DERIVASI NIL DAN IDEAL-δ PADA RING POLINOMIAL

Skripsi

Oleh

DITHA LATHIFATUL MURSYIDAH
NPM. 2117031117

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

ABSTRACT

NIL DERIVATION AND δ-IDEAL ON POLYNOMIAL RING

By

Ditha Lathifatul Mursyidah

Given a ring R. The additif mapping $d : R \to R$ is called derivation if d satisfies Leibniz's rule, i.e., $d(ab) = d(a)b + ad(b)$, for every $a, b \in R$. In the special case, for each $x \in R$ there exists a positive integer n which depends on x such that $d^n(x) = 0$, the mapping d is called as a nil derivation on R. The concept of δ-ideal which is an ideal that remains stable under the derivation operation δ. The research starting with the construction of nil derivations on polynomial rings, followed by an investigation of the nilpotency index properties of nil derivations. Furthermore, this study discusses the relationship between nil derivations and nilpotent derivations as well as linear combinations of nil derivations. Besides, we give the ilustration example based on the theorem that we obtained.

Keywords: nil derivation, δ-ideal, linear combinations, polynomial ring.

ABSTRAK

DERIVASI NIL DAN IDEAL-δ PADA RING POLINOMIAL

Oleh

Ditha Lathifatul Mursyidah

Diberikan ring R. Pemetaan aditif $d : R \to R$ disebut derivasi jika d memenuhi aturan Leibniz, yaitu, $d(ab) = d(a)b + ad(b)$, untuk setiap $a, b \in R$. Dalam kasus khusus, untuk setiap $x \in R$ terdapat sebuah bilangan bulat positif n yang bergantung pada x sedemikian sehingga $d^n(x) = 0$, pemetaan d disebut sebagai derivasi nil pada R. Konsep ideal-δ merupakan ideal yang tetap stabil terhadap operasi derivasi δ. Penelitian ini dimulai dengan mengkonstruksi derivasi nil pada ring polinomial, diikuti dengan menyelidiki sifat indeks nilpotensi derivasi nil. Selanjutnya, penelitian ini membahas kaitan antara derivasi nil dan derivasi nilpotent serta kombinasi linear dari derivasi nil. Selain itu, diberikan contoh sebagai ilustrasi teorema yang diperoleh.

Kata-kata kunci: derivasi nil, ideal-δ, kombinasi linear, ring polinomial.

DERIVASI NIL DAN IDEAL-δ PADA RING POLINOMIAL

DITHA LATHIFATUL MURSYIDAH

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

Judul Skripsi	:	**DERIVASI NIL DAN IDEAL-δ PADA RING POLINOMIAL**
Nama Mahasiswa	:	***Ditha Lathifatul Mursyidah***
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2117031117**
Program Studi	:	**Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.	**Bernadhita Herindri S. U., M.Sc.**
NIP 198406272006042001	NIP 199206302023212034

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	:	**Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**	....
Sekretaris	:	**Bernadhita Herindri S. U., M.Sc.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

KEMENTERIAN PENDIDIKAN TINGGI, SAINS, DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS LAMPUNG
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **14 Januari 2025**

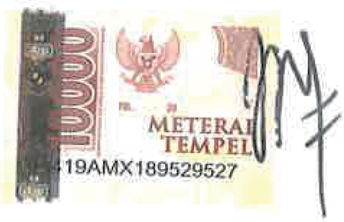
PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Ditha Lathifatul Mursyidah**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2117031117**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Derivasi Nil dan Ideal-δ pada Ring Polinomial**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 14 Januari 2025
Penulis,



Ditha Lathifatul Mursyidah

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Ditha Lathifatul Mursyidah yang lahir di Kotabumi pada tanggal 18 Juli 2003. Penulis merupakan anak pertama dari tiga bersaudara, putri dari pasangan Iwan Gunawan dan Sri Hastuti.

Penulis memulai pendidikan formal di TK Nurul Ummah pada tahun 2008 dan menyelesaikannya pada tahun 2009. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan di SD Negeri 1 Ketapang pada tahun 2009 sampai dengan 2015. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 6 Kotabumi pada tahun 2015 sampai dengan tahun 2018, dan menyelesaikan pendidikan di SMA Negeri 2 Kotabumi pada tahun 2021.

Pada tahun 2021, penulis diterima di program studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN). Pada akhir tahun 2023, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Badan Pendapatan daerah (BAPENDA) Provinsi Lampung selama 40 hari sampai dengan Februari 2024. Selain itu, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat, penulis juga melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 40 hari di desa Negeri Agung, Kecamatan Gunung Pelindung, Kabupaten Lampung Timur, sampai dengan Agustus 2024.

Selama masa studi, penulis menunjukkan ketekunan dan dedikasi dalam menyelesaikan berbagai tugas akademik. Selain itu, penulis juga dipercaya untuk menjadi asisten dosen pada mata kuliah Analisis Fungsi Kompleks pada tahun 2024. Penulis berharap hasil dari penelitian ini dapat memberikan manfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan, khususnya di bidang Struktur Aljabar.

KATA INSPIRASI

”Satu-satunya cara untuk melakukan pekerjaan hebat adalah mencintai apa yang Anda lakukan.” -*Steve Jobs*

PERSEMBAHAN

Alhadulillahirobbil"alamin
Dengan mengucapkan puji dan syukur atas kehadirat Allah Subhanahu Wata"ala karena limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya.
Tak lupa shalawat beserta salam selalu tercurah kepada junjungan kita Nabi Muhammad Shallallahu Alaihi Wasallam.
Dengan rasa syukur dan Bahagia, saya persembahkan rasa terima kasih saya kepada:

Bapak dan Ibuku Tercinta

Terima kasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini. Terima kasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terima kasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terima kasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta
Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul ”Derivasi Nil dan Ideal-δ pada Ring Polinomial” dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Diri sendiri, atas segala usaha, ketekunan, dan perjuangan yang telah dilakukan untuk menyelesaikan skripsi ini tepat pada waktunya. Terima kasih telah bertahan di tengah tantangan dan terus maju meski dihadapkan pada berbagai rintangan.

2. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing 1 yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sepanjang proses penyusunan skripsi ini.

3. Ibu Bernadhita Herindri Samodera Utami, M.Sc. selaku Pembimbing 2 yang telah memberikan arahan, dukungan, serta doa sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

4. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan saran, kritik, serta evaluasi yang membangun sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

5. Ibu Dr. Khoirin Nisa, M.Si. selaku dosen Pembimbing Akademik.

6. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Adikku tercinta M. Fathan Fadhlurahman dan M. Abyan Rafisqy yang selalu menjadi penyemangat dan penghibur dikala penat.

8. Saudara-saudariku, bibi dan pamanku yang telah memberikan dukungan dan doa.

9. Teman-teman seperjuangan atas dukungan dan semangatnya. Skripsi ini akhirnya bisa kita selesaikan, semangat terus untuk langkah berikutnya!

10. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

11. Seluruh guru TK, SD, SMP, dan SMA yang telah mengajarkan dan memberikan ilmu hingga penulis bisa menduduki bangku perkuliahan.

12. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu atas segala dukungan, pengalaman, dan semangat yang telah diberikan.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 14 Januari 2025

Ditha Lathifatul Mursyidah

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Konsep dasar kalkulus yang menjadi landasan bagi konsep derivasi, pertama kali diperkenalkan oleh Newton dengan konsep fluks dan Gottfried Wilhelm Leibniz dengan konsep diferensial pada abad ke-17. Pada abad ke-19, Reimann dan Karl Weierstrass memberikan kontribusi signifikan dalam pengembangan teori fungsi kompleks, termasuk perluasan konsep derivasi. Kemudian, pada abad ke-20, konsep derivasi berhasil diabstraksikan dan diterapkan dalam aljabar abstrak, khususnya dalam struktur aljabar seperti ring oleh Jacobson. Ring merupakan himpunan yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan operasi perkalian. Lebih lanjut, salah satu himpunan bagian yang khusus dari ring yaitu ideal. Felzenswalb dan Lanski menyatakan bahwa d adalah derivasi dari ring R jika bersifat aditif dan memenuhi aturan Leibniz (Felzenszwalb dan Lanski, 1983).

Beberapa peneliti yang telah mengkaji konsep derivasi pada ring antara lain, Chung dan Kobayashi mengeksplorasi sifat-sifat khusus dari derivasi nil dan bagaimana pengaruhnya terhadap struktur ideal dalam ring prima (Chung dan Kobayashi, 1985). Selanjutnya, Dhara dan Sharma membahas tentang pemetaan aditif dalam ring asosiatif dengan elemen identitas (Dhara dan Sharma, 2009). Kaygodorov dan Popov membahas tentang aljabar alternatif yang mengizinkan derivasi dengan nilai yang *invertible* dan derivasi yang *invertible* (Kaygodorov dan Popov, 2014). Fo$\check{s}$ner dkk. membahas terkait pemetaan aditif dan derivasi pada ring semiprima (Fo$\check{s}$ner dkk., 2015). Melaibari dkk. membahas mengenai homoderivasi pada ring dan hasil-hasil yang berkaitan dengan komutativitas ring dengan kondisi tertentu (Melaibari dkk., 2016). Selanjutnya, penelitian yang terbaru oleh Ali dkk. yang membahas mengenai berbagai jenis derivasi pada ring (Ali dkk., 2024).

Salah satu jenis derivasi yang akan menjadi fokus dalam penelitian ini adalah derivasi nil, yang merupakan bagian penting dari studi derivasi pada ring. Derivasi nil adalah jenis derivasi yang memiliki sifat khusus, yaitu terdapat bilangan bulat positif n yang bergantung pada elemen ring sehingga ketika diterapkan derivasi secara berulang sebanyak n kali pada elemen ring tersebut akan menghasilkan nol. Bilangan bulat positif terkecil n yang memenuhi kondisi tersebut disebut indeks nilpotensi. Nilai n dapat berbeda untuk setiap elemen dalam ring. Hal ini berbeda dengan derivasi nilpotent, yang memiliki nilai tetap untuk semua elemen ring.

Dalam penelitian ini, dibahas mengenai kombinasi linear dari derivasi nil. Kombinasi linear dari derivasi, yaitu $d = \sum_{i=1}^{n} c_i d_i$, dengan c_i elemen ring R untuk setiap i, merupakan salah satu cara untuk mengeksplorasi interaksi antara derivasi-derivasi pada ring. Dalam konteks ini, penting untuk membuktikan apakah kombinasi linear tersebut tetap mempertahankan sifat nilpotensi dari masing-masing derivasi.

Selain derivasi nil, konsep lain yang penting dalam penelitian ini adalah ideal-δ, yaitu ideal I tetap stabil terhadap operasi derivasi δ. Konsep ini dapat diperluas ke jenis derivasi yang digunakan, misalnya derivasi nil, dan bentuk dari ideal itu sendiri. Hingga saat ini, belum ada peneliti yang meneliti mengenai struktur ideal-δ pada ring polinomial dengan δ merupakan derivasi nil. Dalam penelitian ini, juga dibahas konsep ring faktor, yang merupakan struktur baru yang dibangun dari ring dengan memodifikasi operasi menggunakan ideal-δ. Salah satu fokus utama penelitian adalah bagaimana sifat derivasi nil pada ring dapat diturunkan menjadi derivasi pada ring faktor, serta bagaimana sifat-sifat nilpotensi tersebut dipertahankan.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini yaitu:

1. mengkonstruksi derivasi nil dan menyelidiki indeks nilpotensi pada ring polinomial;
2. menyelidiki keterkaitan derivasi nil dan derivasi nilpotent;
3. menyelidiki sifat-sifat derivasi nil, meliputi komposisi dan kombinasi linear dari derivasi nil; dan
4. menyelidiki derivasi nil pada ideal-δ dan ring faktor R/I.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat yang ingin diperoleh dari penelitian ini yaitu:

1. memperdalam pemahaman tentang sifat-sifat derivasi nil suatu ring;
2. mengembangkan penerapan ideal-δ dengan mempertimbangkan jenis derivasi dan bentuk ideal pada ring polinomial; dan
3. menjadi referensi bagi penelitian lanjutan di bidang aljabar dan teori ring yang melibatkan derivasi nil dan ideal-δ.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini, akan diuraikan konsep dasar yang menjadi landasan teori untuk mendukung pembahasan pada bagian selanjutnya.

2.1 Grup

Salah satu langkah penting untuk mendalami konsep-konsep yang lebih kompleks dalam teori aljabar adalah memahami struktur dasar dalam aljabar abstrak, yaitu grup. Sebelum membahas pengertian grup, berikut diberikan definisi operasi biner.

Definisi 2.1.1 Operasi biner $*$ pada himpunan S merupakan fungsi dari $S \times S$ ke S. Untuk setiap $(a, b) \in S \times S$, $*(a, b)$ di S dinotasikan dengan $a * b$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Struktur aljabar yang terdiri dari satu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu dinamakan grup.

Definisi 2.1.2 Suatu grup $\langle G, *\rangle$ terdiri dari himpunan G bersama operasi biner $*$ yang didefinisikan pada G dan memenuhi aksioma berikut:

1. operasi biner $*$ bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$;
2. terdapat elemen identitas e, yaitu untuk setiap $a \in G$ berlaku $a * e = e * a = a$;
3. untuk setiap $a \in G$, terdapat elemen invers $a' \in G$ sehingga berlaku $a * a' = a' * a = e$

(Fitriani dan Faisol, 2022).

Lebih lanjut, jika untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a*b = b*a$, maka $\langle G, *\rangle$ disebut grup komutatif atau grup Abel. Jika pada grup terdapat 4 aksioma yang harus dipenuhi, maka pada semigrup hanya terdapat 2 aksioma saja yang harus terpenuhi yaitu operasi biner $*$ bersifat tertutup dan asosiatif (Andari, 2015).

Setelah mempelajari definisi dari grup, berikut diberikan contoh yang relevan terkait grup.

Contoh 2.1.3 Diberikan himpunan bilangan bulat modulo 5 ($\mathbb{Z}_5$) dengan operasi penjumlahan modulo 5. Akan ditunjukkan apakah $\langle \mathbb{Z}_5, +_5\rangle$ merupakan grup.

1. Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{Z}_5$, berlaku:
$$a +_5 b = (a + b) \mod 5 \in \mathbb{Z}_5.$$
2. Diberikan sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}_5$, berlaku:
$$(a +_5 b) +_5 c = a +_5 (b +_5 c).$$
Karena penjumlahan bilangan bulat biasa bersifat asosiatif, maka penjumlahan modulo juga bersifat asosiatif.
3. Diberikan sebarang $a \in \mathbb{Z}_5$. Karena:
$$a +_5 \bar{0} = \bar{0} +_5 a = a,$$
diperoleh $\bar{0}$ merupakan elemen identitas di $\mathbb{Z}_5$.
4. Karena $\bar{0} +_5 \bar{0} = \bar{1} +_5 \bar{4} = \bar{2} +_5 \bar{3} = \bar{3} +_5 \bar{2} = \bar{4} +_5 \bar{1} = \bar{0}$, diperoleh $(\bar{0})^{-1} = \bar{0}, (\bar{1})^{-1} = \bar{4}, (\bar{2})^{-1} = \bar{3}, (\bar{3})^{-1} = \bar{2}, (\bar{4})^{-1} = \bar{1}$. Akibatnya, setiap elemen $\mathbb{Z}_5$ memiliki invers terhadap operasi $+_5$.

Karena $\langle \mathbb{Z}_5, +_5\rangle$ memenuhi semua aksioma grup, maka $\langle \mathbb{Z}_5, +_5\rangle$ merupakan grup.

2.2 Ring

Struktur aljabar merupakan salah satu bidang utama dalam matematika yang mempelajari himpunan dengan operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu. Salah satu yang dipelajari dalam struktur aljabar yaitu Teori Ring.

Definisi 2.2.1 Ring $\langle R, +, \cdot \rangle$ adalah himpunan tak kosong R yang dilengkapi dengan dua operasi biner $+$ dan $\cdot$ yang memenuhi sifat-sifat tertentu. Sifat-sifat tersebut meliputi:

1. $\langle R, + \rangle$ grup Abel;
2. terhadap operasi $\cdot$ memenuhi:
   (a) untuk setiap $a, b \in R$, berlaku $a \cdot b \in R$;
   (b) untuk setiap $a, b, c \in R$, berlaku $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
3. untuk setiap $a, b, c \in R$, berlaku $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dan $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

(Setiawan, 2014).

Berdasarkan Definisi 2.2.1, ring adalah suatu sistem matematika $\langle R, +, \cdot \rangle$ sedemikian sehingga $\langle R, + \rangle$ adalah grup komutatif, $\langle R, \cdot \rangle$ adalah semigrup, dan berlaku hukum distributif (Malik dkk., 1998).

Jika di dalam ring tersebut operasi perkaliannya memenuhi sifat komutatif, maka ringnya disebut dengan ring komutatif. Dengan demikian ring komutatif adalah suatu bentuk khusus dari ring, yakni yang memenuhi sifat komutatif perkalian. Dengan kata lain, jika operasi perkalian dalam R bersifat komutatif, yaitu $a \cdot b = b \cdot a$ untuk setiap $a, b \in R$, maka R disebut sebagai ring komutatif (Wahyuni dkk., 2021).

Untuk memperjelas pemahaman mengenai ring komutatif, berikut diberikan beberapa contoh yang relevan.

Contoh 2.2.2 Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian biasa merupakan contoh ring komutatif.

Contoh 2.2.3 Diberikan $M_2(\mathbb{Z})$ yaitu himpunan semua matriks berukuran 2×2 dengan entri-entrinya adalah bilangan bulat. Misalkan + dan $\cdot$ masing-masing menyatakan penjumlahan dan perkalian matriks biasa. Dapat ditunjukkan $\langle M_2(\mathbb{Z}), +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

Selanjutnya, diberikan $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$. Karena

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$M_2(\mathbb{Z})$ merupakan ring non-komutatif (Malik dkk., 1998).

2.2.1 Ring Polinomial

Suatu fungsi $f(x)$ disebut polinomial jika dapat dituliskan sebagai $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ dengan n merupakan bilangan bulat non negatif dan $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ merupakan koefisien dari $f(x)$, yaitu elemen-elemen dari suatu himpunan (Hura dkk., 2019).

Definisi 2.2.4 Diberikan ring R. Himpunan $R[x]$ dinotasikan sebagai himpunan semua barisan tak hingga $(a_0, a_1, a_2, ...)$, dengan $a_i \in R, i = 0, 1, 2, ...$ dan terdapat bilangan bulat non negatif n sehingga untuk setiap $k \geq n, a_k = 0$. Elemen-elemen dari $R[x]$ disebut polinomial atas R.

Operasi penjumlahan dan perkalian pada $R[x]$.

$$
\begin{aligned}
+ &: R[x] \times R[x] \to R[x] \\
&(a_0, a_1, a_2, ...) + (b_0, b_1, b_2, ...) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, ...). \\
\cdot &: R[x] \times R[x] \to R[x] \\
&(a_0, a_1, a_2, ...)(b_0, b_1, b_2, ...) = (c_0, c_1, c_2, ...),
\end{aligned}
$$

dengan $c_j = \sum_{i=0}^{j} a_i b_{j-i}$, untuk $j = 0, 1, 2, ...$

Dapat disimpulkan $\langle R[x], +, \cdot\rangle$ merupakan ring dengan $(0, 0, 0, ...)$ adalah elemen netral terhadap penjumlahan, dan invers terhadap penjumlahan dari $(a_0, a_1, a_2, ...)$ adalah $(-a_0, -a_1, -a_2, ...)$. Ring $R[x]$ disebut ring polinomial (Malik dkk., 1998).

2.2.2 Subring

Seperti halnya pada teori grup terdapat subgrup, dalam konsep teori ring juga dapat didefinisikan subring.

Definisi 2.2.5 Diberikan sebarang ring $\langle R, +, \cdot\rangle$ dan himpunan bagian tak kosong S di R ($S \subseteq R$). Jika S membentuk ring dengan operasi yang sama pada R, maka S disebut subring R (Wahyuni dkk., 2021).

Teorema 2.2.6 Diberikan sebarang S himpunan tak kosong dalam ring R. Himpunan S merupakan subring dari R jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in S$, berlaku:

1. $a + (-b) \in S$, dan
2. $ab \in S$,

(Rasiman dkk., 2018).

Bukti. ($\Rightarrow$) Diketahui S merupakan subring dari R. Berdasarkan Definisi 2.2.5, S merupakan ring. Akibatnya, diperoleh bahwa untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a + (-b) \in S$ dan $ab \in S$.

($\Leftarrow$) Diketahui bahwa untuk setiap $a, b \in S$, berlaku $a + (-b) \in S$ dan $ab \in S$. Akan ditunjukkan S merupakan subring dari R. Karena untuk setiap $a, b \in S$ memenuhi $a + (-b) \in S$, artinya $\langle S, + \rangle$ merupakan subgrup dari $\langle R, + \rangle$ yang menyebabkan $\langle S, + \rangle$ merupakan grup. Mengingat $\langle R, + \rangle$ grup komutatif, maka $\langle S, + \rangle$ merupakan grup komutatif. Selanjutnya, karena untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $ab \in S$, artinya operasi perkalian bersifat tertutup. Karena $S \subseteq R$, sifat asosiatif terhadap operasi perkalian serta sifat distributif kiri dan distributif kanan otomatis terpenuhi. Dengan demikian, terbukti bahwa S merupakan subring dari R. ■

Berikut ini akan diberikan contoh subring dari ring R.

Contoh 2.2.7 Diberikan ring $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ dan $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan $2\mathbb{Z}$ merupakan subring $\mathbb{Z}$. Diberikan sebarang $x, y \in 2\mathbb{Z}$ dengan $x = 2z_1, y = 2z_2,$ dan$z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$, berlaku:

1. $x - y = 2z_1 - 2z_2 = 2(z_1 - z_2) \in 2\mathbb{Z}$, dan
2. $xy = (2z_1)(2z_2) = 2(2z_1z_2) \in 2\mathbb{Z}$.

Jadi, $2\mathbb{Z}$ merupakan subring $\mathbb{Z}$.

Lebih lanjut, akan diberikan contoh himpunan bagian R yang bukan merupakan subring dari ring R.

Contoh 2.2.8 Diberikan ring $X = \{4k + 2 | k \in \mathbb{Z}\}$. Akan diselidiki apakah X merupakan subring $\mathbb{Z}$. Pilih $p, q \in X$ dengan $p = 4(3) + 2 = 14, q = 4(2) + 2 = 10$, berlaku:

$$\begin{aligned} p - q &= 4(3) + 2 - (4(2) + 2) \\ &= 14 - 10 \\ &= 4(1) \notin X, \end{aligned}$$

karena X tidak memenuhi aksioma 1, maka X bukan merupakan subring $\mathbb{Z}$.

2.2.3 Ideal

Subring khusus dalam ring R yang memiliki sifat istimewa yaitu tertutup terhadap operasi perkalian dengan elemen di luar subring disebut dengan ideal.

Definisi 2.2.9 Diberikan ring $\langle R, +, \cdot \rangle$ dan $I \subset R$ dengan $I \neq \emptyset$, I disebut ideal kiri dari R jika:

1. untuk setiap $a, b \in I$ berlaku $a + (-b) \in I$;
2. untuk setiap $a \in I$ dan $r \in R$ maka $ra \in I$ (Rasiman dkk., 2018).

Definisi 2.2.10 Diberikan ring $\langle R, +, \cdot \rangle$ dan $I \subset R$ dengan $I \neq \emptyset$, I disebut ideal kanan dari R jika:

1. untuk setiap $a, b \in I$ berlaku $a + (-b) \in I$;
2. untuk setiap $a \in I$ dan $r \in R$ maka $ar \in I$ (Rasiman dkk., 2018).

I disebut ideal dari R jika I ideal kiri dan I ideal kanan (Rasiman dkk., 2018).

Teorema 2.2.11 Diberikan ring R tak nol dan himpunan bagian tak kosong I di R. Himpunan I disebut ideal dari R jika:

1. untuk setiap $s_1, s_2 \in I$, berlaku $s_1 - s_2 \in I$;
2. untuk setiap $s_1 \in I$ dan $r \in R$, berlaku $s_1 r, r s_1 \in I$

(Wahyuni dkk., 2021).

Untuk lebih mendalami konsep ideal dari ring, berikut diberikan contoh ideal dari suatu ring.

Contoh 2.2.12 Diberikan ring $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$. Akan ditunjukkan bahwa $I = 3\mathbb{Z}$ merupakan ideal di $\mathbb{Z}$.

1. Diberikan sebarang $a = 3k_1, b = 3k_2 \in 3\mathbb{Z}$ dengan $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ berlaku:

$$a - b = 3k_1 - 3k_2 = 3(k_1 - k_2) \in \mathbb{Z}.$$

2. Diberikan sebarang $a = 3k \in 3\mathbb{Z}$ dengan $k \in \mathbb{Z}$, dan $r \in \mathbb{Z}$ berlaku:
   (a) $ra = r(3k) = r3(k) = 3r(k) = 3(rk) \in 3\mathbb{Z}$ (ideal kiri);
   (b) $ar = 3k(r) = 3(kr) \in 3\mathbb{Z}$ (ideal kanan).

Jadi, $I = 3\mathbb{Z}$ merupakan ideal di $\mathbb{Z}$.

Untuk memahami struktur ideal dalam suatu ring, dapat dibangun ideal menggunakan satu atau lebih elemen dari ring tersebut.

Definisi 2.2.13 Diberikan ring R dan himpunan bagian tak kosong $X \subseteq R$. Ideal $\langle X \rangle$ disebut ideal yang dibangun oleh X (Wahyuni dkk., 2021).

Berikut diberikan definisi dari ideal yang dibangun oleh satu elemen.

Definisi 2.2.14 Diberikan sebarang ring komutatif R dengan elemen satuan. Jika $X \subseteq R$ hanya terdiri atas satu elemen, misalkan $X = \{a\}$, maka:

$$\langle X \rangle = \langle \{a\} \rangle = \{ar | r \in R\} = \{ra | r \in R\},$$

dan dapat dinotasikan dengan $\langle a \rangle$ (Wahyuni dkk., 2021).

Setelah memahami definisi ideal yang dibangun oleh satu elemen, berikut merupakan contoh yang spesifik untuk memperjelas konsep ini.

Contoh 2.2.15 Diberikan ring $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$, ideal $\langle 3 \rangle$ adalah himpunan semua bilangan yang dapat dituliskan sebagai kelipatan 3, yaitu $\langle 3 \rangle = \{3n | n \in \mathbb{Z}\} = \{..., -6, -3, 0, 3, 6, ...\}$.

Pada ring non-komutatif, ideal kiri dan ideal kanan dapat berbeda, tetapi pada ring komutatif, ideal yang dibangun oleh satu elemen adalah ideal utama, yang merupakan ideal kiri dan kanan yang sama. Berikut diberikan contoh mengenai ideal yang dibangun oleh satu elemen pada ring non-komutatif.

Contoh 2.2.16 Diberikan ring $M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$.

Ideal kiri yang dibangun oleh $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dinotasikan dengan $\langle A \rangle_L$, yaitu:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_L &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} | a, c \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Ideal kanan yang dibangun oleh $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dinotasikan dengan $\langle A \rangle_R$, yaitu:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_R &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Dengan demikian, dalam ring non-komutatif seperti $M_2(\mathbb{R})$, ideal kiri $\langle A \rangle_L$ dan ideal kanan $\langle A \rangle_R$ tidak sama.

Selanjutnya, konsep ini dapat diperluas untuk membangun ideal dari beberapa elemen dari suatu ring.

Definisi 2.2.17 Diberikan sebarang ring komutatif R dengan elemen satuan dan $X \subseteq R$ dengan $X \neq \emptyset$. Himpunan $\langle X \rangle = \{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i | x_i \in X, r_i \in R, n \in \mathbb{N}\}$ disebut ideal yang dibangun oleh X dan dinotasikan dengan $\langle X \rangle$ (Wahyuni dkk., 2021).

Berikut diberikan contoh dari ideal yang dibangun oleh beberapa elemen.

Contoh 2.2.18 Diberikan ring $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ dan $X = \{2, 3\}$. Ideal yang dibangun oleh X adalah:

$$\langle X \rangle = \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} (2r + 3s) | n \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{Z}\},$$

(Wahyuni dkk., 2021).

2.2.4 Ring Faktor

Untuk membangun struktur baru dari suatu ring, ideal sering digunakan sebagai alat bantu. Salah satu hasilnya adalah ring faktor, yang dihasilkan dengan menggunakan ideal pada suatu ring.

Definisi 2.2.19 Diberikan sebarang ring $\langle R, +, \cdot \rangle$ dan ideal I di R. Ring faktor $R/I = \{a + I | a \in R\}$ adalah ring dengan dua operasi biner yang sama dengan R sehingga untuk setiap $a + I, b + I \in R/I$ berlaku:

1. $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$, dan
2. $(a + I) \cdot (b + I) = (a \cdot b) + I$,

(Rasiman dkk., 2018).

Untuk memberikan gambaran yang lebih jelas mengenai ring faktor, berikut merupakan contoh yang relevan.

Contoh 2.2.20 Diberikan $I = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ adalah ideal yang dibangun oleh $\bar{2}$ di $\mathbb{Z}_6$. Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_6/I$ adalah ring faktor. Ideal-ideal dari ring $\mathbb{Z}_6$ sebagai berikut.

1. $\bar{0} + I = I = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$,
2. $\bar{1} + I = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}$,

sehingga $\mathbb{Z}_6/I = \{\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}, \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}\}$.

1. Akan ditunjukkan $\langle \mathbb{Z}_6/I, + \rangle$ merupakan grup komutatif.
   (a) Untuk setiap $a+I, b+I \in \mathbb{Z}_6/I$, berlaku $(a+I)+(b+I) = (a+b)+I \in \mathbb{Z}_6/I$. Jadi, operasi $+$ tertutup di $\mathbb{Z}_6/I$.
   (b) Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_6$, berlaku $a + (b + c) = (a + b) + c$ sehingga untuk setiap $a + I, b + I, c + I \in \mathbb{Z}_6/I$ berlaku:

$$
\begin{aligned}
[(a + I) + (b + I)] + (c + I) &= [(a + b) + I] + (c + I) \\
&= [(a + b) + c] + I \\
&= (a + I) + [(b + c) + I] \\
&= (a + I) + [b + I + (c + I)].
\end{aligned}
$$

   Jadi, operasi $+$ bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}_6/I$.

(c) Terdapat $\bar{0} + I \in \mathbb{Z}_6/I$ sehingga untuk setiap $a + I \in \mathbb{Z}_6/I$, berlaku $(a+I)+(\bar{0}+I) = (\bar{0}+I)+(a+I) = a+I$. Jadi, $\bar{0}+I$ adalah elemen identitas di $\mathbb{Z}_6/I$.

(d) Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_6$ terdapat $-a$ berlaku $a+-a = -a+a = \bar{0}$ sehingga untuk setiap $a + I \in \mathbb{Z}_6/I$ berlaku:

$$(a + I) + (-a + I) = (a - a) + I = 0 + I = I.$$
$$(-a + I) + (a + I) = (-a + a) + I = 0 + I = I.$$

Jadi, setiap $a + I \in \mathbb{Z}_6/I$ mempunyai invers di $\mathbb{Z}_6/I$.

(e) Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_6$, berlaku $a + b = b + a$ sehingga untuk setiap $a + I, b + I \in \mathbb{Z}_6/I$ berlaku:

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I = (b + a) + I = (b + I) + (a + I).$$

Jadi, operasi $+$ bersifat komutatif di $\mathbb{Z}_6/I$.

Dengan demikian, terbukti $\langle \mathbb{Z}_6/I, +\rangle$ merupakan grup komutatif.

2. Akan ditunjukkan $\langle \mathbb{Z}_6/I, \cdot\rangle$ merupakan semigrup.

(a) Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_6$, berlaku $a \cdot b \in \mathbb{Z}_6$ sehingga untuk setiap $a + I, b + I \in \mathbb{Z}_6/I$ berlaku:

$$(a + I) \cdot (b + I) = (a \cdot b) + I \in \mathbb{Z}_6/I.$$

Jadi, operasi $\cdot$ tertutup di $\mathbb{Z}_6/I$.

(b) Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_6$, berlaku $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ sehingga untuk setiap $a + I, b + I \in \mathbb{Z}_6/I$ berlaku:

$$\begin{aligned}
[(a + I) \cdot (b + I)] \cdot (c + I) &= [(a \cdot b) + I)] \cdot (c + I) \\
&= [(a \cdot b) \cdot c] + I \\
&= [a \cdot (b \cdot c)] + I \\
&= (a + I) \cdot [(b \cdot c) + I)] \\
&= (a + I) \cdot [(b + I) \cdot (c + I)].
\end{aligned}$$

Jadi, operasi $\cdot$ bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}_6/I$.

Dengan demikian, terbukti $\langle \mathbb{Z}_6/I, \cdot\rangle$ merupakan semigrup.

3. Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_6$, berlaku $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dan $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ sehingga untuk setiap $a + I, b + I, c + I \in \mathbb{Z}_6/I$ diperoleh:

$$\begin{aligned}(a + I) \cdot [(b + I) + (c + I)] &= (a + I) \cdot [(b + c) + I] \\ &= [a \cdot (b + c)] + I \\ &= [(a \cdot b) + (a \cdot c)] + I \\ &= [(a \cdot b) + I] + [(a \cdot c) + I] \\ &= [(a + I) \cdot (b + I)] + [(a + I) \cdot (c + I)],\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}[(a + I) + (b + I)] \cdot (c + I) &= [(a + b) + I] \cdot (c + I) \\ &= [(a + b) \cdot c] + I \\ &= [(a \cdot c) + (b \cdot c)] + I \\ &= [(a \cdot c) + I] + [(b \cdot c) + I] \\ &= [(a + I) \cdot (c + I)] + [(b + I) \cdot (c + I)].\end{aligned}$$

Berdasarkan $(1) - (3)$ terbukti bahwa $\langle \mathbb{Z}_6/I, +, \cdot \rangle$ merupakan ring faktor.

2.3 Derivasi

Dalam konteks ring, derivasi adalah suatu pemetaan khusus yang menghubungkan dua elemen dari ring dengan sifat-sifat tertentu yang mirip dengan derivasi dalam kalkulus.

Huang dkk. menyatakan bahwa sebuah pemetaan aditif $d : R \to R$ disebut derivasi jika d memenuhi aturan Leibniz, yaitu $d(ab) = d(a)b + ad(b)$, untuk setiap $a, b \in R$ (Huang dkk., 2023).

Definisi 2.3.1 Derivasi pada ring R didefinisikan sebagai suatu pemetaan $d : R \to R$ yang bersifat aditif dan memenuhi aturan Leibniz, yaitu:

1. untuk setiap $a, b \in R$, berlaku:

   $d(a + b) = d(a) + d(b)$ (bersifat aditif);

2. untuk setiap $a, b \in R$, berlaku:

$$d(ab) = d(a)b + ad(b) \text{ (aturan Leibniz)}$$

(Sahai dan Ansari, 2022).

Derivasi diterapkan pada berbagai jenis ring, baik komutatif maupun non-komutatif, untuk mengeksplorasi struktur aljabar serta sifat-sifat elemen dalam ring tersebut.

Berdasarkan Definisi 2.3.1, jelas bahwa pemetaan nol merupakan derivasi, yang selanjutnya disebut dengan derivasi nol. Untuk memperjelas pemahaman mengenai derivasi, berikut diberikan beberapa contoh derivasi pada suatu ring.

Contoh 2.3.2 Diberikan ring $\mathbb{Z}[x]$ dan pemetaan $d : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x]$ dengan $d(p(x)) = k\frac{d}{dx}(p(x)) = kp'(x)$, untuk setiap $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ dan konstanta $k \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan pemetaan d merupakan derivasi pada $\mathbb{Z}[x]$.

1. Diberikan sebarang $p(x), q(x) \in \mathbb{Z}[x]$, berlaku:

$$\begin{aligned} d(p(x) + q(x)) &= k(\frac{d}{dx}(p(x) + q(x))) \\ &= k(\frac{d}{dx}(p(x)) + \frac{d}{dx}(q(x))) \\ &= k\frac{d}{dx}(p(x)) + k\frac{d}{dx}(q(x)) \\ &= kp'(x) + kq'(x) \\ &= d(p(x)) + d(q(x)). \end{aligned}$$

   Artinya, pemetaan d bersifat aditif.

2. Diberikan sebarang $p(x), q(x) \in \mathbb{Z}[x]$, berlaku:

$$\begin{aligned} d(p(x)q(x)) &= k\frac{d}{dx}(p(x)q(x)) \\ &= k(\frac{d}{dx}(p(x))q(x) + p(x)\frac{d}{dx}(q(x))) \\ &= k\frac{d}{dx}(p(x))q(x) + p(x)k\frac{d}{dx}(q(x)) \\ &= kp'(x)q(x) + p(x)kq'(x) \\ &= d(p(x))q(x) + p(x)d(q(x)). \end{aligned}$$

   Artinya, pemetaan d memenuhi aturan Leibniz.

Jadi, pemetaan d merupakan derivasi pada $\mathbb{Z}[x]$.

Contoh 2.3.3 Diberikan ring $\mathbb{Z}[x]$ dan pemetaan $d : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x]$ dengan $d(p(x)) = x\frac{d}{dx}(p(x)) = xp'(x)$, untuk setiap $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Akan ditunjukkan pemetaan d merupakan derivasi pada $\mathbb{Z}[x]$.

1. Diberikan sebarang $p(x), q(x) \in \mathbb{Z}[x]$, berlaku:

$$\begin{aligned} d(p(x) + q(x)) &= x(\frac{d}{dx}(p(x) + q(x))) \\ &= x(\frac{d}{dx}(p(x)) + \frac{d}{dx}(q(x))) \\ &= x\frac{d}{dx}(p(x)) + x\frac{d}{dx}(q(x)) \\ &= xp'(x) + xq'(x) \\ &= d(p(x)) + d(q(x)). \end{aligned}$$

   Artinya, pemetaan d bersifat aditif.

2. Diberikan sebarang $p(x), q(x) \in \mathbb{Z}[x]$, berlaku:

$$\begin{aligned} d(p(x)q(x)) &= x\frac{d}{dx}(p(x)q(x)) \\ &= x(\frac{d}{dx}(p(x))q(x) + p(x)\frac{d}{dx}(q(x))) \\ &= x\frac{d}{dx}(p(x))q(x) + p(x)x\frac{d}{dx}(q(x)) \\ &= xp'(x)q(x) + p(x)xq'(x) \\ &= d(p(x))q(x) + p(x)d(q(x)). \end{aligned}$$

   Artinya, pemetaan d memenuhi aturan Leibniz.

Jadi, pemetaan d merupakan derivasi pada $\mathbb{Z}[x]$.

Contoh 2.3.4 Diberikan ring $M_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$ dan pemetaan $d : M_2(\mathbb{Z}) \to M_2(\mathbb{Z})$ dengan $d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix}$, untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$. Akan ditunjukkan pemetaan d merupakan derivasi pada $M_2(\mathbb{Z})$.

1. Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$, berlaku:

$$\begin{aligned} d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) &= d\left(\begin{bmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(b+y) \\ c+z & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -b-y \\ c+z & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -y \\ z & 0 \end{bmatrix} \\ &= d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) + d\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Artinya, pemetaan d bersifat aditif.

2. Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$, berlaku:

$$\begin{aligned} d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) &= d\left(\begin{bmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(ay+bw) \\ cx+dz & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -bw \\ cx & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -ay \\ dz & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -bz & -bw \\ cx & cy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bz & -ay \\ dz & -cy \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -y \\ z & 0 \end{bmatrix} \\ &= d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} d\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Artinya, pemetaan d memenuhi aturan Leibniz.

Jadi, pemetaan d merupakan derivasi pada $M_2(\mathbb{Z})$ (Ernanto, 2018, p.13).

Contoh 2.3.5 Diberikan ring komutatif $R = \langle \mathbb{Z}_5, +_5, \cdot_5 \rangle$ dan pemetaan $d : R \to R$ yang didefinisikan oleh $d(a) = a^2$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_5$. Akan diselidiki apakah d merupakan derivasi.

1. Pilih $\bar{3}, \bar{4} \in \mathbb{Z}_5$, berlaku:
   Pada ruas kiri:
   $$d(\bar{3} + \bar{4}) = (\bar{3} + \bar{4})^2 = (\bar{2})^2 = \bar{4}.$$
   Pada ruas kanan:
   $$d(\bar{3}) + d(\bar{4}) = (\bar{3})^2 + (\bar{4})^2 = \bar{4} + \bar{1} = \bar{0}.$$
   Jelas bahwa kedua ruas tidak sama karena:
   $$d(\bar{3} + \bar{4}) = \bar{4} \neq \bar{0} = d(\bar{3}) + d(\bar{4}).$$
   Artinya pemetaan d tidak bersifat aditif.
2. Pilih $\bar{1}, \bar{3} \in \mathbb{Z}_5$, berlaku:
   Pada ruas kiri:
   $$d(\bar{1} \cdot \bar{3}) = d(\bar{3}) = (\bar{3})^2 = \bar{4}.$$
   Pada ruas kanan:
   $$d(\bar{1})\bar{3} + \bar{1}d(\bar{3}) = (\bar{1})^2(\bar{3}) + \bar{1}(\bar{3})^2 = \bar{3} + \bar{4} = \bar{2}.$$
   Jelas bahwa kedua ruas tidak sama karena:
   $$d(\bar{1} \cdot \bar{3}) = \bar{4} \neq \bar{2} = d(\bar{1})\bar{3} + \bar{1}d(\bar{3}).$$
   Artinya pemetaan d tidak memenuhi aturan Leibniz.

Jadi, pemetaan d bukan merupakan derivasi pada ring $\mathbb{Z}_5$.

Lemma 2.3.6 Diberikan sebarang ring R. Untuk setiap $a \in R$ dapat didefinisikan derivasi $d_a : R \to R$ dengan $d_a(x) = ax - xa$, untuk setiap $x \in R$. Selanjutnya, derivasi d_a disebut derivasi *inner* (derivasi dalam) pada R (Ber dkk., 2020).

Bukti. Diberikan R adalah ring dan $a \in R$. Akan ditunjukkan derivasi *inner* merupakan derivasi.

1. Diberikan sebarang $x, y \in R$.
   Pada ruas kiri:

$$d_a(x+y) = a(x+y) - (x+y)a = ax + ay - xa - ya.$$

   Pada ruas kanan:

$$\begin{aligned} d_a(x) + d_a(y) &= (ax - xa) + (ay - ya) \\ &= ax - xa + ay - ya \\ &= ax + ay - xa - ya. \end{aligned}$$

   Jelas bahwa kedua ruas sama karena:

$$d_a(x+y) = ax + ay - xa - ya = d_a(x) + d_a(y).$$

   Artinya pemetaan d_a bersifat aditif.

2. Diberikan sebarang $x, y \in R$.
   Pada ruas kiri:

$$d_a(xy) = a(xy) - (xy)a = axy - xya.$$

   Pada ruas kanan:

$$\begin{aligned} d_a(x) \cdot y + x \cdot d_a(y) &= (ax - xa) \cdot y + x \cdot (ay - ya) \\ &= axy - xay + xay - xya \\ &= axy - xya. \end{aligned}$$

   Jelas bahwa kedua ruas sama karena:

$$d_a(xy) = axy - xya = d_a(x) \cdot y + x \cdot d_a(y).$$

   Artinya pemetaan d_a juga memenuhi aturan Leibniz.

Jadi, terbukti derivasi *inner* (d_a) merupakan derivasi. ■

Berikut diberikan contoh mengenai derivasi *inner*.

Contoh 2.3.7 Perhatikan derivasi $d : M_2(\mathbb{Z}) \to M_2(\mathbb{Z})$ pada Contoh 2.3.4. Karena terdapat matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ sehingga berlaku:

$$\begin{aligned}
d_A\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) &= A\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} A \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix} \\
&= d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Jadi, derivasi $d = d_A$ merupakan derivasi *inner* pada $M_2(\mathbb{Z})$ (Ernanto, 2018, p.14).

2.3.1 Ideal-δ

Pada studi aljabar, derivasi merupakan pemetaan aditif δ yang memenuhi aturan Leibniz, yaitu $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$, untuk setiap $a, b \in R$. Jika ideal $I \subseteq R$ memiliki sifat bahwa untuk setiap $x \in I$, hasil derivasi $\delta(x) \in I$, maka I disebut sebagai ideal-δ yaitu ideal I tetap stabil terhadap operasi derivasi δ.

Definisi 2.3.8 Diberikan sebarang ring R, ideal I di R, dan derivasi δ pada R. Ideal I disebut ideal-δ jika $\delta(I) \subseteq I$ (Helmi dkk., 2013).

Setelah memahami bahwa ideal-δ adalah ideal yang tetap stabil terhadap derivasi δ, berikut ini diberikan contoh sebagai ilustrasi untuk memperjelas konsep tersebut.

Contoh 2.3.9 Diberikan ring polinomial $\mathbb{Z}[x]$ dan derivasi $\delta : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x]$ dengan definisi $\delta(p(x)) = p'(x)$ untuk setiap $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Selanjutnya, diberikan ideal $J = \langle x^2, 2 \rangle = \{x^2 \cdot f(x) + 2 \cdot g(x) | f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$.

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}\delta(J) &= \delta(x^2 \cdot f(x) + 2 \cdot g(x)) \\ &= \delta(x^2 \cdot f(x)) + \delta(2 \cdot g(x)) \\ &= x^2 \cdot f'(x) + 2x \cdot f(x) + 2 \cdot g'(x) \\ &= x^2 \cdot f'(x) + 2(x \cdot f(x) + g'(x)) \\ &= x^2 \cdot p(x) + 2 \cdot q(x) \in J,\end{aligned}$$

dengan $p(x), q(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Dengan demikian, diperoleh $\delta(J) \subseteq J$. Jadi, $J = \langle x^2, 2\rangle$ merupakan ideal-δ di $\mathbb{Z}[x]$.

Selain ideal I yang tetap stabil terhadap operasi derivasi δ, terdapat juga ideal I yang $\delta(I)$ nya tidak selalu berada dalam I. Berikut diberikan contoh untuk menggambarkan konsep tersebut.

Contoh 2.3.10 Diberikan ring polinomial $\mathbb{Z}[x]$ dan derivasi $\delta : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x]$ dengan $\delta(p(x)) = p'(x)$, untuk setiap $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ seperti pada Contoh 2.3.9. Selanjutnya diberikan ideal $I = \langle x\rangle = \{x \cdot p(x) | p(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$. Pilih $p(x) = x + 1$, artinya $I = x(x + 1) = x^2 + x$. Hal ini berakibat $\delta(I) = \delta(x^2 + x) = 2x + 1 \notin I$. Jadi, diperoleh $\delta(I) \nsubseteq I$. Dengan demikian, ideal $I = \langle x\rangle$ bukan ideal-δ.

2.4 Derivasi Nil

Setelah memahami konsep dasar dari derivasi, pembahasan ini dapat diperluas ke topik yang lebih spesifik, yaitu derivasi nil. Derivasi nil adalah bentuk khusus dari derivasi yaitu aplikasi berulang dari derivasi pada elemen tertentu akan menghasilkan nol.

Definisi 2.4.1 Pemetaan $f : R \to R$ dikatakan nil jika untuk setiap $x \in R$ terdapat sebuah bilangan n (bergantung pada x) sedemikian sehingga $f^n(x) = 0$. Bilangan n yang paling kecil disebut indeks nilpotensi f terhadap x, yang dinotasikan dengan $nil(f, x)$ (Chung, 1985). Dalam hal ini, n tidak harus sama untuk semua $x \in R$.

Setelah membahas derivasi nil pada ring, konsep ini dapat diperluas ke struktur yang lebih spesifik, yaitu ideal dalam ring. Berikut akan dijelaskan definisi derivasi nil pada ideal I dari ring R.

Definisi 2.4.2 Pemetaan $f : R \to R$ dikatakan nil pada ideal I dari R jika untuk setiap $x \in I$, terdapat bilangan n yang bergantung pada x, sedemikian sehingga $f^n(x) = 0$ (Ali dkk., 2024).

Lebih lanjut, berikut ini diberikan contoh derivasi nil pada ideal I di R.

Contoh 2.4.3 Diberikan ring polinomial $\mathbb{Z}[x]$ dan derivasi $\delta : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x]$ dengan $\delta(p(x)) = p'(x)$, untuk setiap $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Selanjutnya, diberikan ideal $I = \langle 2 \rangle = \{2 \cdot p(x) | p(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$.

1. Misalkan $p(x) = 5$, berlaku $\delta(I) = \delta(2 \cdot 5) = \delta(10) = 0$. Jadi, $nil(\delta, 10) = 1$.
2. Misalkan $p(x) = x$, berlaku:

$$\begin{aligned} \delta(I) = \delta(2 \cdot x) = \delta(2x) = 2, \\ \delta^2(I) = \delta^2(2) = 0. \end{aligned}$$

   Jadi, $nil(\delta, 2x) = 2$.
3. Misalkan $p(x) = x^2$, berlaku:

$$\begin{aligned} \delta(I) = \delta(2 \cdot x^2) = \delta(2x^2) = 4x, \\ \delta^2(I) = \delta^2(4x) = 4, \\ \delta^3(I) = \delta^3(4) = 0. \end{aligned}$$

   Jadi, $nil(\delta, 2x^2) = 3$.

Secara umum, derivasi δ dikatakan nil pada ideal $I = \langle 2 \rangle$ pada iterasi ke-$k + 1$ dengan k merupakan derajat tertinggi dari polinomial $p(x)$, sehingga δ merupakan derivasi nil pada ideal $I = \langle 2 \rangle$ di $\mathbb{Z}[x]$.

Setelah membahas derivasi nil, kini saatnya memperjelas perbedaan antara derivasi nil dan derivasi nilpotent. Berikut ini adalah definisi derivasi nilpotent, yang merupakan bentuk lain dari derivasi.

Definisi 2.4.4 Pemetaan $f : R \to R$ dikatakan nilpotent jika ada suatu bilangan bulat positif n yang sama untuk semua $x \in R$, sehingga $f^n(x) = 0$ untuk setiap $x \in R$. Bilangan terkecil n dimana kondisi $f^n(x) = 0$ berlaku untuk setiap $x \in R$ disebut indeks nilpotensi dari f dan dilambangkan dengan $n = nil(f)$ (Chung, 1985).

Adapun perbedaan antara derivasi nil dan derivasi nilpotent yaitu yang pertama dari segi universalitas n. Dalam kasus nilpotent, ada satu nilai n yang berlaku untuk semua elemen x di R sedangkan dalam kasus nil, nilai n bisa berbeda-beda tergantung pada elemen x. Yang kedua dari segi ruang lingkup, nilpotent adalah konsep yang lebih ketat karena mensyaratkan bahwa iterasi n-kali dari f menghasilkan nol untuk setiap elemen di R dengan n yang sama. Sedangkan, dalam konsep nil, n dapat bervariasi untuk setiap elemen.

Berikut merupakan contoh derivasi nilpotent.

Contoh 2.4.5 Diberikan ring $R = M_2(\mathbb{Z})$ yaitu ring yang terdiri atas semua matriks berukuran 2×2 dengan entri-entri bilangan bulat. Pemetaan $d : M_2(\mathbb{Z}) \to M_2(\mathbb{Z})$ didefinisikan sebagai:

$$d(A) = [B, A] = BA - AB,$$

dengan $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$, dan $A \in M_2(\mathbb{Z})$.

Diberikan sebarang $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$. Berlaku:

$$\begin{aligned} d(A) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c & d-a \\ 0 & -c \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Selanjutnya, iterasi kedua dari derivasi d, yaitu $d^2(A) = d(d(A))$, berlaku:

$$\begin{aligned} d^2(A) &= Bd(A) - d(A)B \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d-a \\ 0 & -c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c & d-a \\ 0 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -2c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Lebih lanjut, iterasi ketiga dari derivasi d, yaitu $d^3 = d(d^2(A))$, berlaku:

$$\begin{aligned} d^3(A) &= Bd^2(A) - d^2(A)B \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dengan demikian, derivasi d merupakan derivasi nilpotent dengan indeks nilpotensi $n = 3$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil tahun ajaran 2024/2025 di Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan studi literatur dan analisis teoritis, dengan mengumpulkan referensi seperti jurnal, artikel ilmiah, buku, dan sumber lainnya yang terkait dengan penelitian ini. Secara umum langkah-langkah penelitian ini sebagai berikut.

1. Mengkaji teori terkait grup, semigrup, ring, derivasi pada ring, ideal-δ, dan derivasi nil.
2. Mengkonstruksi derivasi nil dan menyelidiki indeks nilpotensi derivasi nil pada ring polinomial.
3. Menyelidiki kaitan antara derivasi nil dan derivasi nilpotent.
4. Menyelidiki sifat-sifat derivasi nil.
5. Menyelidiki kaitan jenis derivasi dan bentuk ideal dari konsep ideal-δ dan mengkonstruksi derivasi nil pada ring faktor R/I.

Langkah-langkah penelitian dapat dilihat pada diagram berikut:

Mengkaji teori aljabar abstrak yaitu grup (Fitriani dan Faisol, 2022), semigrup, ring, subring (Rasiman dkk., 2018), dan ideal (Wahyuni dkk., 2021). Memperlajari derivasi (Huang dkk., 2023), komposisi derivasi, kombinasi linear derivasi, ideal-δ (Helmi dkk., 2013). Mempelajari derivasi nil pada ring (Chung, 1985), derivasi nil pada ideal (Ali dkk., , 2024), derivasi nilpotent, kombinasi linear derivasi nil, dan ideal-δ pada derivasi nil suatu ring.

↓

Tahap 1 Mengkonstruksi derivasi nil pada ring polinomial

↓

Tahap 2 Menyelidiki sifat indeks nilpotensi derivasi nil pada ring polinomial

↓

Tahap 3 Menyelidiki perbedaan derivasi nil dan derivasi nilpotent

↓

Tahap 4 Menyelidiki kaitan antara derivasi nil dan derivasi nilpotent

↓

Tahap 5 Menyelidiki sifat-sifat derivasi nil

↓

Tahap 6 Menyelidiki kaitan jenis derivasi dan bentuk ideal dari konsep ideal-δ

↓

Tahap 7 Mengkonstruksi derivasi nil pada ring faktor R/I

↓

Tahap 8 Memberikan contoh ilustrasi dari sifat dan teorema yang diperoleh

Gambar 3.1 Langkah-langkah penelitian

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa derivasi nil, yaitu untuk setiap elemen dalam ring, terdapat iterasi tertentu dari derivasi tersebut yang menghasilkan nol, dapat diterapkan pada ring polinomial $R[x]$ dan indeks nilpotensi $n = k + 1$ dengan k derajat tertinggi dari polinomial $p(x) \in R[x]$. Selain itu, penelitian ini menunjukkan bahwa setiap derivasi nilpotent juga merupakan derivasi nil, namun tidak berlaku sebaliknya.

Selanjutnya, penelitian ini juga menunjukkan bahwa derivasi nil dapat digunakan untuk membentuk dan menganalisis kombinasi linear dari n derivasi nil yang juga merupakan derivasi nil. Selain itu, penelitian ini menemukan bahwa kombinasi linear dari derivasi yang bukan merupakan derivasi nil tidak selalu menghasilkan derivasi nil, dan jika salah satu derivasi dalam kombinasi tersebut bukan merupakan derivasi nil, maka hasilnya juga tidak selalu merupakan derivasi nil. Derivasi nil juga dapat dikembangkan dalam konsep ideal-δ pada ring polinomial. Ideal I akan menjadi ideal-δ jika derivasi dari setiap elemen pembentuk ideal tetap berada dalam ideal tersebut. Selain itu, derivasi nil juga dapat diterapkan pada ring faktor R/I dari konsep ideal-δ.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil pada penelitian ini belum dapat diidentifikasi secara spesifik struktur ideal yang selalu menjadi ideal-δ jika δ merupakan derivasi nil. Oleh karena itu, disarankan untuk dapat menyelidiki karakteristik atau kondisi tertentu pada struktur ideal yang dapat memastikan bahwa ideal tersebut akan tetap stabil terhadap operasi derivasi nil δ pada penelitian selanjutnya.

DAFTAR PUSTAKA

Ali, S., Rafiquee, N. N., & Varshney, V. (2024). Certain types of derivations in rings: A survey. *J. Indones. Math. Soc.*, 30(02), 256-306.

Andari, A. (2015). *Teori Grup*. Universitas Brawijaya Press, Malang.

Ber, A., Kudaybergenov, K., & Sukochev, F. (2020). Notes on Derivations of Murray–von Neumann algebras. *Journal of Functional Analysis*, 279(1), 1-26.

Chung, L. O. (1985). Nil derivations. *Journal of Algebra*, 95(1), 20-30.

Chung, L. O., & Kobayashi, Y. (1985). Nil derivations and chain conditions in prime rings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 94(2), 201-205.

Dhara, B., & Sharma, R. K. (2009). On additive mappings in rings with identity element. *International Mathematical Forum*, 4(15), 727-732.

Ernanto, I. (2018). Sifat-sifat ring faktor yang dilengkapi derivasi. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, 1(1), 12-21.

Felzenszwalb, B., & Lanski, C. (1983). On the Centralizers of Ideals and Nil Derivations. *Journal of Algebra*, 83(1), 520-530.

Fitriani, & Faisol, A. (2022). *Grup*. Matematika, Yogyakarta.

Fošner, A., Baydar, N., & Strasek, R. (2015). Remarks on Certain Identities with Derivations on Semiprime Rings. *Ukrainian Math. J.*, 66(10), 1609-1614.

Helmi, M. R., Marubayashi, H., & Ueda, A. (2013). Differential Polynomial Rings Which Are Generalized Asano prime Ring. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 44(5), 673-681.

Huang, J., Kudaybergenov, K., & Sukochev, F. (2023). Ring Derivations of Murray–von Neumann algebras. *Linear Algebra and its Applications*, 672(1), 28-52.

Hura, O. L., Yanita, Y., & Bakar, N. N. (2019). Teorema Pembagian Pada Ring Polinomial $R[X]$. *Jurnal Matematika Unand*, 8(1), 249-254.

Kaygorodov, I. B., & Popov, Y. S. (2014). Alternative algebras admitting derivations with invertible values and invertible derivations. *Izv. Math.*, 78(5), 922-936.

Malik, D. S., Moderson, J. M., & Sen, M. K. (1998). *Fundamental of Abstract Algebra*. McGraw-Hill Company, New York.

Melaibari, A., Muthana, N., & Al-Kenani, A. (2016). Homoderivations on Rings. *General Mathematics Notes*, 35(1), 1-8.

Rasiman, Rubowo, M. R., & Pramasdyahsari, A. S. (2018). *Teori Ring*. Univ. PGRI Semarang Press, Semarang.

Sahai, M., & Ansari, S. F. (2022). Derivations and Centralizers in Rings. *Palestine Journal of Mathematics*, 11(2), 413-419.

Setiawan, A. (2014). *Dasar-dasar Aljabar Modern: Teori Grup & Teori Ring*. Tisara Grafika, Salatiga.

Thomas, A. B., Puspita, N. P., & Fitriani, F. (2024). Derivation on Several Rings. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 18(3), 1729-1738.

Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., Yuwaningsih, D. A., & Hartanto, A. D. (2021). *Teori ring dan modul*. UGM Press, Yogyakarta.