PENENTUAN AKAR PERSAMAAN POLINOMIAL DENGAN KOEFISIEN MATRIKS

(Skripsi)

Oleh

MUHAMMAD IKHSAN HABIBI

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

ABSTRAK

PENENTUAN AKAR PERSAMAAN POLINOMIAL DENGAN KOEFISIEN MATRIKS

Oleh

Muhammad Ikhsan Habibi

Polinomial adalah salah satu persamaan dalam matematika yang memiliki satu suku atau lebih dan koefisiennya bukan nol. Persamaan polinomial yang lazim kita hadapi adalah koefisien dan variabel dalam bentuk bilangan kompleks. Di penelitian ini kita akan mencari akar persamaan polinomial tersebut, dari koefisien dan variabel yang akan dicari dalam bentuk matriks. Dengan menggunakan dua sumber utama yaitu persamaan polinomial dan matriks. Dalam menentukan suatu akar dari persamaan polinomial itu akan berbeda caranya jika variabel, konstanta dan koefisiennya dalam bentuk matriks, bukan dalam bentuk bilangan kompleks. Hasil yang diperoleh untuk mendapatkan akar persamaan dari suatu persamaan polinomial dengan koefisien, variabel atau konstanta dalam bentuk matriks akan berbeda formulanya dengan mencari akar persamaan polinomial biasa serta jumlah solusi persamaannya akan berbeda juga dengan persamaan polinomial biasa.

Kata Kunci: Persamaan polinomial, polinomial matriks, nilai eigen, vektor eigen

ABSTRACT

DETERMINING THE ROOTS OF POLYNOMIAL EQUATIONS WITH MATRIX COEFFICIENTS

By

Muhammad Ikhsan Habibi

Polynomial is an equation in mathematics that has one or more terms and whose coefficient is not zero. The polynomial equations that we commonly encounter are coefficients and variables in the form of complex numbers. In this research we will look for the roots of the polynomial equation, from the coefficients and variables that will be searched in matrix form. By using two main sources, namely polynomial equations and matrices. The method for determining the roots of a polynomial equation will be different if the variables, constants and coefficients are in matrix form, not in complex number form. The results obtained to get the roots of a polynomial equation with coefficients, variables or constants in matrix form will have a different formula from finding the roots of an ordinary polynomial equation and the number of solutions to the equation will also be different from ordinary polynomial equations.

Keywords: Polynomial equations, matrix polynomial, eigen value, vector eigen

PENENTUAN AKAR PERSAMAAN POLINOMIAL DENGAN KOEFISIEN MATRIKS

Oleh

MUHAHAMMAD IKHSAN HABIBI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

Judul Skripsi	: **PENENTUAN AKAR PERSAMAAN POLINOMIAL DENGAN KOEFISIEN MATRIKS**
Nama Mahasiswa	: *Muhammad Ikhsan Habibi*
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1917031034**
Jurusan	: **Matematika**
Fakultas	: **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.	**Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**
NIP. 19800206 200312 1 003	NIP. 19840627 200604 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**	....
Sekretaris	: **Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 19711001 200501 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **12 Juli 2024**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: **Muhammad Ikhsan Habibi**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1917031034**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **PENENTUAN AKAR PERSAMAAN POLINOMIAL DENGAN KOEFISIEN MATRIKS**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila di kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 12 Juli 2024
Penulis,

Muhammad Ikhsan Habibi
NPM. 1917031034

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Muhammad Ikhsan Habibi lahir di Natar pada tanggal 4 Januari 2001, sebagai anak pertama dari tiga bersaudara. Penulis merupakan anak dari pasangan Bapak Zulfikar dan Ibu Yulisma S.Ag.. Penulis menempuh pendidikan formal di Taman Kanak-kanak (TK) Pewa Natar pada tahun 2006-2007, melanjutkan ke Sekolah Dasar (SD) Negeri 4 Natar pada tahun 2007-2013, kemudian Sekolah Menengah Pertama (SMP) Negeri 8 Bandar Lampung pada tahun 2013-2016, dan Sekolah Menengah Atas (SMA) Negeri 7 Bandar Lampung pada tahun 2016-2019.

Pada tahun 2019 penulis terdaftar sebagai mahasiswa Program Studi S1 Matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SNMPTN. Selama menjadi mahasiswa, penulis aktif di organisasi sebagai Anggota Bidang Kaderisasi Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) periode 2020, Ketua Umum Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) periode 2021. Kemudian sebagai Gubernur Mahasiswa Badan Eksekutif Mahasiswa (BEM) FMIPA Unila periode 2022 dan Wakil Presiden Mahasiswa Badan Eksekutif Mahasiswa Universitas Keluarga Besar Mahasiswa Unila (BEM U KBM Unila)

Pada tahun 2022 penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Dinas Ketahanan Pangan, Tanaman Pangan dan Hortikultura Provinsi Lampung sebagai bentuk penerapan ilmu yang telah penulis dapatkan selama kuliah kemudian sebagai bentuk pengabdian dan pelaksanaan Tri Dharma Perguruan Tinggi, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) yang dilaksanakan pada bulan Juni hingga Agustus 2022 di Desa Simpang Kanan, Kecamatan Sumber Rejo, Kabupaten Tanggamus.

KATA INSPIRASI

"…. Sesungguhnya Allah tidak akan mengubah suatu kaum sebelum mereka mengubah keadaan sendiri…"

(QS. Ar-Rad: 11)

"Bila manusia hidup seorang diri, ia akan mati karena rindu"

(Mohammad Hatta)

"Jadilah mata air jernih yang memberikan kehidupan kepada setiap orang"

(B.J. Habibie)

"Jangan malu untuk mengatakan apapun cita-citamu di depan banyak orang selagi itu baik, karena tiap ucapan kita ada doa. Cita-cita saya menjadi Presiden Indonesia"

(Muhammad Ikhsan Habibi)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahi Rabbil'Alamin
Puji dan Syukur tiada hentinya terpanjatkan kepada Allah SWT atas ridhonya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
Kupersembahkan karya kecil dan sederhana ini kepada:

Orang Tua dan Adik-adik Tercinta

Terima kasih Ayah Ibu, dan Adik-adikku atas kasih sayang, dukungan, motivasi, nasihat dan doa yang tidak berhenti sampai saat ini, karena doa dan didikan kalianlah yang membawaku bertahan dan kuat sampai sejauh ini.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terima kasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan kritik dan saran serta ilmu yang berharga.

Sahabat - Sahabatku

Kepada sahabat-sahabatku yang selalu memberikan keceriaan, semangat dan doa serta kenangan canda tawa selama masa perkuliahan.

Almamater Tercinta, Universitas Lampung

SANWACANA

Puji Syukur ke hadirat Allah SWT, atas segala rahmat dan karunianya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**Penentuan Akar Persamaan Polinomial dengan Koefisien Matriks**". Dalam menyelesaikan skripsi ini, penulis mendapat dukungan, bimbingan, motivasi, saran dan bantuan dari beberapa pihak sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik. Oleh karena itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc., selaku Pembimbing I dan Sekretaris Jurusan Matematika yang selalu bersedia memberikan kesediaan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan dan dukungan yang sangat membangun sehingga penulis selalu dipermudah dalam proses penyelesaian skripsi ini.
2. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc., selaku Pembimbing II yang telah memberikan waktunya untuk memberi bimbingan serta saran selama proses penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku dosen Pembahas dan Ketua Jurusan Matematika yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat lebih baik lagi.
4. Bapak Prof. Drs. Mustofa Usman MA., Ph.D., selaku dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan arahan dan bantuannya dalam masa perkuliahan sehingga penulis dapat menyelesaikan perkuliahan dengan baik.
5. Bapak Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Seluruh dosen, staf serta karyawan Jurusan Matematika dan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang telah memberikan ilmu, wawasan dan pengetahuan yang berharga bagi penulis selama proses perkuliahan berlangsung.

7. Teruntuk Orang Tua saya, Ayah Zulfikar dan Ibu Yulisma S.Ag. serta saudara kandung saya, Muhammad Rasya Al Farizi dan Muhammad Zidane Ar Rasyid yang tiada henti mengirimkan doa, semangat, nasihat, dan juga terima kasih sudah selalu ada disisi penulis mendampingi penulis sampai dititik ini. Gelar ini kupersembahkan untuk kalian.
8. Teman-teman Angkatan 2019 yang telah membantu saya selama di perkuliahan.
9. Teman Seperjuangan Lathoif, Aris, Surya dan Fiqih manusia-manusia yang bersedia menemani bermain pes, memberikan banyak tawa, selalu mengulurkan tangan ketika penulis kesulitan, serta memberikan banyak momen sekaligus pelajaran hidup selama perkuliahan.
10. Kepada Sahabat Siddiq, Fajri, Aryo, Kelvin, Billa dll di grup Alumni Tukang Remed setiap langkah di dalamnya dipenuhi dengan doa dan motivasi dari kalian.
11. Lathoif, Norick Ali, dan Fikri teman-teman seperbimbingan yang berjuang bersama, membantu, dan menyemangati satu sama lain.
12. Kepada Nisa sebagai pengingat dan menjadi salah satu alasan saya tetap berjuang untuk keluarga dan Indonesia.
13. Abang yunda dan teman-teman HIMATIKA, BEM FMIPA Unila, dan BEM U KBM Unila 2019 & 2020 atas proses-proses yang telah diberikan.
14. Lathoif, Rehsya, Prihatini, Asti, Anggita, Pimpinan dan Pengurus HIMATIKA FMIPA Unila 2021 yang telah berjuang bersama-sama dan memberikan kesan terbaik.
15. Dwiky, Ani, Fegi, Erlisa, Rizka, Pimpinan dan Pengurus BEM FMIPA Unila 2022 memberikan banyak kenangan dan pelajaran.
16. Soleh, Lusi, Nida, Pimpinan dan Pengurus BEM U KBM Unila 2023.
17. Masyarakat yang telah saya temui dan mendoakan yang terbaik selama berproses 5 tahun di kampus serta Rakyat Indonesia.

Bandar Lampung, 12 Juli 2024
Penulis

Muhammad Ikhsan Habibi
NPM. 1917031034

DAFTAR ISI

I. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang dan Masalah

Polinomial adalah salah satu persamaan dalam matematika yang memiliki satu suku atau lebih dan koefisiennya bukan nol (Barbeau, 2003). Polinomial adalah fungsi matematika yang melibatkan perkalian, perpangkatan, dan nilai variabel. Untuk mencari akar persamaan polinomial , diperlukan untuk mencari nilai variabel yang mempunyai nilai fungsi 0 ($f(x) = 0$). Ada beberapa metode untuk mencari akar persamaan tersebut. Dalam menyelesaikan persamaan polinomial untuk mencari akar persamaannya itu menggunakan pemfaktoran, rumus abc, metode perpaduan pembagian, metode bagi dua dan metode Newton. Dalam perkembangan ilmu aljabar, matriks (*Matrix*) adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan di dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks (Anton,2004). Matriks digunakan untuk menyelesaikan masalah matematika, seperti persamaan linear, transformasi linear dan lain-lain.

Persamaan polinomial yang lazim kita hadapi adalah koefisien dan variabel dalam bentuk bilangan kompleks. Di penelitian ini kita akan mencari akar persamaan polinomial tersebut, dari koefisien dan variabel yang akan dicari dalam bentuk matriks $n \times n$. Dengan menggunakan dua sumber utama yaitu persamaan polinomial dan matriks, serta literatur yang lain, maka penulis termotivasi melakukan penelitian ini untuk membahas persamaan polinomial dengan koefisien dalam bentuk matriks $n \times n$, khususnya matriks dengan ordo $n \times n$ yang bertujuan mengetahui cara mencari akar-akar persamaan dari persamaan polinomial dengan koefisien dalam bentuk matriks $n \times n$, $n = 2,3,4$.

1.2. **Tujuan Penelitian**

Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan akar persamaan polinomial dalam dengan koefisien dalam bentuk matriks $n \times n$, untuk $n = 2,3,4$.

1.3. **Manfaat Penelitian**

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah :

1. menambah wawasan dalam mencari akar-akar persamaan polinomial dengan koefisien dalam bentuk matriks $n \times n$, untuk $n = 2,3,4$.
2. sebagai bahan materi lanjutan untuk mengkaji lebih dalam tentang persamaan polinomial dengan koefisien matriks $n \times n$, untuk $n = 2,3,4$.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Dalam menentukan akar persamaan polinomial dengan koefisien yang berbentuk matriks melibatkan dua hal penting, yakni materi matriks dan persamaan polinomial. Pada bab ini akan dijelaskan dasar-dasar tentang matriks dan persamaan polinomial yang akan digunakan sebagai acuan untuk menunjang proposal penelitian ini.

2.1 Matriks

Matriks (*matrix*) adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan di dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks. (Anton, 2004).

Contoh 2.1.1

Berikut diberikan beberapa contoh matriks :

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \sqrt{3} \\ e & -2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$.

Ukuran matriks ditentukan dengan jumlah baris (arah horizontal) dan jumlah kolom (arah vertikal) yang dimiliki. Sebagai contoh, matriks pertama pada Contoh 2.1.1 memiliki satu baris dan empat kolom, maka ukuran dari matriks nomor 1 adalah 1 kali 4 (Jika ditulis 1×4). Penulisan ukuran matriks, bilangan pertama menunjukkan jumlah baris dan bilangan kedua menunjukkan jumlah kolom. Matriks lainnya di Contoh 2.1.1 , memiliki ukuran berturut-turut $1 \times 4, 3 \times 2, 2 \times 1, 3 \times 3,$ dan 1×1.

Dalam menulis suatu matriks, disimbolkan menggunakan huruf kapital dalam menyatakannya dan huruf kecil untuk menyatakan kuantitas numeriknya, kita dapat menulis

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \text{ atau } D = \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}$$

Entri yang terletak pada baris i dan kolom j di dalam matriks A akan dinyatakan sebagai a_{ij}. Jadi, matiks 2×3 dapat ditulis sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

matriks bentuk umum $m \times n$ sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

2.2 Operasi Matriks

Selanjutnya dipelajari matriks-matriks dapat dioperasikan seperti penjumlahan, pengurangan dan perkalian. Namun, perlu dipahami kesetaraan matriks.
Dua matriks akan disebut setara jika keduanya mempunyai ukuran dan entri-entri yang bersesuaian itu sama, dinotasikan dengan $A = B$. (Anton, 2004)

Diberikan $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ dan $B \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

Dikarenakan ukuran matriks A dan B sama, yakni 2×2 serta entri-entri yang bersesuaian itu sama. Jadi, matriks A dan B setara.

Dalam pengoperasian penjumlahan dan pengurangan matriks, ada satu syarat yang harus terpenuhi. Dengan syarat, jika terdapat dua matriks yang akan dijumlahkan atau dikurangkan, kedua matriks harus memiliki ordo atau ukuran yang sama.

Contoh 2.2.1

Diberikan matriks-matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 3 \\ 9 & 1 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \text{ dan } C = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dengan ukuran matriks A, B dan C berurutan yakni $2 \times 3, 2 \times 3, \text{dan } 2 \times 2.$ Dikarenakan A dan B memiliki ukuran yang sama, maka A dan B dapat dijumlahkan ataupun dikurangkan.

$$A - B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 3 \\ 9 & 1 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -4 \\ 8 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 3 \\ 9 & 1 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 6 & 10 \\ 10 & 3 & 11 & 4 \\ 3 & 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}.$$

Untuk pengoperasian $A + C, B + C, A - C,$ dan $B - C$ tidak terdefinisi dikarenakan ukuran matriks yang berbeda.

Jika A adalah matriks $m \times p$ dan B adalah matriks $p \times n$ maka hasilkali AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya akan dijelaskan dalam contoh. Untuk mencari entri pada baris i dan j dari AB, pisahkan baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Setelah itu, kalikan entri-entri yang bersesuaian lalu jumlahkan hasil yang ada.

Contoh 2.2.2

Diberikan matriks-matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 2 \\ 9 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dikarenakan A adalah matriks 2×3 dan B adalah matriks 3×4, maka hasil dari perkalian AB adalah matriks yang berukuran 2×4. Untuk menentukan, misalnya entri dari AB pada baris 1 dan kolom 1, dapat dipisahkan baris 1 dari A dan kolom 1 dari B. Kemudian, kalikan entri-entri yang bersesuaian dan menjumlahkan hasilnya kalinya.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 2 \\ 9 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix}$$

maka $AB = \begin{bmatrix} 17 & 14 & 8 & 9 \\ 59 & 10 & 9 & 20 \end{bmatrix}$

Diberikan skalar k. Perkalian matriks A dengan skalar k adalah mengalikan setiap entri-entri matriks A dengan k.

Jika $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

maka $$kA = k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}.$$

Contoh 2.2.3

Jika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 6 \\ 8 & 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } k = 3\ ,$$

maka

$$3A = \begin{bmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 5 & 3\cdot 0 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot 1 & 3\cdot 6 \\ 3\cdot 8 & 3\cdot 1 & 3\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 0 \\ 12 & 3 & 18 \\ 24 & 3 & 12 \end{bmatrix}.$$

2.3 Determinan

Suatu hasil kali elementer (*elementer product*) dari suatu matriks A, $n \times n$, adalah hasilkali entri-entri dari A, yang tidak berasal dari baris atau kolom yang sama (Anton, 2000).

Setiap matriks yang berbujursangkar memiliki skalar yang disebut dengan determinan, dengan dilambangkan $\det(A)$ atau $|A|$ atau

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Determinan matriks berordo 2×2 dan 3×3 akan didefinisikan sebagai berikut:

1. $\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

2. $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) -$

$(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$

Contoh 2.3.1

Akan ditentukan determinan dari

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh

$$\det(A) = (5)(-2) - -3(2) = -10 + 6 = -4$$

$$\det(B) = (-2)(4) - (5)(-3) = -8 + 15 = 7$$

Contoh 2.3.2

Akan ditentukan determinan dari

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$$

Diperoleh

$$\det(C) = (45 + 84 + 96) - (105 - 48 - 72) = 240 \ .$$

2.4 Basis dan Dimensi

Definisi 2.4.1

Jika V adalah suatu ruang vektor sebarang dan $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah suatu himpunan vektor-vektor pada V, maka S disebut ***Basis*** untuk V jika dua syarat berikut berlaku:

a) S bebas linear
b) S merentang V (Anton, 2004)

Suatu basis adalah generalisasi ruang vektor dari suatu sistem koordinat pada ruang berdimensi 2 dan ruang berdimensi 3.

Contoh 2.4.1

Misalkan $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$ maka himpunan $S = \{e_1, \; e_2, e_3, \dots, e_n\}$ adalah sebuah basis bagi R^n sebab:

1. S bebas linear

   Bukti:

$$k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3 + \dots + k_ne_n = 0$$
$$(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n) = (0, 0, 0, \dots, 0)$$
$$k_1 = k_2 = k_3 = \dots = k_n = 0$$

2. S merentang V

   Bukti:

   Misalkan

   $v = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n)}$ adalah sembarang vektor pada R^n maka

$$v = (v_1, 0, 0, \dots, 0) + (0, v_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, 0, 0, \dots, v_n)$$
$$v = v_1(1, 0, 0, \dots, 0) + v_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + (0, 0, 0, \dots, 1)$$
$$v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3 + \dots + v_ne_n$$

Teorema 2.4.1

Jika $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah suatu basis dari ruang vektor V, maka setiap vektor v pada V dapat dinyatakan dalam bentuk $v = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$ dengan tepat satu cara (Anton, 2004).

Dalam teorema dalam disimpulkan bahwa semua basis untuk V harus memiliki jumlah vektor yang sama dengan basis sebarang S. Penjelasan tersebut akan menghasilkan teorema

Teorema 2.4.2

Semua basis untuk ruang vektor berdimensi terhingga memiliki jumlah vektor yang sama (Anton, 2004).

Penjelasan ini secara tidak langsung menyatakan bahwa semua basis untuk R^n akan memiliki n vektor. Secara intuitif, R^n adalah berdimensi n. Jadi, untuk ruang-ruang vektor yang telah dikenal, jumlah vektor pada suatu baris adalah sama dengan dimensinya.

Definisi 2.4.2

Dimensi adalah ruang vektor V yang berdimensi terhingga, dinotasikan dengan dim (V), didefinisikan sebagai banyaknya vektor-vektor pada suatu basus untuk V. Selain itu, didefinisikan ruang vektor nol sebagai berdimensi nol.

Contoh 2.4.2

Diberikan ruang solusi sistem homogen yang akan dicari basis dan dimensinya

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0$$
$$-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0$$
$$x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

Jadi, akan dibentuk dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

lalu dieliminasi dengan Gaus-Jordan dan menghasilan matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & - & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh $x_4 = 0,\ x_3 = -x_5,\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0$. Jika $x_2 = s$ dan $x_5 = t$, maka $x_3 = -t$ dan $x_1 = -s - t$. Solusi umunya: $x_1 = -s - t,\ x_2 = s, x_3 = -t, x_4 = 0$ dan $x_5 = t$.

Dalam bentuk vektor dapat ditulis:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s - t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jadi, diperoleh $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sebagai basis dan memiliki dimensi 2.

2.5 Rank dan Nulitas

Dimensi-dimensi dari ruang baris, ruang kolom, dan ruang *null* suatu matriks merupakan bilangan penting, sehingga terdapat sejumlah notasi dan istilah yang berkaitan.

Definisi 2.5.1

Dimensi umum dari ruang baris dan ruang kolom dari suatu matriks A disebut sebagai rank dari A dan dinyatakan sebagai $\mathrm{rank}(A)$; dimensi ruang nul dari A disebut sebagai nulitas dari A dan dinyatakan sebagai $\mathrm{nulitas}(A)$ (Anton, 2004).

Contoh 2.5.1

Diberikan suatu matriks

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

akan ditentukan rank dan nulitas.

Bentuk eselon baris tereduksi dari A adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Karena terdapat dua baris tak nol, ruang baris dan ruang kolom keduanya berdimensi dua, sehingga $rank(A) = 2$. Untuk menentukan nulitas dari A, harus ditentukan dimensi dari ruang solusi sistem linear $Ax = 0$. Sistem persamaan yang sesuai adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 - 4x_3 - 28x_4 - 37x_5 + 13x_6 = 0$$

$$x_2 - 2x_3 - 12x_4 - 16x_5 + 5x_6 = 0$$

atau diselesaikan variabel-variabel utamanya

$$x_1 = 4x_3 + 28x_4 + 37x_5 - 13x_6$$

$$x_2 = 2x_3 + 12x_4 + 16x_5 - 5x_6 \ .$$

Jadi, solusi umum yang didapatkan adalah

$$x_1 = 4r + 28s + 37t - 13u$$

$$x_2 = 2r + 12s + 16t - 5u$$

$$x_3 = r$$

$$x_4 = s$$

$$x_5 = t$$

$$x_6 = u$$

atau secara ekuivalen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 28 \\ 12 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 37 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} -13 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Keempat vektor membentuk basis untuk ruang solusi, sehingga $\text{nulitas}(A) = 4$.

2.6 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor taknol x pada R^n disebut dengan vektor eigen (*eigenvector*) dari A jika Ax adalah sebuah kelipatan skalar dari x, yaitu:

$$Ax = \lambda x$$

untuk skalar λ. Skalar λ disebut nilai eigen (*eigenvalue*) dari A, dan x disebut sebagai vektor eigen dari A dari yang terkait dengan λ (Anton, 2004).

Contoh 2.6.1

Vektor $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

Terkait dengan nilai eigen $\lambda = 3$, karena

$$AX = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3x$$

Untuk memperoleh nilai eigen dari sebuah matriks A, $n \times n$, dapat dituliskan lembali $Ax = \lambda x$ sebagai

$$Ax = \lambda I x$$

atau secara ekuivalen,

$$(Ax - A)x = \mathbf{0}\ .$$

Agar mendapatkan λ menjadi nilai eigen, maka harus terdapat satu solusi tak nol dari persamaan. Persamaan memiliki solusi taknol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - A) = 0\ .$$

Persamaan ini disebut dengan persamaan karakteristik matriks A: sklar-skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai-nilai eigen dari A. Determinan $\det(\lambda I - A)$ adalah sebuah polinomial p dalam variabel λ yang disebut sebagai polinomial karakeristik.

Contoh 2.6.2

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, akan dicari nilai eigen dari matriks A.

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & 3 \\ 2 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda(\lambda - 1) - 6 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$$

maka, $\lambda = 3$ dan $\lambda = -2$.

2.7 Diagonalisasi

Sebuah matriks bujur sangkar A dikatakan dapat didiagonalisasi (*diagonalizable*) jika terdapat sebuah matriks P yang dapat dibalik sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP$ adalah sebuah matriks diagonal; matriks P dikatakan mendiagonalisasi (*diagonalize*) A. (Anton, 2004)

Teorema 2.7.1

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka kedua pernyataan berikut ini adalah ekuivalen.

a. $\boldsymbol{A}$ dapat didiagonalisasi
b. $\boldsymbol{A}$ memiliki n vektor eigen yang bebas linear (Anton, 2004)

Bukti Karena A diasumsikan dapat didiagonalisasi, maka terdapat sebuah matriks yang dapat dibalik

Dengan

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{bmatrix},$$

sedemikian sehingga $P^{-1}AP$ adalah diagonal, maka dikatakan $P^{-1}AP = D$, dengan

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Karena $P^{-1}AP = D$ bahwa $AP = PD$, sehingga

$$AP = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 p_{m1} & \lambda_2 p_{m2} & \cdots & \lambda_n p_{mn} \end{bmatrix}$$

Jika diberikan $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ untuk menotasikan vektor-vektor kolom dari matriks P maka urutan kolom-kolom AP adalah $\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \dots, \lambda_n p_n$. Karena P dapat dibalik, vektor-vektor kolomnya semua taknol; sehingga $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eign dari A, dan $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ adalah vektor eigen yang terkait. Karena P dapat dibalik, maka $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ bebas linear. Dengan demikian, A memiliki n vektor eigen yang bebas linear.

Contoh 2.7.2

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ akan ditentukan sebuah matriks P yang dapat mendiagonalisasi matriks A.

Persamaan karakteristik matriks A adalah $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$, didapatkan dengan cara mencari determinan dari A.

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$$

akan difaktorkan menjadi $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$, sehingga nilai-nilai eigen dari A adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$.

Diberikan

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

adalah sebuah vektor eigen dari matriks A yang terkait dengan λ jika dan hanya jika x adalah sebuah solusi nontrivial dari $(\lambda I - A)x = 0$, yaitu

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jika $\lambda = 2$, maka

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Misalkan $x_1 = -s,\ x_2 = t,\ x_3 = s$. Sehingga, vektor eigen dari A yang terkait dengan $\lambda = 2$ adalag vektor-vektor taknol yang berbentuk

$$x = \begin{bmatrix} -s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Karena

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{dan} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bebas linear, vektor-vektor ini membentuk sebuah basis untuk ruang eigen yang terkait dengan $\lambda = 2$.

Jika $\lambda = 1$, maka menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Misalkan $x_1 = -2s,\ x_2 = s,\ x_3 = s$. Sehingga, vektor eigen dari A yang terkait dengan $\lambda = 1$ adalag vektor-vektor taknol yang berbentuk

$$\begin{bmatrix} -2s \\ s \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

adalah sebuah basis dari $\lambda = 1$.

Setelah mendapatkan basis-basis tersebut, matriks A dapat didiagonalisai dan

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mendiagonalisasi A.

Bukti

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.8 Persamaan Polinomial

Polinomial menjadi salah satu bahasan penting dalam skripsi ini, dalam penyelesaiannya akan diberikan persamaan polinomial dengan pangkat n, dengan $n = 2$.

Definisi 2.8.1

Polinomial adalah salah satu persamaan dalam matematika yang memiliki satu suku atau lebih dan koefisiennya bukan nol. (Barbeau, 2003).

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

dengan $f(x)$ adalah fungsi persamaannya, a_n adalah koefisien, x adalah variabel yang akan dicari, n adalah pangkat tertinggi (bilangan cacah), dan a_0 adalah konstanta. Akar persamaan polinomial adalah nilai dari x variabel yang mempunyai nilai $f(x) = 0$. Jadi, bila nilai x dimasukkan dalam persamaan, hasilnya adalah nol. Ada beberapa cara menyelesaikan persamaan polinomial yakni menggunakan pemfaktoran, rumus abc, metode perpaduan pembagian, metode bagi dua dan metode Newton.

Contoh-contoh polinomial berdasarkan derajat polinomial adalah sebagai berikut:

a. Polinomial kuadrat (*quadratic polynomial)* yaitu polinomial dengan nilai pangkat tertinggi adalah 2

$$f(x) = x^2 + 11x \quad + 24 = 0$$

b. Polinomial kubik (*cubic polynomial)* yaitu polinomial dengan nilai pangkat tertinggi adalah 3,

$$f(x) = 3x^3 + 9x^2 + 12x + 6 = 0$$

c. Polinomial kuatrik (*quatric polynomial)* yaitu polinomial dengan nilai pangkat tertinggi adalah 4,

$$f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 8x + 3$$

d. Polinomial berderajat n yaitu polinomial dengan nilai pangkat teringgi berderajat n,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$ (Harris & Stocker, 1998).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2023/2024 dan bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian kajian teori mengenai persamaan polinomial dalam bentuk matriks. Pada penelitian ini digunakan yaitu sebagai berikut

1. Studi literatur yang diperoleh dari jurnal, buku dan artikel ilmiah yang berkaitan dengan penelitian ini.
2. Mengkaji definisi dan teorema yang berhubungan dengan permasalahan pada penelitian

Adapun langkah-langkah yang dilakukan untuk mencapai tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. menentukan beberapa persamaan polinomial dengan koefisien bentuk matriks $n \times n$, untuk $n = 2,3,4$ yang dapat didiagonalisasi;
2. menentukan vektor eigen dari persamaan tersebut;
3. mencari nilai eigen dengan persamaan karakteristik dari persamaan polinomial tersebut;
4. menentukan akar-akar persamaan dengan nilai eigen yang didapatkan.

V. SIMPULAN DAN SARAN

5.1 Simpulan

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan maka diperoleh kesimpulan untuk mendapatkan akar persamaan dari suatu persamaan polinomial dengan koefisien, variabel atau konstanta dalam bentuk matriks akan berbeda formulanya dengan mencari akar persamaan polinomial biasa.

Pada penelitian ini telah dikaji bahwa jumlah akar persamaannya itu akan berbeda dengan persamaan polinomial biasa. Seperti yang diketahui bahwa jumlah akar persamaan biasa akan mengikuti jumlah pangkat n dari pangkat yang terbesar di suatu persamaan polinomial.

5.2 Saran

Penulis memberikan saran untuk penelitian selanjutnya pembaca dapat menentukan untuk solusi yang tidak dapat didiagonalisasi, persamaan dengan pangkat yang lebih besar dan persamaan yang lebih rumit.

DAFTAR PUSTAKA

Andrianto, H. dan Prijono, A. 2006. *Menguasai Matriks dan Vektor*. Bandung : Rekayasa Sains.

Anton, H. dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer.* Jakarta : Penerbit Erlangga.

Anton, H. dan Rorres, C. 2000. *Elementary Linear Algebra.* New York : Penerbit No Starch Press.

Darmawan, W. E. dan Antonius E. S. 2017. *Menemukan Akar Persamaan Polinomial Menggunakan Particle Swarm Optimization*.

Fuchs, D. and Schwarz, A. 1996. *A Matix Vieta Theorem*, E. B. Dynkin Seminar, Amer. Math. Soc. Transl. Ser 2 169.

Gelfand I. and Retakh V. 1996. *Noncommutative Vieta Theorem and Symmetric Functions*. Gelfand Mathematical Seminars 1993-95, Birkhauser.

Gelfand, I. and Retakh V. 1997. *Quasideterminants, I,* Selecta Math 3 no. 4.

Gohberg, I, Lancaster, P. , and Rodman, L., 1982. *Matrix polynomials*. Academic Press.

Harris J. W. & Stocker H. 1998. *Handbook of Mathematics and Computational Science.* Springer Science & Business Media.

Lancaster P. and Rodman L. 1995. *Algebraic Riccati Equations*. Clarendon Press

Lipschutz, S. & Lipson, M. 2005. *Scaum's Outlines Aljabar Linear. Diterjemahkan oleh Refina I.* Jakarta : Erlangga.

Ruminta. 2009. *Matriks Persamaan Linear dan Pemograman Linear*, Jakarta : Rekayasa Sains.

Setiadji. 2008. *Aljabar Linear*. Yogyakarta : Graha Ilmu.

Wilson, R. L. 1999. *Polynomial equations over matrices*. Departemen of Mathematics, Rutgers University. New Jersey.