuk melakukan pekerjaan hebat adalah dengan mencintai apa yang kamu lakukan.”

(Albert Einstein)

”Keberhasilan bukanlah milik orang yang pintar. Keberhasilan adalah kepunyaan mereka yang senantiasa berusaha.”

(B.J. Habibie)

”Love yourself”

(BTS)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap Alhamdulillah dan syukur kepada Allah SWT atas nikmat serta hidayah-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan Bahagia, saya persembahkan rasa terima kasih saya kepada:

Papa dan Mamaku Tercinta

Terima kasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini. Terima kasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terima kasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terima kasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta
Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul ”Derivasi Nilpoten pada Ring Matriks” dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing 1 yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

2. Ibu Bernadhita Herindri S. U., M.Sc. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

3. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.

4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

5. Bapak Prof. Drs. Mustofa, MA, Ph.D. selaku dosen pembimbing akademik.

6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Syarifatul, Anggun, Fenny, Dilah, Lina, Dita dan Falen selaku sahabat yang senantiasa mendukung penulis dalam mengerjakan skripsi ini.
8. Ditha, Rara, Dania, Desi, Isty, Nafdha dan Nadia selaku teman-teman satu bimbingan yang telah banyak memberikan kritik dan saran sehingga penulis dapat menyelasaikan skripsi ini dengan baik.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 14 Februari 2025

Rena Puspita Angelika

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matematikawan Yunani seperti Archimedes (287–212 SM) menggunakan konsep geometri untuk menghitung area dan volume, yang pada dasarnya merupakan konsep limit dalam kalkulus. Namun, Archimedes tidak mengembangkan kalkulus secara eksplisit. Metode yang digunakannya menjadi dasar bagi konsep derivasi (Boyer & Carl B, 1972). Konsep perubahan dan kecepatan perubahan mulai mendapat perhatian lebih lanjut pada abad ke-17. Matematikawan seperti Pierre de Fermat (1601–1665) memulai gagasan tentang mencari garis singgung pada kurva, yang merupakan awal dari konsep derivasi. Fermat juga memperkenalkan teknik menemukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi, yang merupakan langkah penting menuju kemajuan teori derivasi (Katz & Victor, 2008).

Dengan menganggap fungsi sebagai kurva yang menunjukkan perubahan suatu variabel, Isaac Newton mengembangkan konsep derivasi, yang ia sebut sebagai "*fluxions*", sebagai bagian dari pengembangan kalkulusnya. Dia juga mengembangkan konsep derivasi untuk menunjukkan laju perubahan ini. Melalui hubungan antara percepatan, kecepatan, dan posisi, dalam karyanya "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*" (1687), Newton memberikan dasar fisik yang kuat untuk konsep derivasi. Gottfried Wilhelm Leibniz mengembangkan derivasi secara mandiri dengan menggunakan notasi yang lebih mirip dengan yang digunakan sekarang. Notasi $\frac{dy}{dx}$, yang diciptakan oleh Leibniz, sekarang digunakan sebagai simbol standar untuk derivasi, yang menunjukkan rasio perubahan suatu fungsi terhadap perubahan variabel. Kontroversi besar terjadi pada akhir abad ke-17 antara pengikut Newton dan Leibniz mengenai siapa yang pertama kali menemukan derivasi. Namun, sekarang diakui bahwa keduanya berkontribusi secara independen dan signifikan pada pengembangan derivasi (Kline & Morris, 1972).

Pada pertengahan abad ke-19, matematikawan seperti Arthur Cayley dan William Rowan Hamilton mengembangkan konsep matriks dan quaternions, yang mendorong pengembangan aljabar abstrak. Ini membuka jalan bagi penerapan derivasi pada struktur aljabar yang lebih luas, terutama pada ring dan modul. Pada masa ini, konsep derivasi mulai dipahami sebagai suatu pemetaan aditif yang menghormati aturan Leibniz (Cayley, 1858). Emmy Noether (1882-1935) berkontribusi besar dalam aljabar modern dengan pengembangan teori ring dan ideal. Meskipun Noether sendiri tidak secara eksplisit memfokuskan pada derivasi dalam karyanya, pengembangan teori ring yang dibangunnya memungkinkan pengenalan dan penggunaan derivasi dalam mempelajari ring (Noether, 1921).

Dalam struktur abstrak, derivasi didefinisikan sebagai suatu pemetaan yang berlaku pada elemen-elemen dari ring atau aljabar dengan aturan yang mirip dengan aturan turunan dalam kalkulus. Derivasi pada ring R didefinisikan sebagai pemetaan $d : R \to R$, yang memenuhi dua sifat dasar yaitu: linearitas: $d(a + b) = d(a) + d(b)$ untuk setiap $a, b \in R$ dan aturan Leibniz: $d(ab) = d(a)b + ad(b)$, untuk setiap $a, b \in R$. Ini adalah perluasan konsep turunan dalam kalkulus, yaitu fungsi yang diturunkan digantikan oleh elemen-elemen dari suatu ring.

Selain derivasi umum, ada konsep derivasi *inner*. Derivasi *inner* adalah derivasi khusus yang didefinisikan dengan $d_a(b) = ab - ba$, dengan $a \in R$ adalah elemen tetap dari ring dan $b \in R$ (Ernanto, 2018). Derivasi *inner* ini mencerminkan struktur internal dari ring dan sering digunakan dalam kajian aljabar non-komutatif.

Jacobson, seorang matematikawan terkemuka di abad ke-20, memberikan kontribusi signifikan terhadap perkembangan aljabar non-komutatif, termasuk teori derivasi dalam ring pada tahun 1956. Derivasi pada sebuah ring R adalah suatu fungsi $d : R \to R$ yang memenuhi aturan linearitas dan aturan Leibniz (Jacobson, 1956). Derivasi pada ring kemudian menjadi alat penting dalam kajian deformasi dan representasi, serta dalam teori modul.

Salah satu konsep penting yang muncul adalah derivasi nilpoten, yaitu derivasi pada aljabar (atau struktur aljabar lainnya) yang ketika diterapkan berulang kali pada elemen tertentu menghasilkan nol. Dengan kata lain, suatu derivasi d dikatakan nilpoten jika terdapat bilangan bulat positif n sehingga $d^n = 0$. Artinya, jika d diterapkan sebanyak n kali berturut-turut, hasilnya akan menjadi nol. Bilangan n terkecil yang memenuhi syarat ini disebut indeks nilpotensi dari derivasi tersebut.

Dalam konteks ring matriks, derivasi nilpoten memiliki peran penting. Matriks sering digunakan sebagai representasi elemen dalam berbagai struktur aljabar, sehingga pemahaman tentang sifat derivasi nilpoten pada ring matriks dapat memperluas wawasan dalam teori aljabar dan aplikasinya. Hubungan antara derivasi nilpoten dan derivasi *inner* pada ring matriks menjadi salah satu area penelitian yang menarik. Secara khusus, penelitian ini akan membahas sifat-sifat kombinasi linear derivasi nilpoten pada ring matriks dan keterkaitannya dengan derivasi *inner*.

Berdasarkan perkembangan dari penelitian sebelumnya, hingga saat ini belum ada peneliti yang secara eksplisit membahas sifat-sifat derivasi nilpoten pada ring matriks serta keterkaitan antara derivasi *inner* dengan derivasi nilpoten. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk menemukan celah tersebut dengan menyelidiki sifat-sifat derivasi nilpoten, terutama pada ring matriks, serta menentukan kaitan antara derivasi *inner* dan derivasi nilpoten pada ring matriks.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. menyelidiki kaitan derivasi *inner* dengan derivasi nilpoten pada ring matriks;
2. menyelidiki sifat kombinasi linear derivasi nilpoten pada ring matriks;
3. mengkontruksi contoh-contoh derivasi nilpoten pada ring matriks.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah:

1. menambah pengetahuan serta memperdalam pengetahuan tentang derivasi nilpoten pada ring matriks;
2. mengembangkan pengetahuan tentang sifat-sifat derivasi nilpoten pada ring matriks terutama sifat kombinasi linear;
3. memperdalam pemahaman tentang penerapan derivasi *inner* pada derivasi nilpoten serta sebagai referensi untuk penelitian lebih lanjut mengenai derivasi nilpoten pada ring matriks.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Dalam bab ini, akan dibahas secara mendalam mengenai empat konsep fundamental dalam matematika, yaitu matriks, grup, ring, dan derivasi. Setiap konsep ini memiliki karakteristik unik dan keempatnya membangun dasar yang kokoh bagi banyak teori dalam matematika. Dengan memahami hubungan antara matriks, grup, ring, dan derivasi, dapat dieksplorasi berbagai aspek matematika yang lebih kompleks dan aplikatif.

2.1 Matriks

Sebelum membahas definisi matriks, perlu dipahami bahwa matriks merupakan konsep dasar dalam matematika yang berperan penting di berbagai bidang, seperti aljabar linear, fisika, ekonomi, dan ilmu komputer. Matriks membantu menyusun dan menyederhanakan masalah kompleks, terutama yang melibatkan persamaan linear dan transformasi geometris, serta menjadi alat penting dalam pemecahan masalah praktis. Berikut merupakan definisi matriks.

Definisi 2.1.1 Matriks adalah susunan sekelompok bilangan dalam suatu jajaran berbentuk persegi atau persegi panjang yang diatur berdasarkan baris dan kolom, dan diletakkan diantara dua tanda kurung (Rifa'i, 2016).

Matriks yang terdiri dari m baris dan n kolom dikatakan matriks berordo $m \times n$. Jika ingin menuliskan matriks tanpa secara khusus menulis semua elemennya, maka mempergunakan huruf-huruf besar A, B, C dan sebagainya. Pada umumnya a_{mn} akan menyatakan elemen matriks A yang berada pada baris m dan kolom n. Jadi, jika A adalah matriks $m \times n$, maka

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Notasinya biasa disingkat $A = (a_{mn})$ (Indriati, 2019).

Selanjutnya akan dibahas mengenai operasi-operasi yang terdapat pada matriks.

1) Penjumlahan Matriks.

   Dua matriks A dan B dapat dijumlahkan bila kedua ordo $m \times n$-nya sama dan hasilnya matriks C dengan ordo $m \times n$.

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & ... & b_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & ... & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & ... & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & ... & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

   Berikut akan diberikan contoh penjumlahan pada matriks.

   Contoh 2.1.2 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

   Diperoleh

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3+2 & 5+4 & 7+3 \\ 2+6 & 1+5 & 4+1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 9 & 10 \\ 8 & 6 & 5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Lebih lanjut, akan diberikan contoh penjumlahan matriks yang tidak terdefinisi.

Contoh 2.1.3 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$.

Matriks $A + B$ tidak terdefinisi karena ukuran matriks A dan B tidak sama.

2) Perkalian skalar terhadap matriks.

   Jika λ suatu skalar dan $A = a_{mn}$, maka matriks $\lambda A = (\lambda a_{mn})$.

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}.$$

   Akan diberikan contoh perkalian skalar sebagai berikut.

   Contoh 2.1.4 Diberikan $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

   Diperoleh $3A = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 6 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 9 \\ 18 & 15 & 3 \end{bmatrix}$.

3) Perkalian Matriks.

   Pada perkalian matriks AB, matriks A disebut matriks pertama dan B matriks kedua. Berikut merupakan syarat perkalian matriks:

   a. Banyaknya kolom matriks pertama $=$ banyaknya baris matriks kedua.
   b. Bila A berordo $p \times q$ dan B berordo $q \times r$ maka $C = AB$ adalah matriks berordo $p \times r$.

Definisi 2.1.5 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ . & . & \dots & . \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ . & . & \dots & . \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{bmatrix}$ dan

$B = \begin{bmatrix} b_{11} & ... & b_{1j} & ... & b_{1r} \\ b_{21} & ... & b_{2j} & ... & b_{2r} \\ . & ... & . & ... & . \\ . & ... & . & ... & . \\ b_{q1} & ... & b_{qj} & ... & b_{qr} \end{bmatrix}$. Perkalian suatu matriks AB didefinisikan sebagai:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1q} \\ . & . & ... & . \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2q} \\ . & . & ... & . \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & ... & b_{1j} & ... & b_{1r} \\ b_{21} & ... & b_{2j} & ... & b_{2r} \\ . & ... & . & ... & . \\ . & ... & . & ... & . \\ b_{q1} & ... & b_{qj} & ... & b_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & ... & c_{1r} \\ . & ... & . \\ . & c_{ij} & . \\ . & ... & . \\ c_{p1} & ... & c_{pr} \end{bmatrix}$$

dengan $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{iq}b_{qj} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik}b_{kj}$ (Indriati, 2019).

Untuk memberikan pemahaman yang lebih mendalam, akan disajikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.1.6 Diberikan $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}$. Diperoleh $AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 19 & 29 \\ 18 & 25 & 33 \\ 34 & 13 & 25 \end{bmatrix}$.

Setelah mendalami berbagai operasi pada matriks, langkah berikutnya adalah memahami secara mendalam hukum-hukum yang berlaku dalam operasi matriks tersebut. Ini mencakup berbagai aturan matematis yang memastikan bahwa setiap operasi pada matriks, seperti penjumlahan dan perkalian dapat dilakukan secara konsisten dan menghasilkan solusi yang benar.

1. Berlaku hukum komutatif $A + B = B + A$.
2. Berlaku hukum asosiatif sehingga $(A + B) + C = A + (B + C)$.
3. Berlaku hukum distributif dengan skalar λ, sehingga $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
4. Tidak berlaku hukum komutatif terhadap operasi perkalian sedemikian sehingga $AB \neq BA$.
5. Berlaku hukum asosiatif sehingga $(AB)C = A(BC)$.

6. Jika $AB = 0$ (matriks nol) maka kemungkinannya $A = 0$ dan $B = 0$, $A = 0$ atau $B = 0$, $A \neq 0$ dan $B \neq 0$.

7. Jika $AB = AC$, belum tentu $B = C$.

2.2 Grup

Sebelum mendefinisikan konsep grup, akan dijelaskan definisi operasi biner sebagai berikut.

Definisi 2.2.1 Suatu operasi biner pada himpunan $S \neq \emptyset$ adalah

$$\begin{aligned} * : S \times S &\to S \\ (a, b) &\mapsto *(a, b) = a * b. \end{aligned}$$

Operasi biner atau operasi tertutup artinya dari a dan b elemen di S, maka $a * b$ harus merupakan elemen di S (Andari, 2015).

Berikut diberikan contoh yang relevan.

Contoh 2.2.2 Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan. Operasi + merupakan operasi biner karena a dan b elemen di $\mathbb{Z}$, $a + b$ elemen di $\mathbb{Z}$, maka operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}$ merupakan operasi biner.

Setelah memahami definisi operasi biner, selanjutnya akan diberikan definisi dari grup.

Definisi 2.2.3 Sistem matematika $\langle G, * \rangle$ adalah grup jika memenuhi aksioma - aksioma berikut.

1. Operasi biner $*$ bersifat asosiatif, yaitu $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk setiap $a, b, c, \in G$.

2. Terdapat elemen identitas $e \in G$ untuk operasi biner $*$ sehingga untuk setiap $x \in G$ berlaku $e * x = x * e = x$.

3. Untuk setiap $a \in G$, terdapat elemen invers dari a di G, dinotasikan dengan a^{-1} sehingga $(a^{-1}) * a = a * (a^{-1}) = e$.

(Fitriani & Faisol, 2022).

Lebih lanjut diberikan definisi grup komutatif.

Definisi 2.2.4 Grup G dikatakan grup komutatif (grup Abel) jika operasi biner $*$ bersifat komutatif, yaitu $a * b = b * a$, untuk setiap $a, b \in G$ (Fitriani & Faisol, 2022).

Untuk memberikan pemahaman yang lebih mendalam, akan disajikan contoh himpunan yang termasuk grup dan yang bukan grup sebagai berikut.

Contoh 2.2.5 Akan diselidiki apakah $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup komutatif.

i. Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$, berlaku $a + b \in \mathbb{Z}$.

ii. Diberikan sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}$, berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$.

iii. Terdapat $0 \in \mathbb{Z}$ sehingga berlaku $0 + a = a + 0 = a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$.

iv. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, terdapat $-a \in \mathbb{Z}$ sehingga berlaku $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

v. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, berlaku $a + b = b + a$.

Jadi $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup komutatif.

Contoh 2.2.6 $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$ bukan merupakan grup, karena terhadap operasi pergandaan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ berlaku sifat: tertutup, assosiatif, mempunyai elemen satuan yaitu 1, tetapi ada elemen-elemen yang tidak mempunyai invers, salah satunya adalah 0. Syarat ke 4 tidak dipenuhi, sehingga $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$ bukan merupakan grup.

2.3 Ring

Berdasarkan sifat-sifat yang dimiliki himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dalam kaitannya dengan operasi penjumlahan dan perkalian, diperkenalkanlah sebuah struktur abstrak yang disebut ring dengan definisi sebagai berikut.

Definisi 2.3.1 Suatu himpunan tak kosong R disebut ring terhadap operasi penjumlahan + dan perkalian $\cdot$ jika memenuhi sifat:

i) $\langle R, + \rangle$ merupakan grup komutatif;

ii) operasi di R bersifat asosiatif, yaitu:

$$(r_1 \cdot r_2) \cdot r_3 = r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3)$$

untuk setiap $r_1, r_2, r_3 \in R$;

iii) operasi penjumlahan dan perkalian di R bersifat:

a) distributif kiri:

$$r_1 \cdot (r_2 + r_3) = (r_1 \cdot r_2) + (r_1 \cdot r_3),$$

untuk setiap $r_1, r_2, r_3 \in R$;

b) distributif kanan:

$$(r_1 + r_2) \cdot r_3 = (r_1 \cdot r_3) + (r_2 \cdot r_3),$$

untuk setiap $r_1, r_2, r_3 \in R$.

Secara ringkas, ring R terhadap operasi penjumlahan + dan perkalian $\cdot$ dinotasikan sebagai $\langle R, +, \cdot \rangle$. Dari uraian tersebut jelas bahwa definisi ring merupakan abstraksi dari sifat-sifat yang dimiliki oleh himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan dan perkalian bilangan bulat (Wahyuni dkk., 2021).

Untuk memberikan pemahaman yang lebih jelas tentang konsep ring, akan diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.3.2 Diberikan himpunan $2\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian. Akan ditunjukkan $2\mathbb{Z}$ merupakan ring.

1. Akan ditunjukkan $\langle 2\mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup komutatif.

   a. Operasi $+$ bersifat tertutup di $2\mathbb{Z}$, yaitu untuk setiap $2a, 2b \in 2\mathbb{Z}$, berlaku $2a + 2b = 2(a + b) \in 2\mathbb{Z}$.

   b. Operasi $+$ bersifat asosiatif di $2\mathbb{Z}$, yaitu untuk setiap $2a, 2b, 2c \in 2\mathbb{Z}$ berlaku $(2a + 2b) + 2c = 2a + (2b + 2c)$.

   c. Mempunyai elemen satuan atau identitas yaitu $0 \in 2\mathbb{Z}$.

   d. Mempunyai elemen invers, yaitu untuk setiap $2a \in 2\mathbb{Z}$ terdapat $-2a \in 2\mathbb{Z}$.

e. Berlaku hukum komutatif, karena untuk setiap dua elemen di $2\mathbb{Z}$, misalkan $2a$ dan $2b$, berlaku $2a + 2b = 2b + 2a$.

2. Akan ditunjukkan $\langle 2\mathbb{Z}, \cdot \rangle$ merupakan semigrup.

   a. Diberikan sebarang $2a, 2b \in 2\mathbb{Z}$, berlaku $2a(2b) = 2(2ab) \in 2\mathbb{Z}$.

   b. Diberikan sebarang $2a, 2b, 2c \in 2\mathbb{Z}$ berlaku $(2a \cdot 2b) \cdot 2c = 2a \cdot (2b \cdot 2c)$.

3. a. Untuk setiap $a, b, c \in 2\mathbb{Z}$, berlaku $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

   b. Untuk setiap $a, b, c \in 2\mathbb{Z}$, berlaku $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.

Jadi $\langle 2\mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

Suatu ring yang memiliki sifat komutatif dalam operasi perkalian dikenal sebagai ring komutatif. Dalam struktur ini, operasi perkalian antara dua elemen selalu menghasilkan hasil yang sama, tidak peduli urutan pengoperasiannya. Jadi, elemen-elemen dalam ring ini memenuhi sifat $a \cdot b = b \cdot a$, untuk setiap $a, b \in R$. Berikut ini adalah contoh ring yang memenuhi sifat komutatif pada operasinya, atau sering disebut ring komutatif.

Contoh 2.3.3 Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ merupakan ring komutatif.

Tabel 2.1 Tabel Cayley penjumlahan modulo 4 pada $\mathbb{Z}_4$

$+_4$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

1. Akan ditunjukkan $\langle \mathbb{Z}_4, + \rangle$ merupakan grup komutatif terhadap penjumlahan.

   a. Dari Tabel 2.1, dapat dilihat bahwa penjumlahan elemen-elemen di $\mathbb{Z}_4$ selalu menghasilkan elemen-elemen yang tetap berada di dalam $\mathbb{Z}_4$, sehingga operasi ini bersifat tertutup terhadap $\mathbb{Z}_4$.

   b. Diberikan sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$, berlaku $(a +_4 b) +_4 c = a +_4 (b +_4 c)$.

   c. Seperti yang ditunjukkan dalam Tabel 2.1 , elemen identitas dalam himpunan $(\mathbb{Z}_4, +)$ adalah 0, karena $a + \bar{0} = \bar{0} + a = a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_4$.

d. Berdasarkan Tabel 2.1, terlihat bahwa setiap elemen di $\mathbb{Z}_4$ memiliki invers masing-masing, yaitu: $(\bar{0})^{-1} = \bar{0}$, $(\bar{1})^{-1} = \bar{3}$, $(2)^{-1} = 2$, $(\bar{3})^{-1} = \bar{1}$.

e. Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{Z}_4$, berlaku $(a +_4 b) = (b +_4 a)$. Jadi $\mathbb{Z}_4$ bersifat komutatif.

Jadi, $\langle \mathbb{Z}_4, + \rangle$ merupakan grup komutatif.

2. Akan ditunjukkan $\langle \mathbb{Z}_4, \cdot \rangle$ merupakan semigrup.

Tabel 2.2 Tabel Cayley perkalian modulo 4 pada $\mathbb{Z}_4$

$\cdot_4$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

a. Dapat diamati dari Tabel 2.2 bahwa hasil perkalian elemen-elemen di $\mathbb{Z}_4$ selalu berada dalam himpunan $\mathbb{Z}_4$, sehingga operasi perkalian tersebut bersifat tertutup dalam $\mathbb{Z}_4$.

b. Z_4 memenuhi sifat asosiatif, yang berarti bahwa untuk setiap $a, b, c \in Z_4$, berlaku $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Jadi $\langle \mathbb{Z}_4, \cdot \rangle$ merupakan semigrup.

3. a. Untuk setiap elemen $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$, berlaku $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

   b. Untuk setiap elemen $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$, berlaku $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.

   Jadi $\mathbb{Z}_4$ distribusi perkalian terhadap penjumlahan.

4. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_4$ berlaku $a \cdot b = b \cdot a$.

Jadi $\langle \mathbb{Z}_4, +, \cdot \rangle$ merupakan suatu ring komutatif.

2.3.1 Ring Matriks

Ring matriks merupakan contoh signifikan dalam teori aljabar abstrak, terutama dalam kajian mengenai struktur ring. Ring matriks memberikan pemahaman yang mendalam tentang cara elemen-elemen dalam ring dapat berinteraksi melalui operasi tertentu, serta bagaimana struktur aljabar ini dapat diterapkan di berbagai bidang dalam matematika dan ilmu komputer. Berikut diberikan definisi dari ring matriks.

Definisi 2.3.4 Diberikan sebarang ring R. Himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ dengan entri-entri di R yang dinotasikan dengan $M_n(R)$. Himpunan ini membentuk suatu ring dengan operasi penjumlahan dan perkalian matriks (Goyal & Khurana, 2022).

Definisi 2.3.5 Diberikan sebarang ring R dan himpunan semua matriks $M_n(R)$ berukuran $n \times n$ dengan n bilangan bulat positif. Elemen dari $M_n(R)$ dinotasikan sebagai $a_{ij} \in R$ dengan i elemen pada baris dan j pada kolom. Himpunan matriks ini merupakan ring dengan operasi penjumlahan dan perkalian matriks (Dummit & Foote, 2004).

Untuk memperjelas pemahaman mengenai ring matriks, berikut diberikan beberapa contoh yang relevan.

Contoh 2.3.6 Diberikan ring $R = M_{2\times 3}(\mathbb{Z})$ yaitu himpunan semua matriks berukuran 2×3 dengan elemennya bilangan bulat.

Contoh 2.3.7 Diberikan ring $R = M_2(\mathbb{Q})$ yaitu himpunan semua matriks berukuran 2×2 dengan elemennya bilangan rasional.

2.3.2 Ring Polinomial

Suatu fungsi $f(x)$ disebut polinomial jika dapat dituliskan sebagai $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ dengan n merupakan bilangan bulat non negatif dan $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ merupakan koefisien dari $f(x)$, yaitu elemen-elemen dari suatu himpunan (Hura dkk., , 2019).

Definisi 2.3.8 Diberikan ring R. Himpunan $R[x]$ dinotasikan sebagai himpunan semua barisan tak hingga $(a_0, a_1, a_2, ...)$, dengan $a_i \in R$, untuk setiap $i = 1, 2, 3, ...$ dan terdapat $n \in \mathbb{Z}^+$ sehingga untuk setiap $k \geq n$ berlaku $a_k = 0$. Elemen-elemen $R[x]$ disebut polinomial atas R (Malik,1998).

Operasi penjumlahan dan perkalian pada $R[x]$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
&+ : R[x] \times R[x] \to R[x] \\
&(a_0, a_1, a_2, ...) + (b_0, b_1, b_2, ...) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, ...); \\
&\cdot : R[x] \times R[x] \to R[x] \\
&(a_0, a_1, a_2, ...)(b_0, b_1, b_2, ...) = (c_0, c_1, c_2, ...);
\end{aligned}$$

dengan $c_j = \sum_{i=0}^{j} a_i b_{j-i}$ untuk $j = 0, 1, 2, ...$

Dapat disimpulkan, $\langle R[x], +, \cdot\rangle$ merupakan ring dengan $(0, 0, 0, ...)$ adalah elemen netral terhadap penjumlahan, dan invers terhadap penjumlahan dari $(a_0, a_1, a_2, ...)$ adalah $(-a_0, -a_1, -a_2, ...)$. Dengan demikian, ring $R[x]$ disebut ring polinomial (Malik, 1998).

Contoh 2.3.9 Salah satu polinomial dalam $\mathbb{R}[x]$ adalah sebagai berikut:

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 5.$$

Sifat-sifat ring polinomial yaitu sebagai berikut.

a) Ring polinomial $R[x]$ tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian.

b) Identitas untuk ring polinomial adalah polinomial konstan 1.

c) Ring polinomial bersifat komutatif terhadap perkalian dan penjumlahan.

d) Operasi perkalian terdistribusi terhadap penjumlahan.

2.3.3 Ring Prima

Ring komutatif R dikatakan prima jika memenuhi definisi berikut.

Definisi 2.3.10 Diberikan ring R disebut ring prima jika $aRb = 0$, maka$a = 0$ atau $b = 0$, untuk setiap $a, b \in R$. Ring prima dinotasikan dengan R_p (Persulessy & Mahmud, 2013).

Contoh 2.3.11 Diberikan ring komutatif yang tidak memuat pembagi nol sejati dan tertentu dengan untuk setiap $x \in R$, berlaku $ax = 0$. Akan ditunjukkan R ring prima. Diketahui untuk setiap $x \in R$, berlaku $ax = 0$. Jika kedua ruas dikalikan dengan $b \in R$ dari kanan diperoleh $axb = 0$. Karena ring yang komutatif berlaku $abx = 0$ atau dapat pula ditulis $abx = 0 \cdot x$. Dengan menggunakan hukum kanselasi kanan diperoleh $ab = 0$. Karena ring yang tidak memuat pembagi nol sejati diperoleh $a = 0$ atau $b = 0$. Jadi R merupakan ring prima.

Contoh 2.3.12 Ring $\mathbb{Z}_7$ merupakan ring prima karena untuk setiap elemen tak nol dalam $\mathbb{Z}_7$ tidak ada yang bisa dikalikan dengan elemen tak nol lainnya untuk menghasilkan nol.

2.3.4 Ring Semiprima

Ring semiprima mirip dengan ring prima, tetapi dengan kondisi yang sedikit lebih lemah. Konsep ini penting dalam studi struktur ring dan teori representasi. Berikut adalah definisi ring semiprima.

Definisi 2.3.13 Diberikan ring R. R dikatakan semiprima jika untuk setiap $a \in R, aRa = 0$ berakibat $a = 0$. Ring semiprima dinotasikan dengan R_s (Persulessy & Mahmud, 2013).

Contoh 2.3.14 Diberikan ring $\mathbb{Z}_5$. Akan diselidiki $\mathbb{Z}_5$ merupakan ring semiprima. Elemen-elemen tak nol di $\mathbb{Z}_5$ adalah $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Karena $\bar{1^n} = \bar{1}$ untuk setiap n dan $\bar{2^n}$ tidak pernah menghasilkan 0 modulo 5 untuk semua n, ini juga berlaku untuk $\bar{3}$ dan $\bar{4}$. Satu-satunya elemen yang menjadi nol ketika dipangkatkan adalah nol itu sendiri. Karena $\mathbb{Z}_5$ tidak memiliki elemen nilpoten tak nol dan karena setiap ring prima adalah semiprima jadi $\mathbb{Z}_5$ merupakan ring semiprima.

2.4 Nilpoten

Nilpoten adalah istilah yang sering digunakan dalam berbagai cabang matematika, terutama dalam aljabar. Istilah ini mengacu pada elemen, matriks, atau operator yang ketika dinaikkan ke pangkat tertentu, hasilnya menjadi nol. Definisi nilpoten dapat dijelaskan dalam beberapa konteks berikut.

Definisi 2.4.1 Diberikan ring R dan $a \in R$. Elemen a disebut nilpoten jika terdapat bilangan bulat positif n sedemikian sehingga $a^n = 0$. Angka terkecil n yang memenuhi $a^n = 0$ disebut indeks nilpotensi dari a (Schmitt, 2013).

Definisi 2.4.2 Sebuah matriks persegi A dari ukuran $n \times n$ disebut nilpoten jika terdapat bilangan bulat positif k sedemikian sehingga $A^k = 0$, dengan A^k adalah hasil perkalian matriks A dengan dirinya sendiri sebanyak k kali (Khatami L, 2013).

Untuk lebih mendalami konsep nilpoten, berikut diberikan beberapa contoh yang relevan.

Contoh 2.4.3 Diberikan $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (bilangan bulat modulo 4), maka elemen 2 dalam ring ini adalah nilpoten karena $2^2 \equiv 0 \bmod 4$.

Contoh 2.4.4 Diberikan $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Karena $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, diperoleh A merupakan matriks nilpoten.

2.5 Derivasi

Di awal pembelajaran kalkulus, konsep turunan, aturan-aturannya, serta berbagai aplikasinya yang luas mulai diperkenalkan. Tidak hanya dalam bidang matematika, turunan juga memiliki peran penting dalam ilmu lain seperti fisika, teknik, dan ekonomi, yang membuktikan kegunaannya yang sangat luas.

Definisi 2.5.1 Sifat-sifat fungsi turunan, terutama aturan Leibniz yang terkenal menarik perhatian banyak matematikawan, yang didefinisikan sebagai:

$$\frac{d}{dx}(fg) = (\frac{d}{dx}f)g + f(\frac{d}{dx}g)$$

untuk setiap dua fungsi yang berbeda f dan g (Ali dkk., 2002).

Selama bertahun-tahun, ide aturan Leibniz telah banyak digunakan namun dengan notasi yang berbeda, namun idenya tetap sama. Seperti notasi yang digunakan oleh Issac Newton adalah

$$(\dot{f}\dot{g}) = \dot{f}g + f\dot{g}$$

dan oleh Lagrange,

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Untuk memperjelas pemahaman mengenai derivasi, berikut diberikan beberapa contoh derivasi.

Contoh 2.5.2 Turunan dari fungsi linear $f(x) = 3x + 2$ adalah $f'(x) = 3$.

Contoh 2.5.3 Turunan dari fungsi trigonometri $f(x) = \sin x$ adalah $f'(x) = \cos x$.

2.5.1 Derivasi pada Ring

Dalam aljabar abstrak, konsep derivasi juga berlaku pada struktur aljabar seperti ring. Secara intuitif, derivasi pada ring adalah operasi yang mirip dengan derivasi dalam kalkulus, tetapi dalam konteks lebih umum dari elemen-elemen sebuah ring.

Definisi 2.5.4 Diberikan ring R. Derivasi d dari ring R adalah pemetaan dari $d : R \to R$ yang memenuhi $d(x+y) = d(x)+d(y)$ dan $d(xy) = d(x)y+xd(y)$, untuk setiap $x, y \in R$. Pemetaan d seperti itu disebut derivasi pada R (Daigle, 2003).

Untuk memberikan gambaran yang lebih jelas mengenai derivasi pada ring, berikut merupakan contoh yang relevan.

Contoh 2.5.5 Diberikan ring polinomial $\mathbb{Z}[x]$ dan pemetaan $d : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[X]$ dengan $d(p(x)) = d(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n = p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ... + na_nx^{n-1}$ untuk setiap $p(x) \in \mathbb{Z}[X]$. Akan ditunjukkan pemetaan d merupakan derivasi pada $\mathbb{Z}[X]$.

1. Diberikan sebarang $p(x), q(x) \in \mathbb{Z}[x]$, berlaku:

$$\begin{aligned} d(p(x) + q(x)) &= \frac{d}{dx}(p(x) + q(x)) \\ &= \frac{d}{dx}p(x) + \frac{d}{dx}q(x) \\ &= d(p(x)) + d(q(x)). \end{aligned}$$

2. Diberikan sebarang $p(x), q(x) \in \mathbb{Z}[x]$, berlaku:

$$\begin{aligned} d(p(x)q(x)) &= \frac{d}{dx}(p(x)q(x)) \\ &= \frac{d}{dx}p(x)q(x) + p(x)\frac{d}{dx}q(x) \\ &= d(p(x))q(x) + p(x)d(q(x)). \end{aligned}$$

Jadi, d merupakan derivasi pada $\mathbb{Z}[x]$.

Contoh 2.5.6 Diberikan sebarang ring $M_2(\mathbb{R}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $d : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dengan $d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & -b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Akan ditunjukkan d bukan merupakan derivasi pada $M_2(\mathbb{R})$.

1. Pilih $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 1\end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, berlaku :

$$\begin{aligned} d\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 1\end{bmatrix}\right) &= d\left(\begin{bmatrix}5 & 5\\5 & 5\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}5 & -5\\0 & 0\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4 & -3\\0 & 0\end{bmatrix} \\ &= d\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\right) + d\left(\begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 1\end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

.

2. Pilih $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 1\end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

   Diperoleh:

$$\begin{aligned} d(ab) &= d\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 1\end{bmatrix}\right) \\ &= d\left(\begin{bmatrix}4+4 & 3+2\\12+8 & 9+4\end{bmatrix}\right) \\ &= d\left(\begin{bmatrix}8 & 5\\20 & 13\end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix}8 & -5\\0 & 0\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

   Di sisi lain,

$$\begin{aligned} d(a)b + ad(b) &= d\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} d\left(\begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 1\end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -3\\0 & 0\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4 & -3\\12 & -3\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}4 & -2\\12 & -3\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Karena $d(ab) \neq d(a)b + ad(b)$, d bukan merupakan derivasi pada $M_2(\mathbb{R})$.

2.5.2 Derivasi Nilpoten pada Ring

Derivasi nilpoten pada ring adalah jenis derivasi yang memiliki properti khusus ketika diterapkan beberapa kali berturut-turut pada elemen dari ring, akhirnya menghasilkan nol.

Definisi 2.5.7 Diberikan ring R dan derivasi $d : R \to R$ pada R. Derivasi d disebut nilpoten jika $d^n = 0$, untuk suatu $n \geq 0$. Bilangan bulat terkecil n yang demikian disebut nilpotensi dari d, dilambangkan dengan $n_d(R)$ (Chuang & Lee, 2005).

Berikut ini akan diberikan contoh derivasi nilpoten pada ring.

Contoh 2.5.8 Diberikan ring $M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ dan $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Pemetaan $d : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dengan $d(A) = AP - PA$, untuk setiap $A \in M_2(\mathbb{R})$. Akan ditunjukkan bahwa d merupakan derivasi nilpoten pada $M_2(\mathbb{R})$. Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, berlaku:

$$\begin{aligned} d(A) &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b & 0 \\ d - a & -b \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Karena hasil derivasi yang diperoleh bukanlah matriks nol, maka perlu dilakukan derivasi berulang hingga akhirnya menghasilkan matriks nol.

$$
\begin{aligned}
d^2(A) &= d(d(A)) \\
&= \begin{bmatrix} b & 0 \\ d-a & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 0 \\ d-a & -b \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -b & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2b & 0 \end{bmatrix}. \\
d^3(A) &= d(d^2(A)) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2b & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Dari perhitungan yang telah dilakukan menunjukkan bahwa derivasi d pada ring matriks $M_2(\mathbb{R})$ merupakan derivasi nilpoten dengan indeks 3, karena $d^3(A) = 0$ untuk setiap matriks $A \in M_2(\mathbb{R})$.

Selanjutnya akan diberikan contoh derivasi yang bukan merupakan derivasi nilpoten pada ring.

Contoh 2.5.9 Diberikan ring R. Didefinisikan $d : R[x] \to R[x]$ dengan $d(f(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) \cdot x$. Akan ditunjukkan d bukan merupakan derivasi nilpoten pada $R[x]$. Pilih $f(x) = x^3$, diperoleh:

1) $d(x^3) = \frac{d}{dx}(x^3) \cdot x = 3x^2 \cdot x = 3x^3$

2) $d^2(x^3) = d(3x^3) = \frac{d}{dx}(3x^3) \cdot x = 9x^2 \cdot x = 9x^3$

3) $d^3(x^3) = d(9x^3) = \frac{d}{dx}(9x^3) \cdot x = 27x^2 \cdot x = 27x^3$

Dalam contoh ini terlihat bahwa hasil dari derivasi tidak mencapai nol, sehingga derivasi ini bukan derivasi nilpoten pada $R[x]$.

2.5.3 Derivasi *inner* pada ring

Derivasi *inner* adalah jenis khusus dari derivasi yang didefinisikan pada ring atau aljabar. Derivasi tersebut dihasilkan oleh operasi yang tidak bersifat komutatif dengan elemen tetap dari ring tersebut. Derivasi *inner* merupakan salah satu contoh dari derivasi, yang memiliki banyak kegunaan dalam teori ring, aljabar Lie, dan struktur aljabar nonkomutatif.

Lemma 2.5.10 Diberikan sebarang ring R dengan elemen satuan dan $A \in R$. Dapat didefinisikan derivasi $d_A : R \to R$ dengan $d_A(B) = AB - BA$, untuk setiap $B \in R$. Selanjutnya, derivasi d_A disebut derivasi *inner* pada R (Ernanto, 2018).

Untuk lebih mendalami konsep derivasi *inner* pada ring, berikut diberikan contoh terkait.

Contoh 2.5.11 Diberikan sebarang ring $M_2(\mathbb{R}), B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Pemetaan $d : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dengan $d(B) = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{bmatrix}$ merupakan derivasi pada $M_2(\mathbb{R})$. Diberikan $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, didefinisikan $d_A : R \to R$, dengan $d_A(B) = AB - BA$, untuk setiap $B \in M_2(\mathbb{R})$. Akan ditunjukkan bahwa $d_A = d$ merupakan derivasi *inner* pada $M_2(\mathbb{R})$.

$$
\begin{aligned}
d_A(B) &= AB - BA \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{bmatrix} \\
&= d(B).
\end{aligned}
$$

Jadi d_A merupakan derivasi *inner* pada $M_2(\mathbb{R})$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2024/2025 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Penulis menggunakan metode penelitian studi pustaka, dengan mengumpulkan dan menganalisis bahan-bahan penelitian yang berasal dari referensi terkait, seperti jurnal dan buku. Secara garis besar, tahapan-tahapan penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mempelajari materi terkait grup, ring, matriks, ring polinomial, ring matriks, nilpoten, derivasi, derivasi *inner*, dan derivasi nilpoten.
2. Menyelidiki sifat kombinasi linear dari derivasi nilpoten pada ring matriks.
3. Menyelidiki keterkaitan derivasi *inner* pada derivasi nilpoten.
4. Menyelidiki sifat kombinasi linear dari derivasi *inner* dengan derivasi nilpoten pada ring matriks.
5. Mengilustrasikan contoh berdasarkan sifat dan teorema yang telah diperoleh.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, diperoleh bahwa derivasi nilpoten pada ring merupakan pemetaan yang menghasilkan nol setelah iterasi tertentu, dengan indeks nilpotensi n yang memenuhi $d^n(x) = 0$. Dalam ring matriks, derivasi *inner* $d_A(B) = AB - BA$ dapat bersifat nilpoten jika matriks A merupakan matriks nilpoten. Didapat juga bahwa indeks nilpotensi dari derivasi *inner* nilpoten akan lebih besar dari indeks nilpotensi matriks A. Ini menunjukkan kaitan antara derivasi *inner* dengan derivasi nilpoten. Selain itu, penelitian ini juga menemukan bahwa kombinasi linear dari derivasi *inner* nilpoten tidak selalu menghasilkan derivasi nilpoten, kecuali pada kasus khusus yaitu derivasi $d_A(B) = AB - BA$ dengan matriks B merupakan matriks identitas. Dengan demikian, penelitian ini berhasil mengkaji hubungan antara derivasi inner dan derivasi nilpoten pada ring matriks, mengidentifikasi sifat kombinasi linear derivasi *inner* nilpoten, serta menyajikan contoh yang memperkuat hasil teorema yang diperoleh.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian ini, masih terdapat beberapa aspek yang belum teridentifikasi, terutama mengenai karakteristik atau kondisi tertentu dari ring matriks yang memastikan stabilitas ideal di bawah operasi derivasi nilpoten. Oleh karena itu, disarankan untuk menyelidiki struktur ideal khusus pada ring matriks yang memungkinkan pembentukan ideal yang lebih stabil terhadap derivasi nilpoten. Selain itu, penelitian lebih lanjut juga dapat difokuskan pada aplikasi derivasi nilpoten dalam konteks aljabar Lie atau modul untuk memperluas penerapan hasil penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Ali, S., Rafiquee, N.N., Varshney, V. (2002). Certain Types of Derivations in Rings: a Survey. *J. Indones. Math. Soc*, 30(m 2), 256-306.

Andari, A. (2015). *Teori Grup*. Universitas Brawijaya Press, Yogyakarta.

Boyer., Carl B. (1972). *A History of Mathematics.* John Wiley & Sons, New York.

Cayley, A. (1858). *On the Theory of Matrices.* Cambridge, Cambridgeshire.

Chuang, C. L., Lee, T. K. (2005). Nilpotent derivations. *Journal of Algebra*, 287, 381–401.

Chung, L. O. (1985). Nil derivations. *Journal of Algebra*, 95(1), 20-30.

Daigle, D. (2003). Locally nilpotent derivations. *Lecture Notes for the 26th Autumn School of Algebraic Geometry*, Lukecin, Poland.

Dummit, D. S., Foote, R. M. (2004). *Abstract algebra*. Wiley, Hoboken.

Ernanto, I. (2018). Sifat-sifat ring faktor yang dilengkapi derivasi. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, 1(1), 12-21.

Fitriani, F., Faisol, A. (2022). *Grup*. Matematika Universitas Lampung, Lampung.

Goyal, D. R., Khurana, D. (2022). A characterisation of matrix rings. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 107(1), 95-101.

Herstein, I. N. (1996). *Abstract algebra*. John Wiley & Sons, New York.

Hura, O. L., Yanita, Y., & Bakar, N. N. (2019). Teorema Pembagian Pada Ring Polinomial $R[X]$. *Jurnal Matematika Unand*, 8(1), 249-254.

Indriati, K. (2019). *Matriks, Vektor, dan Program Linier*. Penerbit Unika Atma Jaya Jakarta.

Jacobson, N. (1956). *Structure of Rings*. American Mathematical Society, New York.

Katz., Victor J. (2008). *A History of Mathematics: An Introduction*. Pearson, London.

Khatami, L. (2013). The poset of the nilpotent commutator of a nilpotent matrix. *Linear Algebra and its Applications*, 439(12). 3763-3776.

Kline., Morris. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press, Oxford.

Malik, D.S., Moderson, J.M., Sen, M.K. (1998). *Fundamental of Abstract Algebra.* McGraw-Hill Company. New York.

Noether, E. (1921). Idealtheorie in ringbereichen. *Mathematische Annalen*, 83(1), 24-66.

Persulessy, E R., Mahmud A H. (2013). Ring Prima dan Ring Semiprima. *Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, **7**(12).1-4

Rifa'i, R. (2016). *Aljabar Matriks Dasar*. Deepublish, Jakarta.

Schmitt,A. (2013). Algebra I: Commutative Algebra (Preliminary version).

Wahyuni, S, Wijayanti, I.E., Yuwaningsih, D.A., Hartanto, A.D. (2021). *Teori Ring dan Modul*. Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.