# ANALISIS KESTABILAN PEMBERIAN OBAT ANTI TUBERKULOSIS PADA STUDI KASUS PENYAKIT TUBERKULOSIS PADA ANAK MENGGUNAKAN MODEL SIR

**Skripsi**

**Oleh**

**SYAKILA AMANDA**
**NPM. 2157031011**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS LAMPUNG**
**BANDAR LAMPUNG**
**2025**

**ABSTRACT**

**SITR MATHEMATICAL MODEL OF DISPERSAL TUBERCULOSIS DISEASE IN CHILDREN**

By

**Syakila Amanda**

The SIR model is a commonly used mathematical model to analyze the spread of disease. One example of a disease that can be studied using this model is tuberculosis (TBC). TBC is a contagious disease that is transmitted through the air. The study aims to examine the SIR model with administration anti-tuberculosis medicine. The result obtained when $R_0 < 1$, the stability of teh disease-free equilibrium pointis locally asymptotically stable. Conversely, if $R_0 > 1$, then the stability of the disease endemic equilibrium point is locally asymptotically stable. Administration anti-tuberculosis medicine in the model plays a significant role to reduce the spread of the disease when the minimum level of administration anti-tuberculosis medicine $n_v > \frac{R_0-1}{R_0\theta}$.


**Keywords:** SIR Model, Childhood Tuberculosis, Basic Reproduction, Anti-Tuberculosis Medicine

# ABSTRAK

## ANALISIS KESTABILAN PEMBERIAN OBAT ANTI TUBERKULOSIS PADA STUDI KASUS PENYAKIT TUBERKULOSIS PADA ANAK MENGGUNAKAN MODEL SIR

**Oleh**

**Syakila Amanda**

Model matematika yang umum dipakai untuk menganalisis penyebaran penyakit adalah model SIR. Salah satu contoh penyakit yang dapat dikaji dengan menggunakan model ini adalah *Tuberculosis* (TBC). TBC merupakan penyakit yang mudah menular melalui udara. Penelitian bertujuan untuk mengkaji model SIR dengan asumsi adanya pemberian Obat Anti Tuberkulosis (OAT). Hasil penelitian menunjukan ketika $R_0 < 1$, maka kestabilan titik keseimbangan bebas penyakit stabil lokal asimtotik. Sedangkan, jika $R_0 > 1$, maka kestabilan titik keseimbangan endemik penyakit stabil lokal asimtotik. Pemberian OAT dalam model berperan signifikan untuk mengurangi penyebaran apabila tingkat minimun pemberian OAT mencapai $n_v > \frac{R_0-1}{R_O\theta}$.
**Kata-kata kunci:** Model SIR, Tuberkulosis Pada Anak, Bilangan Reproduksi Dasar, Obat Anti Tuberkulosis.

**ANALISIS KESTABILAN PEMBERIAN OBAT ANTI TUBERKULOSIS PADA STUDI KASUS PENYAKIT TUBERKULOSIS PADA ANAK MENGGUNAKAN MODEL SIR**

**SYAKILA AMANDA**

**Skripsi**

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS LAMPUNG**
**BANDAR LAMPUNG**
**2025**

| | | |
|---|---|---|
| Judul Skripsi | : | **ANALISIS KESTABILAN PEMBERIAN OBAT ANTI TUBERKULOSIS PADA STUDI KASUS PENYAKIT TUBERKULOSIS PADA ANAK MENGGUNAKAN MODEL SIR** |
| Nama Mahasiswa | : | *Syakila Amanda* |
| Nomor Pokok Mahasiswa | : | **2157031011** |
| Program Studi | : | **Matematika** |
| Fakultas | : | **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam** |

**MENYETUJUI**

1. Komisi Pembimbing

Dorras

**Dra. Dorrah Azis, M.Si.**
NIP 198406272006042001

**Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.**
NIP 198002062003121003

2. Ketua Jurusan Matematika

**Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.**
NIP. 197403162005011001

**MENGESAHKAN**

1. Tim penguji

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ketua | : | **Dra. Dorrah Azis, M.Si.** | Dorrah ............... |
| Sekretaris | : | **Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** | ............... |
| Penguji Bukan Pembimbing | : | **Dr. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.** | ............... |

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

**Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.**
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **31 Januari 2025**

## PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

| | | |
|---|---|---|
| Nama | : | **Syakila Amanda** |
| Nomor Pokok Mahasiswa | : | **2157031011** |
| Jurusan | : | **Matematika** |
| Judul Skripsi | : | **Analisis Kestabilan Pemberian Obat Anti Tuberkulosis Pada Studi Kasus Penyakit Tuberkulosis Pada Anak Menggunakan Model SIR** |

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 31 Januari 2025

Penulis


Syakila Amanda

# RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Syakila Amanda,lahir di Krui Pesisir Barat pada tanggal 21 April 2003. Penulis merupakan anak pertama dari 3 bersaudara pasangan Bapak Sunarno dan Ibu Efrida Yanti.

Penulis menempuh pendidikan di Krui yaitu, Taman Kanak-kanak (TK) Dharma Wanita, Seklolah Dasar (SD) Negeri 1 Pasar Krui, Sekolah Menengah Pertama (SMP) Negeri 2 Pesisi Tengah dan Sekolah Menengah Atas (SMA) Negeri Pesisir Tengah. Setelah itu penulis diterima sebagai mahasiswa Program Studi S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur Mandiri pada tahun 2021.

Selama menjadi mahasiswi, penulis aktif di kegiatan intrakampus yaitu, Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) Universitas Lampung 2021 sebagai Anggota Bidang Kaderisasi dan Kepemimpinan, Badan Eksekutif Mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (BEM FMIPA) Universitas Lampung 2022 sebagai Staf Ahli Dinas Pemberdayaan Sumber Daya Mahasiswa, Badan Eksekutif Mahasiswa Universitas Keluarga Besar Mahasiswa (BEM-U KBM) Universitas Lampung 2023 sebagai Direktur Jenderal (Dirjen) Jurnalistik Kementrian Komunikasi dan Informasi (Kominfo) dan Badan Eksekutif Mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (BEM FMIPA) Universitas Lampung 2024 sebagai Sekretaris Dinas Kajian dan Aksi Strategis (Kastrat).

Kemudian pada bulan Desember 2023 sampai Februari 2024 penulis melaksanakan Kerja Praktik di Badan Pendapatan Daerah (BAPENDA) Provinsi Lampung. Selanjutnya pada bulan Juni sampai Agustus 2024 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata di Desa Braja Kencana, Kec. Braja Slebah, Kab. Lampung Timur, Provinsi Lampung.

# KATA INSPIRASI

*”allahumma yassir walaa tu’assir”*

*”inna ma’al-’usri yusra”*
(QS. Al-Insyirah: 5-6)

# PERSEMBAHAN

Dengan mengucap Alhamdulillah dan syukur kepada Allah SWT atas nikmat serta hidayah-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan Bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

**Ayah dan Ibuku Tercinta**

Terimakasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini. Terimakasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

**Dosen Pembimbing dan Pembahas**

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

**Sahabat-sahabatku**

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

**Almamater Tercinta**
Universitas Lampung

# SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul ”Analisis Kestabilan Pemberian Obat Anti Tuberkulosis Pada Kasus Penyakit Tuberkulosis Pada Anak Menggunakan Model SIR”.
Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Dra. Dorrah Azis, M.Si. selaku pembimbimg 1 yang telah membimbing dengan sabar, memotivasi, dan memberikan arahan sehingga skripsi ini dapat terselesaikan tepat waktu.

2. Bapak Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku pembimbing 2 yang telah memberikan dukungan, arahan, masukan dan waktunya untuk membimbing dalam proses penyusunan skripsi ini.

3. Bapak Dr. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D. selaku pembahas atas kesediaanya untuk menguji dan dengan sabar memberikan masukan, kritik, dan saran.

4. Bapak Drs. Nusyirwan, M.Si. selaku pembimbing akademik yang selalu membimbing perihal akademik selama perkuliahan.

5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unversitas Lampung.

6. Seluruh dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA Unila.

7. Kedua orang tuaku, adik-adikku, serta keluarga yang sudah memberikan dukungan selama perkuliahan ini.

8. Muhammad Misbahul Muchtar yang selalu memberikan semangat, bantuan, motivasi, kasih sayang dan menemani penulis pada masa perkuliahan sampai penyusunan skripsi ini.

9. Fitri Handayani yang selalu menemani dan membantu saat kerja praktik hingga masa penyusunan skripsi ini berlangusng.

10. $24/7$ yang menemani masa perkuliahan di kampus.

11. Teman-teman Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA Unila angkatan 2021 dan semua pihak yang membantu dan tidak dapat disebutkan satu persatu.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 31 Januari 2025

Syakila Amanda

# DAFTAR ISI

# DAFTAR TABEL

# DAFTAR GAMBAR

# BAB I

# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang Masalah

Penyakit Tuberkulosis (TBC) merupakan penyakit menular yang dijumpai pada segala usia termasuk anak. TBC merupakan suatu penyakit yang disebabkan oleh organisme kompleks *Mycobacterium tuberculosis*, yang meliputi *M. africanum, M. bovis*, dan *M. canetti* (dan lainnya yang tidak memengaruhi manusia). Penyakit ini ditularkan melalui saluran napas kecil yang terinfeksi (sekitar 1-5 mm) dan dikeluarkan berupa *droplet nuklei* dari pengidap TBC dan dihirup individu lain kemudian masuk sampai ke dalam alveolus melalui kontak dekat (Thomas, 2017).

Tanda dan gejala penyakit TBC pada anak antara lain batuk, perasaan lemah dan lesu, penurunan berat badan atau kegagalan berkembang, demam, dan keringat malam. Bayi, anak kecil, dan anak dengan gangguan sistem imun (misalnya anak dengan HIV) berisiko tinggi untuk berkembang menjadi bentuk TBC yang parah seperti meningitis TBC atau penyakit TBC milier (Sterling dkk, 2020).

Berdasarkan *World Health Organization* (WHO, 2023), Indonesia menempati peringkat kedua di dunia setelah negara India dengan angka estimasi kasus TBC baru sebanyak 1.060.000 kasus dengan kematian mencapai 134.000 per tahun. Kesenjangan antara pasien TBC yang ditemukan dan diobati dengan pasien TBC yang diperkirakan ada di Indonesia masih di atas 30% dalam tiga tahun terakhir. Provinsi Lampung berada pada grafik yang fluktuatif untuk angka penemuan kasus TBC atau *Case Detection Rate* (CDR) dan angka keberhasilan pengobatan atau *Success Rate* (SR) dari tahun ke tahun. Pada tahun 2023, proporsi kasus TBC anak sebesar 67% dari semua kasus TBC di Indonesia dengan 1.060.000 kasus. Berdasarkan data Dinas Kesehatan Provinsi Lampung Tahun 2023, jumlah kasus baru TBC sebanyak 19.618 kasus dengan

3.513 di antaranya ialah kasus TBC anak usia 0-14 tahun. Ditinjau dari CDR Kabupaten Metro sebagai daerah tertinggi dengan 109% kasus baru TBC dan terendah berada pada Kabupaten Lampung Timur dengan 29% kasus. Semakin tinggi CDR mengartikan semakin banyak kasus TBC yang ditemukan secara dini dan diobati, sehingga menurunkan angka penularan di masyarakat. CDR yang rendah mengartikan kasus TBC masih banyak yang belum ditemukan sehingga mengindikasikan penularan TBC yang tinggi di Kabupaten/Kota tersebut (Dinas Kesehatan Provinsi Lampung, 2023).

Penyakit TBC pada anak mendapat perhatian khusus oleh masyarakat dan pemerintah serta tak luput dari para ilmuawan karena dapat mengancam kehidupan manusia. Mengingat pentingnya pengetahuan lebih lanjut mengenai TBC pada anak, maka diperlukan penerapan model matematika dalam penyebaran penyakit TBC pada anak. Dalam penerapan model matematika untuk penyebaran penyakit TBC, populasi manusia dibagi menjadi tiga bagian yaitu: sub populasi *Susceptible* adalah sub populasi yang rentan terhadap penyakit TBC, sub populasi *Infectious* adalah sub populasi yang terinfeksi dan menularkan TBC, dan sub populasi *Recovered* adalah sub populasi yang telah sembuh.

Penelitian terkait pemodelan matematika pada penyebaran penyakit TBC menggunakan model SIR telah banyak dilakukan Muhammad S.D. dkk (2019) tentang Faktor Resiko Tuberkulosis Pada Anak, Leni Darlina (2012) tentang Kestabilan Titik Equilibrium Model SIR Penyakit Fatal Dengan Migrasi, Muhammad Faudzi. dkk. (2023) tentang Model SIR untuk Penyebaran Tuberkulosis di Kabupaten Jepara, dan K. Queen Fredina. dkk. (2012) tentang Model SIR untuk Penyebaran Penyakit Tuberkulosis.

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan terhadap model SIR untuk penyakit TBC, timbul motivasi melakukan penelitian model SIR untuk penyakit TBC pada anak dengan menambahkan asumsi adanya pemberian Obat Anti Tuberkulosis (OAT).

## 1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Memodelkan penyebaran penyakit *Tuberculosis* (TBC) pada anak.
2. Mencari Parameter yang berpengaruh paling signifikan dalam model penyebaran penyakit *Tuberculosis* (TBC) pada anak.

## 1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Didapatkan model matematika pada penyakit *Tuberculosis* (TBC) pada anak dan analisis kestabilannya.
2. Pengetahuan tentang pemodelan penyakit *Tuberculosis* (TBC) pada anak.
3. Mengetahui akan pentingnya ilmu dan terapan matematika pada dunia kesehatan.

# BAB II

# TINJAUAN PUSTAKA

## 2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan suatu turunan fungsi yang belum diketahui, atau persamaan itu mungkin juga lebih melibatkan fungsi itu sendiri dan konstanta. Dari turunan yang membentuk dalam persamaan diferensial akan menentukan jenis dan klasifikasi persamaan diferensial itu sendiri (Prayudi, 2006).

## 2.2 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat $n$ buah persamaan diferensial, dengan $n$ buah fungsi yang tidak diketahui, dimana $n$ merupakan bilangan bulat positif lebih besar sama dengan dua. Antara persamaan diferensial yang satu dengan yang lain saling keterkaitan dengan konsisten.

Bentuk umum dari suatu sistem $n$ persamaan orde pertama mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= g_1\ (\ t, x_1, x_2, ..., x_n) \\
\frac{dx_2}{dt} &= g_2\ (\ t, x_1, x_2, ..., x_n) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= g_n\ (\ t, x_1, x_2, ..., x_n)
\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Dengan $x_1, x_2, ..., x_n$ adalah variabel bebas dan $t$ adalah variabel terikat, sehingga $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), ..., x_n = x_n(t)$, dimana $\frac{dx_n}{dt}$ merupakan derivatif fungsi $x_n$ terhadap $t$, dan $g$ adalah fungsi yang tergantung pada variabel $x_1, x_2, ..., x_n$ dan $t$ (Neuhauser, 2004).

### 2.3 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang memuat turunan terhadap fungsi yang memuat satu variabel bebas. Jika $x$ adalah fungsi dari $t$, maka contoh persamaan diferensal biasa adalah:

$$\frac{dx}{dt} = t^2 cosx \tag{2.3.2}$$

dimana persamaan tersebut memiliki orde satu. Orde dari persamaan diferensial adalah turunan tertinggi pada fungsi tidak diketahui (peubah tidak bebas) yang muncul dalam persamaan diferensial (Campbell & Haberman, 2008)

### 2.4 Pemodelan Matematika

Model adalah representasi penyederhanaan dari sebuah realita yang kompleks (biasanya bertujuan untuk memahami realita tersebut) dan mempunyai ciri-ciri yang sama dengan tiruannya dalam menyelesaikan permasalahan. Model adalah karakteristik umum yang mewakili sekelompok bentuk yang ada atau representasi suatu masalah dalam bentuk yang lebih sederhana dan mudah dikerjakan. Dalam matematika, teori model adalah ilmu yang menyajikan konsep-konsep matematis melalui konsep himpunan atau ilmu tentang model-model yang mendukung suatu sistem metematis.

Teori model diawali dengan asumsi keberadaan objek-objek matematika (misalnya keberadaan semua bilangan) dan kemudian mencari dan menganalisis keberadaan operasi-operasi, relasi-relasi, atau aksioma-aksioma yang melekat pada masing-masing objek atau pada objek-objek tersebut. Model matematika yang diperoleh dari suatu masalah masalah matematika yang diberikan, selanjutnya diselesaikan dengan aturan-aturan yang ada. Penyelesaian yang diperoleh, perlu diuji untuk mengetahui apakah penyelesaian tersebut valid atau tidak valid. Hasil yang valid akan menjawab secara tepat model matematikanya dan disebut solusi matematika. Jika penyelesaian tidak valid atau tidak memenuhi model matematika maka solusi masalah belum ditemukan, dan diperlukan pemecahan ulang atas model matematikanya (Frederick H. Bell, 1978).

## 2.5 Model SIR

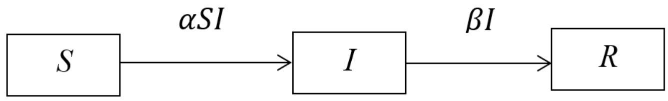
Model SIR pertama kali diperkenalkan oleh W.O. Kermack dan Mc. Kendrick dalam makalahnya yang berjudul *A Contribution to the Mathematical Theory of Efidemis*, yang kemudian muncul dalam *Proceding Royal Societyt London* menjadi peranan penting dalam perkembangan matematika epidemi. Mengenai rangkuman tersebut telah dituliskan secara lengkap oleh Murray. Di dalam modelnya, populasi manusia dibagi menjadi tiga kelompok, yaitu suspek dengan simbol S, terinfeksi dengan simbol I, dan sembuh atau *recovery* dengan simbol R, yang masing-masing diberikan dalam bentuk $s$, $i$ dan $r$.

Jumlah total dari keseluruhan kelompok tersebut adalah

$$n = s + i + r \tag{2.5.3}$$

S atau *susceptible* dalam pemodelan SIR merupakan individu yang tidak terinfeksi tetapi golongan ini dapat tertular penyakit. Oleh karena itu golongan ini juga memiliki kemungkinan untuk menjadi terinfeksi menjadi I atau *infected*. I atau *infected* merupakan individu yang dapat menyebarkan penyakit pada individu yang dapat menyebarkan penyakit dinamakan periode penyakit. Setelah mengalami periode penyakit kemudian individu ini pindah dan menjadi individu yang sembuh atau *recovered*. R atau *recovered* merupakan individu yang telah sembuh atau kebal kehidupannya.

Model SIR umumnya ditulis dalam bentuk persamaan diferensial biasa, yang merupakan salah satu bagian model deterministik (bukan pemilihan acak, hal ini disebabkan karena kesamaan kondisi awal yang diberikan untuk mendapatkan output), dengan waktu kontinu (yang berlawanan dengan waktu diskrit). Sehingga dapat diasumsikan perubahan individu terinfeksi dan *susceptible* terjadi dengan laju proporsional terhadap jumlah populasi. Laju perubahan individu terinfeksi baru didefinisikan sebagai $\alpha si$ - $\beta i$, dengan $\alpha$ merupakan nilai transmisivitas sedangkan $\beta$ merupakan nilai laju penyembuhan. Individu yang terinfeksi diasumsikan dapat kembali sembuh dengan probabilitas konstan sepanjang waktu, yang kemudian berubah secara konstan dengan laju penyembuhan perkapita yang dinotasikan sebagai $\beta$ dan keseluruhannya disimbolkan sebagai $\beta i$. Dengan asumsi ini, formulasi model SIR dapat dirumuskan seperti gambar berikut:




**Gambar 2.1 Skema Pembentukan Model SIR Sederhana**

Maka persamaan diferensial yang didapat dalam penjabaran tersebut adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -\alpha si \\ \frac{di}{dt} &= \alpha si - \beta i \\ \frac{dr}{dt} &= \beta i \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

Persamaan ini menggambarkan mengenai transisi masing-masing individu dari $S$ ke $I$ lalu ke $R$. Dengan menambahkan ketiga persamaan tersebut dapat ditunjukan dengan mudah bahwa total populasi adalah konstan (Iswanto, 2012).

## 2.6 Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan adalah kondisi di mana suatu sistem tetap tidak berubah seiring berjalannya waktu. Jika dinamika sistem dijabarkan melalui persamaan diferensial, titik keseimbangan bisa diidentifikasikan dengan menetapkan turunan pertama tersebut menjadi nol.

Sebagai contoh, misal diberikan suatu persamaan diferensial yang berbentuk sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = g(x, y) \tag{2.6.5}$$

Sebuah titik $(x_0, y_o)$ dianggap sebagai titik keseimbangan dari sistem persamaan di atas, jika memenuhi kondisi $f(x_0, y_0) = 0$ dan $g(x_0, y_0) = 0$. Karena turunan dari suatu konstanta selalu sama dengan nol, maka pasangan fungsi $x(t) = x_0$ dan $y(t) = y_0$ merupakan solusi keseimbangan dari sistem (2.6.5) (Campbell & Haberman, 2008).

**Teorema 2.1 (Olsder dkk., 2008.)**

1. Titik keseimbangan sistem persamaan diferensial dianggap stabil, jika seluruh bagian bilangan real dari nilai eigen matriks Jacobian adalah negatif.
2. Titik keseimbangan sistem persamaan diferensial dianggap tidak stabil, jika paling tidak satu nilai eigen matriks Jacobian adalah positif.

## 2.7 Kestabilan Sistem

Untuk mendapatkan kestabilan suatu sistem diberikan metode yang lebih mudah dengan menyelidiki pengaruh perubahan kecil pada syarat awal. Jika titik $(x^*, y^*)$ adalah titik keseimbangan maka diselidiki pengaruh perubahan kecil pada titik keseimbangan tersebut.

Jika titik $(x, y)$ merupakan titik disekitar titik keseimbangan tersebut maka secara matematis titik $x$,$y$ yang dinotasikan sebagai

$$(x, y) = (x^* + \Delta x, y^* + \Delta y) \tag{2.7.6}$$

Pendekatan fungsi $f_1(x,y)$ dan $f_2(x,y)$ dapat ditentukan menggunakan ekspansi deret taylor sebagai berikut

$$f_{1,2}\left(x,y\right) \approx f_{1,2}\left(x^*,y^*\right) + \frac{\partial f_{1,2}\left(x^*,y^*\right)}{\partial x}(x-x^*) + \frac{\partial f_{1,2}\left(x^*,y^*\right)}{\partial y}(y+y^*) \tag{2.7.7}$$

karena $(x^*,y^*)$ adalah titik keseimbangan maka $f_{1,2}\left(x^*,y^*\right) - 0$. Oleh karena itu, sistem $\frac{dx}{dt} = f_1(x,y)$ dan $\frac{dy}{dt} = f_2(x,y)$ dapat didekati sebagai sistem linear

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial f_1(x^*,y^*)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f_1(x^*,y^*)}{\partial y}\Delta y \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial f_2(x^*,y^*)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f_2(x^*,y^*)}{\partial y}\Delta y \end{aligned} \tag{2.7.8}$$

Sistem linear di atas dapat disajikan dalam bentuk matriks

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^*,y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x^*,y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x^*,y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x^*,y^*)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \\ &= J(x) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.7.9}$$

Matriks $J(x)$ pada sistem di atas merupakan matriks Jacobian (Khamsi, 2004).

## 2.8 Matriks Jacobian

**Definisi 2.1 (Hale, 1991)**

Diberikan $g = (g_1, ..., g_n)$ pada sistem (2.2.1) di atas dengan $g_i \epsilon c^1(E), i = 1, 2, ..., n$.
Matriks:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial g_1}{n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial g_n}{n}(x) \end{bmatrix} \tag{2.8.10}$$

dinamakan matriks Jacobian $g$ di titik $x$.

Selanjutnya, akan dilakukan penyelesaian dengan metode linearisasi. Berikut ini definisi metode linearisasi.

**Definisi 2.2 (Meiss, 2007)**

Sistem $\dot{x} = J(g(x))$ disebut linearisasi sistem (2.2.1) di $(x)$.
Setelah proses linearisasi dilakukan pada sistem (2.2.1), kemudian perilaku kestabilan disekitar tiitk *equilibrium* dapat ditentuan. Kestabilan dari titik *equilibrium* pada sistem (2.2.1) dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen matriks Jacobian pada metode linearisasi. Nilai eigen tersebut dapat ditentukan melalui persamaan karakteristik dari matriks Jacobian dititik $x$.

## 2.9 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan

Kestabilan sistem linier dan linierisasi sistem nonlinier dikenal sebagai kestabilan titik keseimbangan. Kestabilan pada titik keseimbangan dapat didefinisikan dengan mengevaluasi tanda bagian real matriks Jacobian di sekitar titik keseimbangan tersebut.

**Definisi 2.3**

Jika $J$ adalah matriks berukuran $n \times n$, maka vektor tak nol $x$ disebut sebagai vektor karakteristik dari $J$ jika memenuhi:

$$Jx = \lambda x \tag{2.9.11}$$

Skalar $\lambda$ yang memenuhi persamaan karakteristik $det(Jx = \lambda x) = 0$ disebut nilai eigen dari matriks $J$, dan vektor $x$ dianggap vektor karakteristik yang sesuai dengan $\lambda$.
Persamaan matriks Jacobian dapat dituliskan sebagai berikut:

$$J = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_3}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{2.9.12}$$

Untuk mendapatkan nilai matriks $J$ yang berukuran $n \times n$, maka dapat mengulangi Persamaan (2.9.11) atau ekuivalennya $(\lambda I - J)x = 0$. Jika matriks $J \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, maka dapat dituliskan sebagai $\begin{bmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{bmatrix}$ atau $\lambda^2 - \lambda(a+d) + (ad - bc) = 0$ (Derouich & Boutayeb, 2008.)

Secara umum, karakteristik stabilitas titik keseimbangan memiliki sifat berikut:

1. Stabil:
   a. Semua nilai eigen real bersifat negatif ($\lambda_i < 0$ untuk semua $i$)
   b. Setiap komponen bilangan real dari nilai eigen kompleks kurang dari atau sama dengan nol ($R_e(\lambda_i) \leq 0$ untuk semua $i$)
2. Tidak Stabil:
   a. Terdapat nilai eigen real positif $\lambda_i > 0$ untuk semua $i$)
   b. Ada komponen bilangan real dari nilai eigen kompleks lebih besar dari nol ($R_e(\lambda_i) > 0$) untuk semua $i$)(Tu, 1994).

## 2.10 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz memberikan penilaian ketabilan sistem tanpa menghitung dasar-dasarnya. Metode ini menggunakan persamaan karakteristik polinomial untuk mengukur stabilitas sistem. Jika persamaan polinomial adalah persamaan karakteristik sistem, standar ini dapat diterapkan untuk mengevaluasi kestabilan sistem tersebut (A'maludin dkk., 2016).

Prosedur dalam menerapkan kriteria Routh-Hurwitz adalah sebagai berikut:

1. Persamaan polinom orde ke-$n$ dapat dituliskan:

$$det(\lambda I - A) = a_n \lambda^n + a_{n1} \lambda^{n-1} + ... + a_1 \lambda + a_0 \tag{2.10.13}$$

2. Koefisien nol atau negatif menunjukan bahwa ada satu atau lebih akar imajiner atau bagian real positif, menunjukan bahwa sistem tidak stabil.

3. Jika semua koefisien memiliki nilai positif, dapat membentuk matriks yang disebut *array Routh-Hurwitz* seperti yang ditunjukan dibawah ini:

$$\begin{bmatrix} \lambda^{n} & a_{n} & a_{n2} & a_{n4} & \dots \\ \lambda^{n1} & a_{n1} & a_{n3} & a_{n5} & \dots \\ \lambda^{n2} & b_{1} & b_{2} & b_{3} & \dots \\ \vdots & c_{1} & c_{2} & c_{3} & \dots \\ \lambda^{0} & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \tag{2.10.14}$$

Koefisien $b_1, b_2, ..., b_k$ dan $c_1, c_2, ..., c_k$ dapat dihitung menggunakan rumus-rumus berikut:

$$b_1 = -\frac{1}{a_{n1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n2} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix}, b_2 = -\frac{1}{a_{n3}} \begin{vmatrix} a_{n2} & a_{n4} \\ a_{n3} & a_{n5} \end{vmatrix}, \dots \tag{2.10.15}$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, c_2 = \frac{1}{b_2} \begin{vmatrix} a_{n3} & a_{n5} \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \dots \tag{2.10.16}$$

4. Jumlah akar yang tidak stabil dapat diidentifikasikan dengan melihat jumlah perubahan tanda di kolom pertama matriks (2.10.14).
5. Ketika semua elemen dalam kolom pertama matriks (2.10.14) memiliki nilai positif, dan koefisien persamaan karakteristik memiliki nilai positif, maka sistem dianggap stabil. Setelah kolom kedua mencapai nilai nol, iterasi diberikan.

## 2.11 Metode Numerik

Metode Numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematik sehingga dapat di pecahkan dengan operasi perhitungan atau aritmatika biasa (tambah, kurang, kali dan bagi). Metode numerik disebut juga sebagai alternatif dari metote analitik, yang merupakan metode penyelesain persoalan matematik dengan rumus-rumus aljabar yang sudah baku atau lazim. Disebut demikian, karena sering kali persoalan matematik sulit diselesaikan atau bahkan tidak dapat diselesaikan secara analitik. Sehingga dapat dikatakan bahwa persoalan matematika tersebut tidak mempunyai solusi analitik. Sehingga sebagai alternatifnya, persoalan matematik tersebut diselesaikan dengan metode numerik.

Perbedaan antara metode analitik dan metode numerik adalah metode analitik hanya dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang sederhana dan menghasilkan solusi yang sebenarnya atau solusi sejati. Solusi yang dihasilkan dari penyelesaian secara numerik merupakan solusi hampiran atau pendekatan yang mendekati solusi eksak atau solusi sebenarnya. Hasil penyelesain yang didapatkan dari metode numerik dan metode analitik memiliki selisih, dimana selisih tersebut dinamakan kesalahan atau *error* (Triatmodjo, 2002).

# BAB III

# METODE PENELITIAN

## 3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2024/2025 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

## 3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan metode penelitian kepustakaan atau studi literatur dengan menggunakan sumber-sumber dapat berupa buku, jurnal penelitian, skripsi, tesis, maupun internet. Langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menetapkan asumsi serta mendefinisikan parameter yang digunakan.
2. Mengembangkan model SIR untuk penyakit TBC pada anak dengan memasukan asumsi tentang pemberian Obat Anti Tuberkulosis.
3. Menentukan titik kesetimbangan model SIR pada penyakit TBC pada anak.
4. Mengidentifikasi nilai $(R_0)$ dengan menggunakan matriks Jacobian.
5. Melakukan analisis kestabilan dengan kriteria Routh-Hurwitz.
6. Menentukan jumlah minimum individu yang di beri Obat Anti Tuberkulosis.
7. Memberikan contoh simulasi numerik untuk melihat bagaimana penyakit TBC pada anak dapat menyebar dengan mempertimbangakan pemberian Obat Anti Tuberkulosis.

# BAB V

# KESIMPULAN DAN SARAN

## 5.1 Kesimpulan

Kesimpulan bahwa pemberian Obat Anti Tuberkulosis (OAT) dalam model berperan signifikan untuk mengurangi penyebaran penyakit apabila tingkat minimun vaksinasi mencapai $n_v > \frac{R_0-1}{R_0\theta}$, tetapi dikarenakan efikasi pemberian OAT adalah $85\%$ sehingga penyakit Tuberkulosis (TBC) pada anak tidak dapat sepenuhnya hilang karena penyakit ini dapat kambuh kembali.

## 5.2 Saran

Pada penelitian berikutnya, disarankan untuk mempertimbangkan penambahan faktor-faktor lain ke dalam model agar terbentuk model yang lebih komplek seperti biaya pengobatan dan kewajiban penggunaan masker.

# DAFTAR PUSTAKA


A'maludin, H., Faruk, A., & Cahyono, E. S. (2016). Analisis Kestabilan Model Epidermis SIR untuk Penyakit Tuberkulosis. *Prosiding SEMIRATA Bidang MIPA*.

Bell, Frederick H. (1978). *Teaching and Learning Mathematics in Secondary School*. Cetakan Kedua. Brown Company Publisher. Lowa.

Campbell, S.L. & Haberman, R. (2008). *Introduction to Differential Equations with Dynamical System*. Princeton University Press, New Jersey.

Derouich, M. & Boutayeb, A. (2008). An Avian Mathematical Model. *Applied Mathematical Sciences. 36(2):1749-1760.*

Dinas Kesehatan Provinsi Lampung. (2023). Profil Dinas Kesehatan Provinsi Lampung 2023. *Dinas Kesehatan Provinsi Lampung*. Diakses: 11 Oktober 2024.

Hale. J. K. dan Kocak, H. (1991). *Dynamic and Bofurcation*. Springe-verlag. New York.

Iswanto, R.J. (2012). *Pemodelan Matematika: Aplikasi dan Terapannya*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Khamsi, M. A. (2004). *Equilibrium Point Analysis: Linearization Tehcnique.* Utrecht University, Utrecht.

Meiss, J. K. (2007). *Differential Dynamical Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics. USA.

Neuhauser, C. (2004). *Calculus for Biology and Medicine*. Pearson Education, New Jersey.

Olsder, G. J., vanderWoude, J. W., Maks, J. G., & Jeltsema. (2011). *Mathematical System Theory 4th Edition., Netherland: VVSD.*

Sterling, T.R. (2020). Guidelines for the treatment of latent tuberculosis infection: recommendations from the National Tuberculosis Controllers Association and CDC. *Am J Transplant, 20(4), 1196-206.*

Thomas, T.A. (2017). Tuberculosis in Children. *Pediatr Clin North Am, 64(4), 893-909.*

Triatmodjo, B. (2002). *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Beta Offset, Yogyakarta.

Tu, P. N. V. (1994). *Dynamical System: An Introduction with Application in Economics and Biology*. Springer-Verlag, New York.

Prayudi. (2006). *Matematika Teknik*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

World Health Organization. (2023). Global Tuberculosis Report 2023. *World Heath Organization*. Diakses: 02 Oktober 2024.