PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN *BURGERS INVISCID* 2 DIMENSI SPASIAL DENGAN METODE BEDA HINGGA MENGGUNAKAN PEMROGRAMAN *PYTHON*

(SKRIPSI)

Oleh
PATRICIA CRISTINA WATI

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

ABSTRAK

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN *BURGERS INVISCID* 2 DIMENSI SPASIAL DENGAN METODE BEDA HINGGA MENGGUNAKAN PEMROGRAMAN *PYTHON*

Oleh

Patricia Cristina Wati

Persamaan *Burgers* merupakan suatu kasus persamaan diferensial parsial yang banyak digunakan untuk memodelkan berbagai fenomena fisika, salah satu contohnya adalah dinamika fluida. Pada fluida terdapat efek viskositas yang dapat mempengaruhi solusi persamaan *Burgers*, persamaan *Burgers* yang tidak dipengaruhi efek viskositas disebut persamaaan *Burgers inviscid*. Dalam tulisan ini sistem persamaan *Burgers inviscid* dengan 2 dimensi spasial akan diselesaikan dengan metode beda hingga skema FTBS melalui tahapan diskritisasi, analisis kekonvergenan dan hasilnya berupa grafik akan disimulasikan menggunakan pemograman *Python* yang menunjukan solusi konvergen yang stabil bergerak menuju 1 pada $u_{i,j}^{n+1}$ dan $v_{i,j}^{n+1}$ dengan kondisi awal yang diplih dan kondisi batas *Dirichlet.*

Kata kunci: persamaan *Burgers inviscid*, metode beda hingga, pemorogramanan *Python.*

ABSTRACT

SOLUTION OF THE 2 SPATIAL DIMENSIONS INVISCID BURGERS EQUATION SYSTEM USING THE FINITE DIFFERENCE METHOD WITH PYTHON PROGRAMMING

By

Patricia Cristina Wati

Burgers equation is a case of a partial differential equation widely used to model various physical phenomena, one example being fluid dynamics. In fluids, there is a viscosity effect that can influence the solution of the Burgers' equation. The Burgers' equation that is not influenced by viscosity effects is called the inviscid Burgers' equation. In this paper, the inviscid Burgers' equation system with 2 spatial dimensions will be solved using the finite difference method with the FTBS scheme through the stages of discretization, convergence analysis, and the results will be simulated as graphs using Python programming which shows a convergent solution moving towards 1 for $u_{i,j}^{n+1}$ and $v_{i,j}^{n+1}$ with the chosen initial conditions and Dirichlet boundary conditions.
.

Keywords: inviscid Burgers equation, finite difference method, Python programming.

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN *BURGERS INVISCID* 2 DIMENSI SPASIAL DENGAN METODE BEDA HINGGA MENGGUNAKAN PEMROGRAMAN *PYTHON*

Oleh

PATRICIA CRISTINA WATI
2017031085

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

Judul Skripsi : **PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN *BURGERS INVISCID* 2 DIMENSI SPASIAL DENGAN METODE BEDA HINGGA MENGGUNAKAN PEMOGRAMAN *PYTHON***

Nama Mahasiswa : *Patricia Cristina Wati*

Nomor Pokok Mahasiswa : **2017031085**

Jurusan : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.	**Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si.**
NIP. 19700831 199903 1 002	NIP. 19930601 201903 2 021

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 19740316 200501 1 001

Dipindai dengan CamScanner

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

   Ketua : **Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** ....

   Sekretaris : **Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si.** ....

   Penguji
   Bukan Pembimbing : **Prof. Dr. Lazakaria S.Si., M.Sc.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
   Universitas Lampung

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS LAMPUNG
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 19711001 200501 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **08 Oktober 2024**

Dipindai dengan CamScanner

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: **Patricia Cristina Wati**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **2017031085**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN *BURGERS INVISCID* 2 DIMENSI SPASIAL DENGAN METODE BEDA HINGGA MENGGUNAKAN PEMOGRAMAN *PYTHON***

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila di kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 08 Oktober 2024
Penulis,

Patricia Cristina Wati
NPM. 2017031085

Dipindai dengan CamScanner

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Patricia Cristina Wati, lahir di Jakarta Timur, Jakarta pada tanggal 17 Maret 2002. Penulis merupakan anak kedua dari dua bersaudara dari pasangan Bapak Jontar Siahaan dan Ibu Duma Rohani Hutagalung.

Penulis mengawali pendidikan di Taman Kanak-Kanak (TK) Tunas Tulip pada tahun 2007-2008 dan menempuh pendidikan dasar di SD N Pasirangin 02 pada tahun 2008-2014. Kemudian penulis melanjutkan jenjang pendidikannya di SMP N 01 Cileungsi pada tahun 2014-2017 dan Sekolah Menengah Atas di SMA N 01 Cileungsi pada tahun 2017-2020. Setelah itu penulis diterima sebagai mahasiswi Program Studi S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN) pada tahun 2020.

Selama menjadi mahasiswi, penulis aktif di beberapa kegiatan di antaranya: aktif dalam kepengurusan organisasi UKM-U Penelitian Unila sebagai anggota Seksi Informasi dan Komunikasi pada tahun 2022 dan *English Society of University Lampung* sebagai anggota *Creative and Finance Departement* dan pada tahun 2023.

Kemudian pada bulan Januari 2023 s/d Februari 2023 penulis melaksanakan Praktik Kerja Lapangan (PKL) di PT TASPEN Persero KCU Bandar Lampung. Selanjutnya pada bulan Juni-Agustus 2023, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Tanjung Pandan, Kecamatan Bangun Rejo, Kabupaten Lampung Tengah, Provinsi Lampung. Lalu pada bulan Agustus-Desember 2023, penulis mengikuti kegiatan MSIB dengan *role AI Enginer* di Dit. Jen DIKTI.

KATA INSPIRASI

“Takut akan Tuhan adalah permulaan pengetahuan tetapi orang bodoh menghina hikmat dan didikan.”

(Amsal 1:7)

“Bekerjalah, sebab Aku ini menyertai kamu, demikian firman Tuhan semesta alam.”

(Hagai 2: 5c)

"Apapun juga yang kamu perbuat, perbuatlah dengan segenap hatimu seperti untuk Tuhan dan bukan untuk manusia."

(Kolose 3:23)

"Anak yang bebal menyakiti hati ayahnya, dan memedihkan hati ibunya."

(Amsal 17:25)

"Dia memberi kekuatan kepada yang lelah dan menambah semangat kepada yang tidak berdaya."

(Yesaya 40:29)

PERSEMBAHAN

Segala puji syukur dan kemuliaan bagi Tuhan Yesus Kristus, yang selalu menyertai penulis melalui banyaknya pergumulan yang tak dapat penulis mengerti, meskipun harus terjadi tiada pernah ditinggalkan-Nya sendirian sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi ini yang penulis persembahkan kepada

Kedua orang tua terkasih

Terimakasih atas perjuangan dan pengorbanannya dalam memenuhi kebutuhan keluarga yang membuat penulis bisa sampai pada pencapaian ini, melalui doa, nasihat serta segala bentuk dukungan yang diberikan pada penulis.

Bapak Ibu Dosen

Terima kasih kepada dosen pembimbing, pembahas, serta seluruh dosen Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung atas ilmu dan nasihat yang diberikan kepada penulis, serta nilai-nilai luhur yang tidak ternilai harganya.

Sahabat-sahabat

Terima kasih kepada sahabat-sahabat dan teman seperjuangan penulis atas kebersamaan, pengalaman, kenangan, dukungan, dan motivasi yang sangat berharga selama masa perkuliahan.

.

SANWACANA

Puji syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena atas berkat, kasih, dan anugerah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Penyelesaian Sistem Persamaan *Burgers Inviscid* 2 Dimensi Spasial dengan Metode Beda Hingga menggunakan Pemograman *Python*".

Terselesaikannya skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak, baik langsung maupun tidak. Oleh karena itu, pada kesempatan kali ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing I atas kesediaannya untuk memberikan waktu, bimbingan, motivasi, arahan, dan masukan dalam proses penyelesaian skripsi ini.
2. Ibu Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si. selaku Pembimbing II yang telah memberikan dukungan, arahan, masukan, dan waktunya untuk membimbing dalam proses penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Prof. Dr. Lazakaria S.Si., M.Sc. selaku Pembahas yang telah memberikan evaluasi, masukan, serta kritik yang membangun kepada penulis selama penyusunan skripsi ini.
4. Bapak Prof. Dr. Lazakaria S.Si., M.Sc. selaku dosen Pembimbing Akademik.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
6. Bapak Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.
7. Seluruh dosen, staf, dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

8. Diri sendiri yang telah mau berproses dan bertahan menjalani setiap suka maupun duka di dunia perkuliahan hingga meraih gelar Sarjana Matematika.
9. Kedua orang tua penulis Bapak Jontar Siahaan dan Ibu Duma Rohani Hutagalung, kakak kandung Geby Wita, dan adik kandung penulis Goshua Gerrad Zetro serta seluruh keluarga yang selalu mendoakan, memberikan nasihat, dan dukungan kepada penulis.
10. Sahabat baik penulis, yaitu Martha Magdalena Sihombing, Regina Anastasya, Dian Aulia Wati, dan Rizka Khairunnisa yang selalu menemani, memberikan motivasi, semangat, dan dukungan kepada penulis.
11. Grace Naomi Pangaribuan, Intan Dani Situmorang, Grace Kristy Purba selaku teman persekutuan rohani yang telah menemani, menjadi tempat bertukar pikiran, serta memberikan motivasi dan semangat kepada penulis.
12. Teman-teman seperjuangan di Jurusan Matematika angkatan 2020.
13. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang telah banyak membantu memberikan pemikiran demi kelancaran dan keberhasilan penyusunan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua.

Bandar Lampung,08 Oktober 2024
Penulis,

Patricia Cristina Wati
NPM. 2017031085

Dipindai dengan CamScanner

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Persamaan differensial parsial (PDP) adalah persamaan yang melibatkan suatu fungsi beserta turunannya dan merupakan persamaan differensial untuk fungsi yang memiliki lebih dari satu variabel bebas (Utomo, 2016). PDP memodelkan banyak fenomena fisika, seperti fenomena transportasi, dinamika fluida, dan transmisi gelombang. PDP dapat diklasifikasikan berdasarkan orde, linearitas, dan jenisnya. Orde PDP menunjukkan orde tertinggi dari turunan parsial yang muncul dalam persamaan tersebut. Salah satu penerapan persamaan diferensial parsial pada fluida adalah dengan menggunakan persamaan *Burgers.*

Persamaan *Burgers* pertama kali diperkenalkan oleh Harry Bateman pada tahun 1915 dan kemudian dikembangkan oleh Johannes Martinus Burgers pada tahun 1948. Karena itu, persamaan ini sering juga dinamakan sebagai persamaan Bateman-*Burgers* (Bukhari, dkk., 2023). Berdasarkan karakteristik viskositasnya persamaan *Burgers* dibagi menjadi 2 jenis, yaitu persamaan *Burgers viscid* dan persamaan *Burgers inviscid*.

Persamaan *Burgers* dapat diselesaikan secara analitik (Kuo & Lee, 2015). Akan tetapi, yang menjadi persoalan dari penyelesaian secara analitik adalah tingkat kesulitan yang meningkat seiring kompleksitas persamaan *Burgers* yang akan diselesaikan, dan hasilnya tidak secara langsung menghasilkan solusi berupa nilai (angka) yang diinginkan (Bukhari, dkk. 2023). Oleh karena itu, metode numerik merupakan metode yang paling umum digunakan menyelesaikan masalah-masalah persamaan diferensial.

Penelitian terkait penyelesaian persamaan *Burgers* secara analitik maupun numerik telah banyak dilakukan. Ihsan, dkk. (2021) melakukan penelitian untuk mencari solusi persamaan *Burgers inviscid* dengan metode pemisahan variabel dan melakukan simulasi solusi persamaan tersebut dengan menggunakan *software Maple18*. Pada tahun 2023, Bukhari, dkk. melakukan penelitian tentang implementasi persamaan *Burgers* dengan metode beda hingga dalam bahasa pemrograman *Julia*. Penelitian ini mengkaji penyelesaian persamaan *Burgers* bentuk *viscid* 1 dimensi secara analitik dan numerik yang kemudian hasilnya ditampilkan dalam bentuk plot untuk menggambarkan solusi dengan nilai N_x yang berbeda. Sari, dkk. (2023) meneliti terkait solusi hampiran yang dapat mendekati solusi eksak persamaan *Burgers* dengan metode dekomposisi adominan *Laplace*.

Beberapa peneliti terdahulu menyelesaikan kasus persamaan *Burgers viscid* dan *inviscid* dengan menggunakan berbagai metode numerik. Pada tahun 2010, Aboiyar menggunakan spline pelat tipis dalam konstruksi metode volume hingga non-*oscillatory* untuk persamaan *Burgers inviscid* yang merupakan *prototipe* hukum kekekalan nonlinier. Untuk menangkap fitur tajam yang terjadi selama simulasi numerik, metode ini diimplementasikan pada triangulasi adaptif. Christabella & Mungkasi, (2020) melakukan penelitian terhadap beberapa metode volume hingga standar untuk menyelesaikan persamaan *Burgers*. Selain itu, Putra & Izzaturrahman, (2020) menyelesaikan persamaaan *Burgers inviscid* 2 dimensi dengan membuat diskritisasi spasial menggunakan metode interpolasi transfinit (TFI) dan menyelesaikan diskritisasi tersebut dengan metode *Lax*.

Pada penelitian ini akan dilakukan penyelesaian persamaan *Burgers* secara numerik dengan memanfaatkan salah satu metode numerik. Penulis menggunakan metode beda hingga untuk menyelesaikan persamaan *Burgers inviscid* 2 dimensi. Dalam menyelesaikan persamaan tersebut penulis akan menyimulasikan penyelesaian persamaan *Burgers* dengan metode beda hingga pada bahasa pemrograman *Python*.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mencari bentuk diskrit sistem persamaan *Burgers inviscid* 2 dimensi spasial dengan metode beda hingga.
2. Menganalisis kekonvergenan metode FTBS.
3. Menghitung solusi numerik sistem persamaan *Burgers inviscid* 2 dimensi spasial.
4. Melakukan simulasi solusi numerik persamaan ke dalam bentuk *syntax* menggunakan bahasa pemrograman *Python* .

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menambah pengetahuan dan wawasan terkait bentuk diskrit sistem persamaan *Burgers inviscid* 2 dimensi spasial dalam penyelesaian menggunakan metode beda hingga.
2. Menjadi referensi bagi penelitian selanjutnya terkait syarat kestabilan dan penentuan konsistensi dari sistem persamaan *Burgers inviscid* 2 dimensi spasial.
3. Mengetahui cara menghitung dan memperoleh solusi numerik dari sistem persamaan *Burgers inviscid 2* dimensi spasial.
4. Mendapatkan bentuk ilustrasi dari penyelesaian sistem persamaan *Burgers inviscid* 2 dimensi spasial dengan metode beda hingga.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah persamaan yang memfokuskan pada hubungan antara sebuah fungsi yang belum diketahui $u(x, x_2, \dots x_n)$ berdimensi $n \geq 2$, dan turunan parsial fungsi terhadap variabel-variabel bebasnya (Gunawan, 2021). Bentuk umum dari PDP adalah sebagai berikut.

$$F\left(x_1,\ x_2, \dots,\ x_{n,}\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots,\ \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_1}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_n}, \dots\right) = 0 \qquad (2.1)$$

PDP umumnya memiliki variabel bebas yang mewakili ruang dan/atau waktu. Variabel bebas untuk ruang biasanya dinotasikan (x, y, z) atau jika melibatkan variabel waktu menjadi (x, y, z, t). Menurut Gunawan (2021), terdapat beberapa konsep dasar yang ada pada PDP, yakni orde, *homogenous*, dan linearitas.

1. Kehomogenan

   Persamaan diferensal parsial (PDP) dengan fungsi yang belum diketahui (u) dikatakan tak homogen jika dalam persamaan PDP-nya terdapat *term*/fungsi lain yang tidak bergantung pada fungsi u. Sebagai contoh persamaan yang homogen adalah persamaan *Laplace* sebagai berikut.

   $$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0 \qquad (2.2)$$

   Sedangkan, persamaan *Poisson* pada persamaan (2.3) merupakan persamaan tak homogen karena ada fungsi $f(x, y)$ yang tidak bergantung pada fungsi $u(x, y)$.

   $$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = f(x, y\ ) \qquad (2.3)$$

2. Orde

   Orde dari PDP ditentukan oleh orde turunan tertinggi yang terdapat dalam persamaan tersebut. Secara umum, dapat dituliskan persamaan umum PDP orde satu untuk (x, y) sebagai:

$$F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) = F\big(x, y, u, u_x, u_y\big) = 0 \tag{2.4}$$

   Sedangkan untuk PDP orde dua adalah:

$$F\big(x, u, u_x, u_{y,} u_{xx}, u_{yy}\big) = 0 \tag{2.5}$$

3. Linearitas

   PDP dapat ditulis dalam bentuk sebagi berikut.

$$\mathfrak{L}(u) = 0 \tag{2.6}$$

   Dengan $\mathfrak{L}$ disebut sebagai sebuah operator. Operator $\mathfrak{L}$ dikatakan linier jika memenuhi persamaan (2.7).

$$\mathfrak{L}(u + v) = \mathfrak{L}u + \mathfrak{L}v, \text{ dan } \quad \mathfrak{L}(cu) = c\mathfrak{L}u, \tag{2.7}$$

   untuk setiap fungsi u, v, dan kostanta c.

2.2 Persamaan *Burgers*

Bonkile, dkk. (2018) menyampaikan bahwa pada tahun 1915, Harry Bateman (1882-1946), seorang matematikawan Inggris, memperkenalkan persamaan diferensial parsial dalam jurnalnya beserta kondisi awal dan kondisi batas yang diberikan pada persamaan (2.8) - (2.10).

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = s\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ 0 < x < L, \ 0 < t < \tau \tag{2.8}$$

$$u(x, 0) = \psi(x), \ 0 < x < L \text{ , dan} \tag{2.9}$$

$$u(0, t) = \zeta_1(t), \ u(L, t) = \zeta_2(t), \ 0 < t < \tau. \tag{2.10}$$

Dengan u, x, t dan s masing-masing adalah kecepatan, koordinat spasial, waktu, dan viskositas kinematik. ψ, ζ_1, dan ζ_2 adalah fungsi variabel yang ditentukan tergantung pada kondisi spesifik untuk masalah yang ingin diselesaikan.

Kemudian pada tahun 1948, Johhanes Martinus Burgers (1985-1981), seorang fisikawan Belanda menjelaskan secara matematis pemodelan turbulensi dengan bantuan persamaan (2.8). Burgers kemudian menjadi salah satu tokoh terkemuka di bidang mekanika fluida. Untuk menghormati kontribusi Burgers, persamaan ini dikenal dengan nama persamaan *Burgers*.

Berdasarkan karakteristik viskositas fluida yang dimodelkan, persamaan *Burgers* dapat dibagi menjadi persamaan *Burgers viscid* dan persamaan *Burgers inviscid*. Persamaan *Burgers* dikatakan *inviscid* jika persamaan tidak bergantung pada konstanta viskositas atau $s = 0$. Namun, jika bergantung pada konstanta viskositas dinamakan persamaan *Burgers viscid* (Derickson, 2000).

2.3 Persamaan *Burgers Inviscid*

Pada persamaan *Burgers* ketika istilah difusi dihilangkan, persamaan *Burgers viscid* menjadi persamaan *Burgers inviscid*. Persamaan *Burgers inviscid* merupakan kasus khusus dari persamaan gelombang nonlinear di mana kecepatan gelombang adalah u, dengan u adalah variabel terikat yang bergantung pada variabel bebas yaitu x dan variabel waktu yaitu t (Ripai, dkk. 2019).

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad x \,\epsilon\, \mathbb{R} - \{0\}, t > 0 \tag{2.11}$$

Dengan kondisi awal $u(x, 0) = f(x)$.

Persamaan (2.11) merupakan persamaan 1 dimensi untuk Persaamaan *Burgers inviscid*, sedangkan persamaan *Burgers inviscid* 2 dimensi bentuk umumnya:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \; v\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + \; v\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.13}$$

Dengan kondisi awal yang digunakan dalam penelitian ini sebagai berikut:

$$u(x, y, 0) = \begin{cases} 2 \text{ jika } 0.5 \leq \mathrm{x} \leq 1 \text{ dan } 0.5 \leq \mathrm{y} \leq 1 \\ 1 \quad \text{selainnya} \end{cases}$$

$$v(x, y, 0) = \begin{cases} 2 \text{ jika } 0.5 \leq \mathrm{x} \leq 1 \text{ dan } 0.5 \leq \mathrm{y} \leq 1 \\ 1 \quad \text{selainnya} \end{cases}$$

serta kondisi batas *Dirichlet* sebagai berikut:

$$u(0, y, t) = 1, u(2, y, t) = 1, u(x, 0, t) = 1, u(x, 2, t) = 1$$
$$v(0, y, t) = 1, v(2, y, t) = 1, v(x, 0, t) = 1, v(x, 2, t) = 1$$

2.4 Dimensi Spasial (Ruang)

Dimensi dari suatu PDP adalah banyaknya variabel bebas spasial (Maulidi, 2018). Pada penelitian ini x dan y adalah variabel bebas, dengan x adalah koordinat dalam arah horizontal dan y adalah koordinat dalam arah vertikal merupakan koordinat spasial yang mendefinisikan posisi dalam bidang dua dimensi. Oleh karena itu, pada setiap titik (x, y) dalam ruang dua dimensi, dimiliki kecepatan fluida (u dan v) yang dapat berubah seiring waktu (t).

2.5 Deret *Taylor*

Purcell dan Vanberg (1987) menjelaskan bahwa Deret *Taylor* merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalm metode numerik, terutama untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Persaman deret *Taylor* dari $y = f(x)$ di sekitar x_0, y_0adalah sebagai berikut:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (2.14)$$

Asal dari persamaan (2.14) adalah sebagai berikut:

$$f(x) \quad = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$
$$f'(x) \;\; = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots$$
$$f''(x) \; = 2a_2 + 3(2a_3(x - x_0)) + 4(2a_4(x - x_0)^2) + \cdots$$
$$f'''(x) = 3(2a_3) + 4(2a_4(x - x_0)) + \cdots$$
$$\vdots$$
$$f^n(x) = n!\,(a_n) + (n + 1)!\,a_{n+1}(x - x_0) + (n + 2)a_{n+2}(x - x_0)^2 + \cdots$$

Kemudian, pada fungsi awal dan fungsi-fungsi turunan tersebut, jika ditetapkan $x = x_0$ maka:

$$f(x_0) = a_0$$
$$f'(x_0) = a_1$$
$$f''^{(x_0)} = 2!\, a_2$$
$$f'''^{(x_0)} = 3!\, a_3$$
$$\vdots$$
$$f^n(x_0) = n!\, a_n$$

Dengan demikian nilai a_0, a_1, a_2, a_3 dan seterusnya menunjukan bahwa deret *Taylor* dapat dibuktikan seperti pada persamaan (2.14).

Menurut Chapra dan Canale (1988), jika terdapat fungsi dari dua variabel independen u dan v, maka deret *Taylor* dapat ditulis sebagai berikut:

$$f(u_{i+1}, v_{i+1}) = f(u_i, v_i) + \frac{\partial f}{\partial u}(u_{i+1} - u_i) + \frac{\partial f}{\partial v}(v_{i+1} - v_i) + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u_{i+1} - u_i)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u_{i+1} - u_i)(v_{i+1} - v_i) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(v_{i+1} - v_i)^2\right] + \ldots \quad (2.15)$$

Dengan semua turunan parsial dihitung pada titik *i*. Jika semua suku orde kedua dan yang lebih tinggi diabaikan, maka persamaan (2.29) dapat disederhanakan untuk:

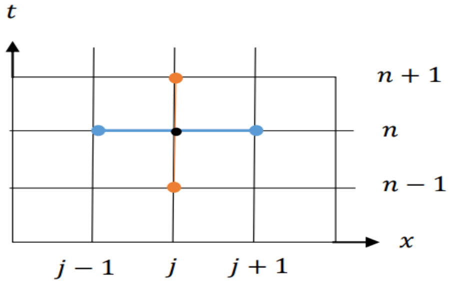
$$\Delta f(\bar{u}, \bar{v}) = \left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| \Delta\bar{u} + \left|\frac{\partial f}{\partial v}\right| \Delta\bar{v} \quad (2.16)$$

Dengan $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ masing-masing adalah taksiran galat-galat dalam u dan v.

2.6 Metode Beda Hingga

Metode beda hingga adalah suatu metode yang sangat populer dalam penyelesaian persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial, yang mempunyai dasar pada ekspansi deret *Taylor* (Strauss, 2007). Metode beda hingga dapat digunakan untuk mendekati nilai suatu titik sebagai turunan dari titik lainnya dengan memanfaatkan deret *Taylor*. Pendekatan menggunakan deret *Taylor* ini dapat dilakukan dari arah kiri, kanan, dan pusat yang biasa disebut dengan beda maju, beda mundur, dan beda pusat (Sasongko, 2010).

Perhatikan gambar 2.1 untuk lebih memahami beda maju, beda mundur, dan beda pusat.



Gambar 2.1 Stensil pada sumbu x dan t.

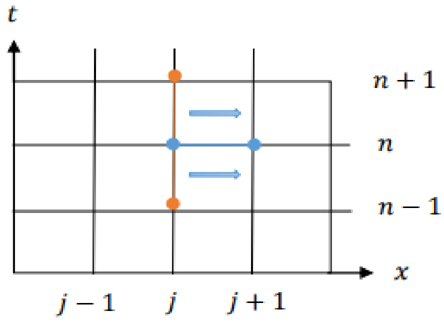
Ridlo (2022) menjelaskan tentang ketiga metode pendekatan tersebut sebagai berikut:

1. Metode Beda Maju

   Berdasarkan pada Gambar 2.1, bentuk metode beda maju ditampilkan dalam bentuk dua arah sebagai berikut:

   a. Metode beda maju pada ruang (x)

      Untuk menghitung perubahan fungsi, dapat digunakan titik di sebelah kanan j. Hal ini berguna ketika kita bergerak maju dari j ke $j+1$ seperti pada gambar dibawah ini.



Gambar 2.2 Metode beda maju pada ruang (x).

Berdasarkan gambar di atas didapatkan turunan sebagai berikut:

i) Turunan pertama

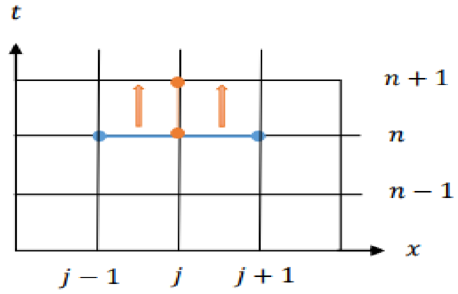
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \tag{2.17}$$

ii) Turunan kedua

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j^n = \frac{u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + u_j^n}{(\triangle x)^2} \tag{2.18}$$

b. Metode beda maju pada waktu (t)

Untuk menghitung perubahan fungsi, dapat digunakan titik di atas n. Hal ini berguna ketika kita bergerak maju dari n ke $n+1$ seperti pada gambar dibawah ini.



Gambar 2.3 Metode beda maju pada waktu (t).

Berdasarkan Gambar 2.3 didapatkan turunan sebagai berikut:

i) Turunan pertama

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \tag{2.19}$$

ii) Turunan kedua

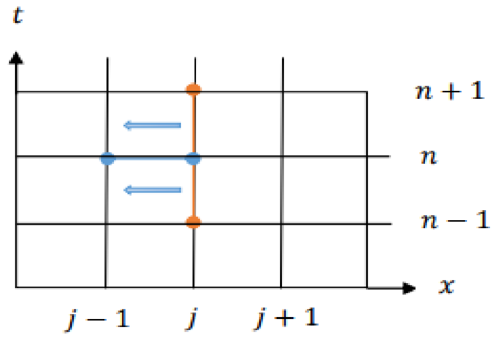
$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_j^n = \frac{u_j^{n+2} - 2u_j^{n+1} + u_j^n}{(\Delta t)^2} \tag{2.20}$$

2. Metode Beda Mundur

Berdasarkan pada Gambar 2.1, bentuk metode beda mundur ditampilkan dalam bentuk dua arah sebagai berikut:

a. Metode beda mundur pada ruang (x)

Untuk menghitung perubahan fungsi, dapat digunakan titik di sebelah kiri j. Hal ini berguna ketika kita bergerak mundur dari j ke $j-1$.



Gambar 2.4 Metode beda mundur pada ruang (x).

Berdasarkan Gambar 2.4 didapatkan turunan pertama dan kedua sebagai berikut:

i) Turunan pertama

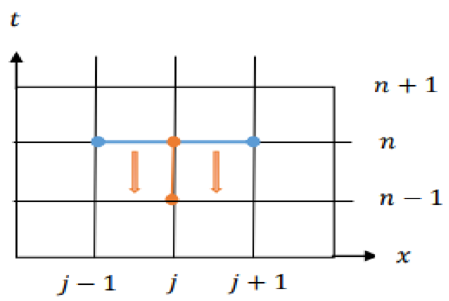
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j^n = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta_x} \tag{2.21}$$

ii) Turunan kedua

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j^n = \frac{u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{(\Delta x)^2} \tag{2.22}$$

b. Metode beda mundur pada waktu (t)

Untuk menghitung perubahan fungsi, dapat digunakan titik di bawah n. Hal ini berguna ketika kita bergerak mundur dari n ke $n-1$.



Gambar 2.5 Metode beda mundur pada waktu (t).

Berdasarkan gambar di atas didapatkan turunan sebagai berikut:

i) Turunan pertama

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_j^n = \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \tag{2.23}$$

ii) Turunan kedua

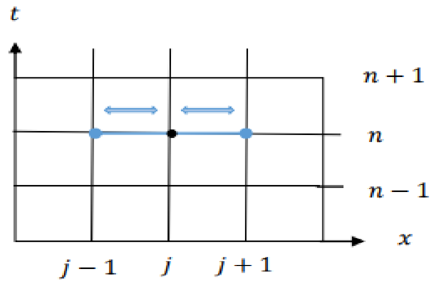
$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_j^n = \frac{u_j^n - 2u_j^{n-1} + u_j^{n-2}}{(\Delta t)^2} \tag{2.24}$$

3. Metode Beda Pusat

Berdasarkan pada Gambar 2.2, bentuk metode beda pusat ini ditampilkan dalam bentuk dua arah sebagai berikut:

a. Metode beda pusat pada ruang (x)

Untuk menghitung rata-rata perubahan fungsi, dapat digunakan titik di sebelah kiri dan kanan j_i. Hal ini memberikan aproksimasi yang lebih simestris.



Gambar 2.6 Metode beda pusat pada ruang (x).

Berdasarkan gambar di atas didapatkan turunan sebagai berikut:

i) Turunan pertama

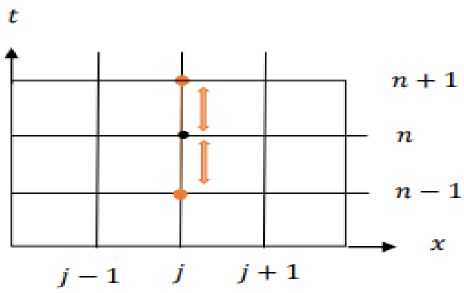
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \tag{2.25}$$

ii) Turunan kedua

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j^n = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{2.26}$$

b. Metode beda pusat pada waktu (t)

untuk menghitung rata-rata perubahan fungsi, dapat digunakan titik di atas dan bawah n untuk menghitung rata-rata perubahan fungsi. Hal ini memberikan aproksimasi yang lebih simestris



Gambar 2.7 Metode beda pusat pada waktu (t).

Berdasarkan Gambar 2.7 didapatkan turunan sebagai berikut:

i) Turunan pertama

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \tag{2.27}$$

ii) Turunan kedua

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} \tag{2.28}$$

2.7 Metode *Forward Time Backward Space* (FTBS)

Metode FTBS mengombinasikan pendekatan maju dalam waktu (*forward time*) dan pendekatan mundur dalam ruang (*backward space*) untuk menghitung solusi dari persamaan *Burgers inviscid* 2 dimensi pada persamaan (2.12) dan (2.13). Dalam skema FTBS, turunan waktu didekati menggunakan beda maju:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t} \tag{2.29}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t} \tag{2.30}$$

Turunan ruang menggunakan beda mundur dapat diperoleh dari:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i,j}^{n} - u_{i-1,j}^{n}}{\Delta x} \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_{i,j}^{n} - u_{i,j-1}^{n}}{\Delta y} \tag{2.32}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \approx \frac{v_{i,j}^{n} - v_{i-1,j}^{n}}{\Delta x} \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} \approx \frac{v_{i,j}^{n} - v_{i,j-1}^{n}}{\Delta y} \tag{2.34}$$

Sehingga diperoleh formulasi skema FTBS:

1. Untuk komponen u

$$\frac{u_{i\cdot j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t} + u_{i,j}^{n} \frac{u_{i,j}^{n} - u_{i-1,j}^{n}}{\Delta x} + v_{i,j}^{n} \frac{u_{i,j}^{n} - u_{i,j-1}^{n}}{\Delta y} = 0$$

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} - \Delta t \left(u_{i,j}^{n} \frac{u_{i,j}^{n} - u_{i-1,j}^{n}}{\Delta x} + v_{i,j}^{n} \frac{u_{i,j}^{n} - u_{i,j-1}^{n}}{\Delta y} \right) \tag{2.35}$$

2. Untuk komponen v

$$\frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^{n}}{\Delta t} + u_{i,j}^{n} \frac{v_{i,j}^{n} - vi_{i-1,j}^{n}}{\Delta x} + v_{i,j}^{n} \frac{v_{i,j}^{n} - v_{i,j-1}^{n}}{\Delta y} = 0$$

$$v_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^{n} - \Delta t \left(u_{i,j}^{n} \frac{v_{i,j}^{n} - v_{i-1,j}^{n}}{\Delta x} + v_{i,j}^{n} \frac{v_{i,j}^{n} - v_{i,j-1}^{n}}{\Delta y} \right) \tag{2.36}$$

Dengan :

Δx = ukuran *grid* atau jarak antar titik grid dalam arah x.

Δy = ukuran *grid* atau jarak antar titik grid dalam arah x.

Δt = interval waktu atau langkah waktu antara waktu n dengan $n+1$ atau n dengan $n-1$.

$u_{i,j}^{n}$ dan $v_{i,j}^{n}$ = nilai komponen kecepatan *u* titik grid (i,j) pada waktu ke-*n*.

$u_{i,j}^{n+1}$ dan $v_{i,j}^{n+1}$ = nilai komponen kecepatan *u* dan *v* pada titik grid (i,j) pada waktu ke-$n+1$.

$u_{i-1,j}^{n}$dan $v_{i-1,j}^{n}$ = nilai komponen kecepatan *u* dan *v* pada titik grid yang sebelumnya (di arah *x*) $(i,j-1)$ pada waktu ke-n.

$u_{i,j-1}^{n}$dan $v_{i,j-1}^{n}$ = nilai komponen kecepatan *u* dan *v* pada titik grid yang sebelumnya (di arah *y*) $(i,j-1)$ pada waktu ke-n.

2.8 Analisis Kekonvergenan Skema Numerik

Teorema ekuivalensi *Lax* menyatakan ntuk sebuah persamaan diferensial dan masalah nilai awal yang *well-possed*, jika suatu persamaan beda konsisten dan stabil, maka persamaan beda tersebut konvergen (Pratama, dkk. 2021). Kriteria konvergensi yang dipakai adalah kondisi CFL (*Courant Friedrich Lewy)* pada persamaan

$$C = U\frac{\Delta t}{\Delta X} \tag{2.37}$$

dengan:

U = karakteristik kecepatan dari sistem

Δt = langkah waktu(*time step*) dalam simulasi

ΔX = ukuran grid spasial dalam arah x atau y

Kondisi CFL tersebut akan disubtitusikan kedalam skema FTBS untuk dilakukan analasis:

1. Kestabilan

   Penerapan suatu metode numerik pada suatu PDP menghasilkan suatu persamaan beda hingga (PBH). Solusi numerik dari PBH tidak selalu sama dengan solusi analitik dari suatu PDP. Suatu PBH dikatakan stabil jika solusi yang dihasilkannya terbatas, sehingga analisis kestabilan diperlukan saat merumuskan suatu PBH (Hoffmann, 2000).

Dalam menganalisis kestabilan suatu PBH, terdapat beberapa metode yang dapat diterapkan, dalam penelitian ini metode analisis kestabilan yang digunakan yaitu melalui pendekatan terhadap solusi numerik yang diperoleh melalui pemilihan panjang grid tertentu. Sebuah PBH dari sebuah PDP dikatakan stabil jika:

$$\left|\frac{u_{i,j}^{n+1}}{u_{i,j}^{n}}\right| = \left|\frac{\rho^{n+1}e^{I(K\Delta xi+L\Delta yj)}}{\rho^{n}e^{I(K\Delta xi+L\Delta yj)}}\right| = |\rho| \leq 1 \quad (2.37)$$

Jika untuk nilai $\Delta x,\ \Delta y,$ dan Δt tertentu memenuhi $|\rho| \leq 1$ dikatakan stabil bersyarat dan jika untuk semua nilai $\Delta x, \Delta y,$ dan Δt memenuhi $|\rho| \leq 1$ dikatakatakan stabil tak bersyarat (Noye, 2000).

Pada tahun 2023, Prasetyo memaparkan formula *Euler* untuk sudut negatif θ ,yaitu:

$$e^{-I\theta} = cos(-\theta) + sin(-\theta) = cos\,\theta - Isin\theta \quad (2.38)$$

$$e^{-I\omega} = cos(-\omega) + sin(-\omega) = cos\,\omega - Isin\omega \quad (2.39)$$

Dengan cosinus adalah fungsi genap $cos(-\theta) = cos\,\theta$, dan sinus adalah fungsi ganjil $sin(-\theta) = -sin\theta$ .Pada proses analisis kestabilan pada penelitian ini akan digunakan identitas *Euler* dengan mendefinisikan $\theta = K\Delta x$ dan $\omega = L\Delta y$.

2. Konsistensi

Istilah konsistensi mangacu pada kenyataan bahwa solusi dengan PBH adalah pendekatan dari solusi analitik yang diharapkan dari PDP, bukan solusi dari persamaan yang lain . Secara matematis konsistensi PBH dapat dinyatakan sebagai berikut: Misalkan PDP adalah persamaan diferensial parsial, dan PBH merupakan persamaan beda hingga yang merupakan pendekatan terhadap PDP. Suatu PBH dikatakan konsisten terhadap PDP yang didekati jika $(\Delta x, \Delta y, \Delta t) \rightarrow 0$ (Noye, 2000).

2.9 Analisis Galat

Menurut Munir (2008), analisis galat sangat penting di dalam perhitungan yang menggunakan metode numerik. Galat berasosiasi dengan seberapa dekat solusi hampiran terhadap solusi sejatinya. Misalkan $\hat{a}$ adalah nilai hampiran terhadap nilai sejati a, maka galat dapat dihitung dengan persamaan (2.33).

$$\varepsilon = a - \hat{a} \tag{2.40}$$

Sebagai contoh, jika $\hat{a} = 10.5$ adalah nilai hampiran dari $a = 10.45$, maka galatnya adalah $\varepsilon = -0{,}0.1$. Secara umum, terdapat dua sumber utama penyebab galat dalam perhitungan numerik:

1. Galat pemotongan (*truncation error*)

   Galat yang terjadi akibat penggunaan pendekatan sebagai bahan pengganti formula eksak. Istilah "pemotongan" muncul karena banyak metode numerik yang diperoleh dengan mendekati fungsi menggunakan deret *Taylor*. Karena deret *Taylor* bersifat tak berhingga, maka pendekatan deret *Taylor* ini dilakukan dengan menghentikan/memotong derert sampai suku orde tertentu saja. Penghentian suatu deret atau runtunan langkah-langkah komputasi yang tidak berhingga menjadi runtutan langkah yang berhingga itulah yang menimbulkan galat pemotongan.

2. Galat pembulatan (*round-off error*)

   Perhitungan dengan metode numerik hampir selalu menggunakan bilangan riil. Masalah timbul bila komputasi numerik dikerjakan oleh mesin (dalam hal ini komputer) karena semua bilangan riil tidak dapat disajikan secara tepat di dalam komputer. Keterbatasan komputer dalam menyajikan bilangan riil menghasilkan galat yang disebut galat pembulatan. Sebagai contoh $\frac{1}{6} = 0.166666666$ ... tidak dapat dinyatakan secara tepat oleh komputer karena digit 6 panjangnya tidak terbatas.

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada Semester Genap tahun akademik 2023/2024 dan bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan studi literatur yang diperoleh dari buku, jurnal, atau media lain. Pada penelitian ini, metode yang digunakan adalah metode beda hingga. Adapun langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Diskristisasi persamaan *Burgers inviscid* 2 dimensi spasial, kondisi awal, dan kondisi batas dengan menggunakan metode beda hingga skema FTBS.
2. Analisis konvergensi
   a. Menganalisis dan menentukan syarat kestabilan dengan metode *Von Neumann.*
   b. Menganalisis konsistensi dari sistem persamaan burgers 2 dimensi spasial dengan ekspansi deret *Taylor* terhadap skema FTBS.
3. Menghitung solusi numerik secara manual untuk beberapa komponen dengan mensubtitusikan nilai dari kondisi awal dan batas, serta menentukan nilai $\Delta x, \Delta y,$ dan Δt yang memenuhi syarat kestabilan.

4. Melakukan simulasi dengan bahasa pemograman *Python* dan menginterpretasikan hasil solusi numerik persamaan *Burgers inviscid* 2 dimensi spasial serta menganalis pertumbuhan *error*.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Skema numerik FTBS sistem persamaan *Burgers inviscid 2* dimensi spasial memiliki bentuk diskrit :

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} - \Delta t \left(u_{i,j}^{n} \frac{u_{i,j}^{n} - u_{i-1,j}^{n}}{\Delta x} + v_{i,j}^{n} \frac{u_{i,j}^{n} - u_{i,j-1}^{n}}{\Delta y} \right)$$

$$v_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^{n} - \Delta t \left(u_{i,j}^{n} \frac{v_{i,j}^{n} - v_{i-1,j}^{n}}{\Delta x} + v_{i,j}^{n} \frac{v_{i,j}^{n} - v_{i,j-1}^{n}}{\Delta y} \right)$$

2. Metode beda hingga skema FTBS pada persamaan *Burgers inviscid 2* dimensi bersifat stabil dengan syarat kestabilan:

$$0 \leq C_x + C_y \leq \frac{1}{2}$$

   dan konsisten dengan orde *truncation error* $O(\Delta t)^2, O(\Delta x)^2, O(\Delta y)^2$. Sehingga berdasarkan teorema ekuivalensi *Lax* maka sistem persamaan *Burgers inviscid* 2 dimensi spasial dengan kondisi awal dan kondisi batas yang dipilih dikatakan konvergen.

3. Hasil solusi numerik yang diperoleh didapatkan dengan mensubtitusikan kondisi awal dan kondisi batas dengan memilih nilai dari $\Delta x = \Delta y = 0.4$ dan $\Delta t = 1$ bernilai 1 saat x,y berada pada kondisi batas *Dirichlet* atau t berada pada kondisi awal.

4. Simulasi solusi numerik menunjukan persamaan *Burgers inviscid* 2 dimensi yang stabil dan bergerak menuju satu dalam selang waktu Δt dengan nilai yang sama pada $u_{i,j}^{n+1}$ dan $v_{i,j}^{n+1}$.

5.2 Saran

Untuk memverikasi atau memvalidasi solusi numerik dari penelitian ini memerlukan solusi lain sebagai pembanding, untuk itu penelitian selanjutnya bisa dilakukan penyelesaian sistem persamaan sistem *Burgers inviscid* 2 dimensi spasial menggunakan metode analitik atau metode numerik lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Aboiyar, T. 2010. An adaptive finite volume method using thin plate splines for the numerical simulation of the inviscid Burgers' equation. *African Journal of Mathematics and Computer Science Research*, *3*(8), 147-154.

Bukhari, F., Nurdiati, S., Julianto, M. T., Najib, M. K., & Valentdio, R. H. 2023. Implementasi Penyelesaian Persamaan Burgers dengan Metode Beda Hingga dalam Bahasa Pemrograman Julia. *MILANG Journal of Mathematics and Its Applications*, 19(1): 1–9.

Bonkile, M. P., Awasthi, A., Lakshmi, C., Mukundan, V., & Aswin, V. S. 2018. A systematic literature review of Burgers' equation with recent advances. *Pramana*, *90*, 1-21.

Christabella, B. L., & Mungkasi, S. 2020. Unjuk Kerja Beberapa Metode Volume Hingga untuk Persamaan Burgers. *Prosiding Seminar Nasional Sains Teknologi dan Inovasi Indonesia (SENASTINDO)* . 2: 323-330.

Derickson, R. G., & Pielke Sr, R. A. 2000. A preliminary study of the Burgers equation with symbolic computation. *Journal of Computational Physics*, 162(1), 219-244.

Feng, B. F., & Mitsui, T. 1998. A finite difference method for the Korteweg-de Vries and the Kadomtsev-Petviashvili equations. *Journal of computational and applied mathematics*, 90(1), 95-116.

Gunawan, P. H. 2021. *Pengantar Diferensial: untuk Sains dan Teknik*. Jogjakarta: Sastrabook Indonesia.

Hoffmann, K. A., & Chiang, S. T. 2000. *Computational fluid dynamics volume I.* Wichita. Engineering education system.

Ihsan, H., Side, S., Iqbal, M., Matematika, J., Universitas, F., & Makassar, N. 2021. Solusi Persamaan *Burgers Inviscid* dengan Metode Pemisahan Variabel. *In Journal of Mathematics* .(4) 2. http://www.ojs.unm.ac.id/jmathcos

Kuo, C. K., & Lee, S. Y. 2015. A new exact solution of *Burgers*' equation with linearized solution. *Mathematical Problems in Engineering*. 2015(414808): 1–7.

Munir, Rinaldi. 2008 . *Metode Numerik*. Bandung: Informatika Bandung.

Maulidi, I. (2018). Metode Beda Hingga untuk Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial. *OSF Preprints*, 2(1), 1–10.

Noye, J. 2000, *Computational Techniques for Differential Equation*, Australia: Faculty of Mathematical Sciences The University of Adelaide.

Pratama, M. I., Firmasyasari, D., Rasyid, N. A., & Harianto. 2021. Simulasi Numerik Model Arus Lalu Lintas Satu Arah Berbasis Fungsi Velositas Underwood. *Journal of Mathematics, Computations, and Statistics,*4(1),9-20.

Prasetiyo, A. P. 2023. Review Formula Euler: Pembuktian dan Aplikasinya. *SIMETRIS*, *17*(2), 38-45.

Purcell, EJ & Varberg, D. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analisis Edısı Kelima: Jilid 1. Terj. Dari Calculus with Analytics Geometry, Fifth Edition,* oleh Susila. LN., Kartasasmita, B, dan Rawuh. Jakarta: Erlangga.

Putra, C. A., & Izzaturrahman, M. F. 2020. *Numerical Study of Inviscid Two-Dimensional Burgers Equation using Lax Method*. Bandung Institute of Technology. 6 hlm.

Ridlo, M. 2022. *Implementasi metode Lax Friedrichs pada penyelesaian persamaan Burgers (SKRIPSI)*. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim).

Ripai, A., Abdullah, Z., & Syafwan, M. 2019. Analisis Solusi Persamaan Burger Sebagai Solusi Soliton Menggunakan Transformasi Hopf-Cole. *Jurnal Fisika Unand*, 8(2), 171-177.

Sari, B., Ambarwati, L., & Wiraningsih, E. D. 2023. Solusi Semi Analitik Persamaan Burgers Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace. JMT: *Jurnal Matematika dan Terapan*, 5(2), 67-77.

Sasongko, B. 2010. Metode Numerik dengan Scilab. Yogyakarta: C.V. Andi Offset

Strauss, A.W. 2007. *Partial Differential Equations and Introduction Second Edition*. New York: John willey & Sons, Ltd.

Utomo, R. B. (2016). Persamaan Differensial Parsial Difusi Homogen pada Selang$(-\infty,\infty)$ dengan Kondisi Batas Dirichlet dan Neumann. *JURNAL SILOGISME: Kajian Ilmu Matematika dan Pembelajarannya*, 1(1), 1-10.