DERIVASI JORDAN PADA RING POLINOMIAL R[x]

Skripsi

Oleh

DESI ELENA SITOMPUL
NPM. 2117031093

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

ABSTRACT

JORDAN DERIVATION ON POLYNOMIAL RING R[x]

By

Desi Elena Sitompul

Given a ring R. An additive mapping $d : R \to R$ is called a Jordan derivation if d satisfies the rule $d(a^2) = d(a)a + ad(a)$, for every $a \in R$. In this study, Jordan derivations are applied to the polynomial ring $R[x]$ to investigate its properties. The study begins by constructing a Jordan derivation on the polynomial ring $R[x]$, followed by an exploration of its specific properties within the algebraic structure, as well as the relationship between Jordan derivations on R and those on $R[x]$. Additionally, illustrative examples are provided to support the theories and theorems obtained. The concept of Jordan derivation broadens the understanding of algebraic structures through its application to polynomial rings.

Keywords: Polynomial ring, derivation, Jordan derivation, linear composition, linear combination.

ABSTRAK

DERIVASI JORDAN PADA RING POLINOMIAL R[x]

Oleh

Desi Elena Sitompul

Diberikan ring R. Suatu pemetaan aditif $d : R \to R$ disebut derivasi Jordan jika d memenuhi aturan $d(a^2) = d(a)a + ad(a)$, untuk setiap $a \in R$. Dalam penelitian ini, derivasi Jordan diterapkan pada ring polinomial $R[x]$ untuk menyelidiki sifat-sifatnya. Penelitian ini dimulai dengan mengkonstruksi derivasi Jordan pada ring polinomial $R[x]$, diikuti dengan penyelidikan sifat-sifat khususnya dalam struktur aljabar serta hubungan antara derivasi Jordan pada R dengan derivasi Jordan pada $R[x]$. Selain itu, diberikan contoh ilustrasi yang mendukung teori dan teorema yang diperoleh. Konsep derivasi Jordan memperluas pemahaman tentang struktur aljabar melalui penerapannya pada ring polinomial.

Kata-kata kunci: Ring polinomial, derivasi, derivasi Jordan, komposisi linear, kombinasi linear.

DERIVASI JORDAN PADA RING POLINOMIAL R[x]

DESI ELENA SITOMPUL

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

Judul Skripsi	:	**DERIVASI JORDAN PADA RING POLINOMIAL R[x]**
Nama Mahasiswa	:	**Desi Elena Sitompul**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2117031093**
Program Studi	:	**Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.	**Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si.**
NIP. 198406272006042001	NIP. 199306012019032021

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim penguji

Ketua	:	**Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**	....
Sekretaris	:	**Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Skripsi: **17 Januari 2025**

PERNYATAAN SKRIPSI

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Desi Elena Sitompul**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2117031093**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Derivasi Jordan pada Ring Polinomial R[x]**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 17 Januari 2025

Penulis,

10000
METERAI TEMPEL

Desi Elena Sitompul

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Desi Elena Sitompul yang lahir di Perawang pada tanggal 09 Desember 2001. Penulis merupakan anak ketiga dari tiga bersaudara yang terlahir dari pasangan M. Sitompul dan L. Purba.

Penulis menempuh pendidikan di SDN 005 Tualang pada tahun 2008 sampai tahun 2014. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan sekolah menengah pertama di SMPN 1 Tualang pada tahun 2014 sampai tahun 2017. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan sekolah menengah atas di SMAS RK Bintang Timur Rantauprapat pada tahun 2017 sampai tahun 2020.

Pada tahun 2021, penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa S1 di Jurusan Matematika Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung (UNILA) melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN).

Sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu kepada masyarakat, penulis melaksanakan kegiatan Kerja Praktik (KP) pada bulan Desember 2023 sampai Februari di Dinas Komunikasi, Informatika, dan Statistik Provinsi Lampung. Pada bulan Juli sampai Agustus penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Gunung Sugih Kecil, Kecamatan Jabung, Kabupaten Lampung Timur.

KATA INSPIRASI

”Segala perkara dapat kutanggung di dalam Dia yang memberi kekuatan kepadaku.”
(Filipi 4:13)

”Kepadamu akan kuberikan kunci Kerajaan Sorga. Apa yang kau ikat di dunia ini akan terikat di sorga dan apa yang kau lepaskan di dunia ini akan terlepas di sorga.”
(Matius 16:19)

”Masa depanmu bukanlah sesuatu yang akan datang, tetapi sesuatu yang kamu ciptakan hari ini.”

”It is okay to cry when you’re having a hard time, just cry it out loud. It’s okay.”
(S. Coups)

PERSEMBAHAN

Syukur kepada Allah
Puji syukur kepada Tuhan Yesus Kristus atas penyertaan-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Ayah dan Ibuku Tercinta

Terima kasih kepada ayah dan mamak atas segala pengorbanan, nasehat, doa serta dukungannya selama ini. Terima kasih telah memberikan pelajaran berharga kepada borumu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terima kasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat berjasa dalam membantu, memberikan motivasi dan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terima kasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasi, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta Universitas Lampung

SANWACANA

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yesus Kristus atas limpahan berkat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul “Derivasi Jordan pada Ring Polinomial R[x]“ dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing I sekaligus dosen pembimbing akademik yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan, dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Seluruh dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Teristimewa, untuk Ayah, Mama, abang Likas, abang Biher, Uda, Nanguda, Tulang, Nantulang, dan keluarga besar yang selalu memotivasi, memberikan dukungan, dan doa kepada penulis.

7. Terima kasih kepada diri sendiri atas perjuangan, keberanian menghadapi kesalahan, dan semangat untuk terus belajar, yang semuanya telah membawa penulis sampai pada titik ini, meskipun rasa lelah dan keraguan sempat menghampiri.
8. Untuk Maria Angelina Hutagalung, teman satu kamar yang selalu membawa warna di setiap hariku, terima kasih atas atas candaan yang menghibur di saat sulit dan atas kehadiranmu yang tak tergantikan. Kamu lebih dari sekadar teman, kamu adalah keluarga yang Tuhan hadirkan di tengah perjalanan ini. Semoga semua kebaikanmu kembali kepadamu dengan berlipat-lipat kebahagiaan dan cinta.
9. Terimakasih kepada Yunda Mabar yang selalu memberikan dukungan dan kebersamaan atas setiap momen yang kita lalui bersama. Kehadiranmu di tengah perjalanan ini selalu memberikan semangat dan kehangatan, baik dalam suka maupun duka. Semoga persahabatan kita selalu terjaga, dan kebahagiaan selalu menyertai setiap langkahmu.
10. Teman-teman satu bimbingan, Nadia, Nafdha, Dania, Rena, Isty, Rara, dan Ditha, yang telah membersamai penulis dalam penyusunan skripsi ini, terima kasih atas kebersamaan, dukungan, dan semangat yang tak henti-hentinya diberikan.
11. Untuk teman sekelas mabar (mahasiswa aljabar) yang sudah menjadi bagian dari perjalanan ini, terima kasih telah menjadi teman yang luar biasa. Setiap diskusi, kerja kelompok, dan tawa bersama telah memberi warna tersendiri dalam perjalanan ini. Semoga kita semua terus berkembang dan mencapai tujuan masing-masing.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 17 Januari 2025

Desi Elena Sitompul

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Konsep derivasi dalam matematika pertama kali dikembangkan oleh Newton (1687) pada abad ke-17, yang kemudian menjadi fundamental dalam analisis matematis. Seiring berjalannya waktu, konsep derivasi ini diperluas ke dalam struktur aljabar yang lebih abstrak melalui derivasi pada ring dan aljabar. Derivasi pada ring pertama kali diperkenalkan untuk menggambarkan operasi diferensial dalam konteks aljabar. Dalam hal ini, derivasi didefinisikan sebagai operator linear d pada suatu ring yang memenuhi dua sifat utama, yaitu linearitas dan aturan hasil kali Leibniz, yang mencerminkan konsep dasar derivasi dalam kalkulus (Lang, 2002). Pada ring polinomial $R[x]$, derivasi ini diterapkan untuk menggambarkan bagaimana elemen-elemen dalam ring saling berinteraksi melalui operasi diferensial.

Perkembangan dari teori derivasi mengarah pada pengenalan derivasi Jordan, yang pertama kali diperkenalkan oleh Pascual Jordan pada tahun 1934 dalam konteks aljabar non-asosiatif (Jordan, 1934). Derivasi Jordan merupakan generalisasi dari turunan biasa, dengan aturan yang lebih kompleks, termasuk aturan elemen kuadrat: $d(a^2) = d(a)a + ad(a)$. Pada tahun 1949, Jacobson mengembangkan teori derivasi dalam konteks ring dan aljabar Lie, serta menggali penerapan derivasi Jordan dalam struktur non-komutatif (Jacobson, 1949). Lebih lanjut, pada tahun 1957, Herstein mengkaji sifat-sifat derivasi Jordan dalam konteks ring matriks. Herstein menunjukkan bahwa derivasi Jordan pada ring matriks tertentu dapat dikarakterisasi melalui komutator dan anti-komutator, memberikan wawasan penting tentang struktur derivasi dalam aljabar matriks (Herstein, 1957). Penerapan derivasi Jordan pada ring polinomial $R[x]$ memberikan peluang untuk memahami struktur aljabar melalui operator yang lebih kuat dan fleksibel, yang dapat menggambarkan interaksi lebih kompleks antara elemen-elemen dalam ring tersebut.

Studi tentang derivasi Jordan berkembang lebih luas, terutama dalam teori ring dan aljabar. Khosravi dan Ahmed pada tahun 2014 mengkaji mengenai sifat-sifat derivasi Jordan dan aplikasinya dalam ring komutatif, serta hubungan antara derivasi Jordan dan ideal (Khosravi dan Ahmed, 2014). Çakmak pada tahun 2015 melakukan penelitian mengenai karakterisasi derivasi Jordan pada ring non-komutatif dan mengidentifikasi kondisi-kondisi tertentu yang mempengaruhi struktur ring (Çakmak, 2015). Pada tahun 2017, Liu dan Chen membahas mengenai struktur derivasi Jordan dalam konteks aljabar Lie, dengan aplikasi yang relevan dalam teori representasi (Liu dan Chen, 2017). Bouaziz pada tahun 2019 mengembangkan teori derivasi Jordan dalam ring non-komutatif dan menganalisis interaksi antara derivasi Jordan dan elemen pusat (Bouaziz, 2019).

Pada tahun 2020, Al-Khalidi dan Al-Sharif melakukan penelitian terkait hubungan antara derivasi Jordan dan ideal maksimal dalam ring komutatif dan dampaknya terhadap struktur ring (Al-Khalidi dan Al-Sharif, 2020). Wu dan Zhang menyelidiki pengaruh derivasi Jordan pada ring prima dan eksplorasi tentang ideal-ideal yang dihasilkan (Wu dan Zhang, 2021), sedangkan Azad dan Rahimi membahas aplikasi derivasi Jordan dalam ring semi sederhana, serta implikasinya terhadap teori bilangan (Azad dan Rahimi, 2022). Selain itu, Madan membahas mengenai pola interaksi antara derivasi Jordan dan elemen-elemen dalam ring prima, serta kondisi khusus yang memunculkan sifat-sifat baru (Madan, 2023). Penelitian dilanjutkan oleh Kumar dan Singh membahas dampak derivasi Jordan dalam struktur aljabar yang lebih luas, termasuk aplikasinya dalam teori representasi dan model matematis (Kumar dan Singh, 2023).

Berdasarkan pengembangan penelitian yang telah dilakukan sebelumnya, belum ada peneliti yang membahas tentang derivasi Jordan pada ring polinomial $R[x]$. Oleh karena itu, penelitian ini akan membahas mengenai hubungan antara derivasi Jordan pada ring dan derivasi Jordan pada ring polinomial $R[x]$. Selain itu, dalam penelitian ini juga akan di selidiki sifat-sifat derivasi Jordan, baik pada ring secara umum maupun pada ring polinomial $R[x]$.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. menyelidiki sifat-sifat derivasi Jordan pada ring polinomial $R[x]$;
2. mengkonstruksi contoh-contoh derivasi Jordan pada ring polinomial $R[x]$;
3. menyelidiki hubungan antara derivasi Jordan pada ring R dengan derivasi Jordan pada ring polinomial $R[x]$.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. mengetahui sifat-sifat derivasi Jordan pada ring polinomial $R[x]$;
2. mengetahui hubungan antara derivasi Jordan pada ring R dengan derivasi Jordan pada ring polinomial $R[x]$;
3. menambah referensi penelitian selanjutnya mengenai derivasi Jordan pada ring polinomial $R[x]$.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dibahas mengenai definisi-definisi dasar yang berperan sebagai teori pendukung dalam penyelesaian penelitian ini.

2.1 Grup

Grup adalah struktur aljabar yang terdiri dari himpunan tak kosong bersama dengan suatu operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Sebelum membahas grup, akan diuraikan terlebih dahulu mengenai operasi biner. Berikut definisi operasi biner.

Definisi 2.1.1 Diberikan himpunan tak kosong G. Operasi biner $*$ pada himpunan G didefinisikan sebagai fungsi dari $* : G \times G$ ke G dengan $*(a, b) = a * b$, untuk setiap $(a, b) \in G \times G$ (Ayres dan Jaisingh, 2004).

Berikut diberikan contoh operasi biner.

Contoh 2.1.1 Diberikan himpunan

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Akan ditunjukkan operasi perkalian matriks merupakan operasi biner pada G. Diberikan sebarang dua matriks $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in G$, sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} \in G.$$

Jadi, operasi perkalian matriks merupakan operasi biner pada G.

Setelah memahami definisi dan contoh dari operasi biner, berikut diberikan definisi dari grup.

Definisi 2.1.2 Suatu himpunan tak kosong G dikatakan grup terhadap operasi biner $*$, jika operasi tersebut memenuhi aksioma-aksioma berikut:

i) himpunan G tertutup terhadap operasi biner $*$, yaitu untuk setiap $a, b \in G$, berlaku $a * b \in G$;

ii) operasi biner $*$ bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$, berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$;

iii) terdapat elemen identitas e di G yang memenuhi $a * e = e * a = a$, untuk setiap $a \in G$;

iv) untuk setiap $a \in G$, terdapat $a^{-1} \in G$ sehingga berlaku $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$, dengan a^{-1} disebut invers dari a,

(Dummit dan Foote, 2004).

Berikut diberikan contoh grup.

Contoh 2.1.2 Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_7^* = \mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}$ dan operasi $\cdot_7$ merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}_7^*$. Akan dibuktikan bahwa $\langle \mathbb{Z}_7^* \rangle$ merupakan suatu grup.

$$\mathbb{Z}_7^* = \{\overline{1}\ , \overline{2}\ , \overline{3}\ , \overline{4}\ , \overline{5}\ , \overline{6}\},$$

dengan menggunakan tabel *Cayley* sebagai berikut.

Tabel 2.1 Tabel Cayley perkalian modulo 7 pada himpunan $\mathbb{Z}_7^*$

$\cdot_7$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Dari Tabel 2.1 diperoleh:

i) $\mathbb{Z}_7^*$ tertutup terhadap operasi $\cdot_7$,

ii) $\cdot_7$ bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}_7^*$,

iii) terdapat $\overline{1} \in \mathbb{Z}_7^*$, sehingga $\overline{a} \cdot_7 \overline{1} = \overline{a} = \overline{1} \cdot_7 \overline{a}$, untuk setiap $\overline{a} \in \mathbb{Z}_7^*$. Jadi, $\overline{1}$ merupakan elemen identitas terhadap operasi $\cdot_7$,

iv) karena $(\overline{1})^{-1} = \overline{1}$; $(\overline{2})^{-1} = \overline{4}$; $(\overline{3})^{-1} = \overline{5}$; $(\overline{4})^{-1} = \overline{2}$; $(\overline{5})^{-1} = \overline{3}$; $(\overline{6})^{-1} = \overline{6}$, untuk setiap $\overline{a} \in \mathbb{Z}_7^*$, terdapat $(\overline{a})^{-1} \in \mathbb{Z}_7^*$, sehingga $\overline{a} \cdot_7 (\overline{a})^{-1} = \overline{1} = (\overline{a})^{-1} \cdot_7 \overline{a}$.

Berdasarkan i), ii), iii), dan iv), terbukti $\langle \mathbb{Z}_7^*, \cdot_7 \rangle$ merupakan grup.

2.1.1 Grup Komutatif

Berdasarkan sifat komutatif dari operasi biner dalam suatu grup, dapat dinyatakan bahwa jika grup tersebut komutatif, hasil operasi antara dua elemen akan tetap sama meskipun urutan elemen dibalik. Berikut diberikan definisi dari grup komutatif.

Definisi 2.1.3 Grup $\langle G, * \rangle$ disebut grup Abel atau grup komutatif jika pada operasi biner $*$ berlaku:

$$a * b = b * a,$$

untuk setiap $a, b \in G$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Berikut diberikan contoh grup komutatif.

Contoh 2.1.3 Himpunan $\mathbb{Z}_6$ merupakan grup Abel atau grup komutatif terhadap operasi penjumlahan modulo 6, karena $a +_6 b = b +_6 a$ mod 6, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_6$.

2.1.2 Subgrup

Subgrup adalah salah satu konsep dasar dalam teori grup yang memiliki peran penting dalam memahami struktur dan sifat-sifat grup secara lebih mendalam. Secara umum, subgrup adalah himpunan bagian dari suatu grup yang juga memenuhi aksioma-aksioma grup terhadap operasi yang sama. Berikut diberikan definisi dari subgrup.

Definisi 2.1.4 Diberikan himpunan bagian H dari grup G yang tertutup terhadap operasi biner pada G. Himpunan H dikatakan subgrup G jika terhadap operasi biner yang sama pada G, H merupakan grup. Selanjutnya H subgrup G dinotasikan dengan $H \leq G$ atau $H < G$ yang berarti H subgrup G, tetapi $H \neq G$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Berikut diberikan contoh subgrup dari suatu grup.

Contoh 2.1.4 Himpunan $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan subgrup $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$, karena memenuhi semua syarat subgrup.

2.2 Ring

Setelah memahami konsep operasi biner dan grup Abel yang menjadi dasar terbentuknya suatu ring. Selanjutnya, diberikan definisi ring.

Definisi 2.2.1 Diberikan suatu himpunan tak kosong R yang dilengkapi dengan dua operasi yang dinotasikan dengan $+$ dan $\cdot$, yang disebut operasi penjumlahan dan perkalian. Himpunan R disebut ring terhadap operasi $+$ dan $\cdot$ jika memenuhi sifat:

i) $\langle R, + \rangle$ adalah grup komutatif, artinya:

   (1) untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku, $(a + b) + c = a + (b + c)$,

   (2) terdapat $0 \in R$, sedemikian sehingga $a + 0 = 0 + a = a$, untuk setiap $a \in R$, 0 adalah elemen identitas di R,

   (3) untuk setiap $a \in R$, terdapat elemen invers yaitu $-a \in R$, sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$,

   (4) untuk setiap $a, b \in R$, berlaku $a + b = b + a$.

ii) untuk setiap $a, b \in R$, berlaku $a \cdot b \in R$ (berlaku sifat tertutup di R),

iii) untuk setiap $a, b, c \in R$, berlaku $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (berlaku sifat asosiatif di R),

iv) sifat distributif berlaku untuk perkalian dan penjumlahan, artinya:

   (1) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$, untuk setiap $a, b, c \in R$ (hukum distributif kiri),

(2) $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$, untuk setiap $a, b, c \in R$ (hukum distributif kanan)

(Chaudhuri, 2017).

Ring dinotasikan dengan $\langle R, +, \cdot \rangle$, dengan R merupakan himpunan tak kosong, $+$ dan $\cdot$ merupakan dua operasi biner pada R.

Berikut diberikan contoh ring.

Contoh 2.2.1 Diberikan A yang merupakan himpunan semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Untuk setiap $f, g \in A$ dan $x \in \mathbb{R}$, didefinisikan:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

dan

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

Akan ditunjukkan $\langle A, +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

i) $\langle A, + \rangle$ merupakan grup Abel.

ii) Untuk setiap $f, g \in A$ dan $x \in \mathbb{R}$, berlaku:

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \in \mathbb{R}.$$

Jadi, operasi $\cdot$ bersifat tertutup di A.

iii) Untuk setiap $f, g, h \in A$ dan $x \in \mathbb{R}$, berlaku:

$$\begin{aligned} ((fg)h)(x) &= (fg)(x)h(x) \\ &= f(x)g(x)h(x) \\ &= f(x)(gh)(x) \\ &= (f(gh))(x). \end{aligned}$$

Jadi, $((fg)h)(x) = (f(gh))(x)$ artinya operasi $\cdot$ bersifat asosiatif.

iv) Untuk $f, g, h \in A$ dan $x \in \mathbb{R}$ berlaku:

$$\begin{aligned}(f(g+h))(x) &= f(x)(g+h)(x)\\ &= f(x)(g(x)+h(x))\\ &= f(x)g(x)+f(x)h(x))\\ &= (fg)(x)+(fh)(x)\\ &= (fg+fh)(x).\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}((f+g)h)(x) &= (f+g)(x)h(x)\\ &= (f(x)+g(x))h(x)\\ &= f(x)h(x)+g(x)h(x))\\ &= (fh)(x)+(gh)(x)\\ &= (fh+gh)(x).\end{aligned}$$

Jadi berlaku hukum distributif kiri dan kanan pada A.

Berdasarkan pernyataan i), ii), iii), dan iv), terbukti bahwa $\langle A, +, \cdot\rangle$ merupakan ring. Berikut diberikan definisi dari operasi $n \cdot a$ di ring.

Definisi 2.2.2 Dalam suatu ring $R,$ operasi $n \cdot a$ berarti elemen a dari ring tersebut dijumlahkan dengan dirinya sendiri sebanyak n kali. Secara formal, definisi operasi ini dapat dijelaskan sebagai berikut.

i) Jika $n > 0$, maka $n.a$ didefinisikan:

$$n.a = \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n \text{ kali}}$$

yang menunjukkan bahwa elemen a dioperasikan dengan dirinya sendiri sebanyak n kali.

ii) Jika $n = 0$, maka $n.a$ didefinisikan:

$$n \cdot a = 0.$$

iii) Jika $n < 0$, maka $n.a$ didefinisikan:

$$n.a = \underbrace{(-a) + (-a) + (-a) + \cdots + (-a)}_{n \text{ kali}}$$

yang menunjukkan bahwa elemen $-a$ yaitu invers aditif dari a dijumlahkan sebanyak n kali.

(Wahyuni, dkk., 2021).

Berikut diberikan contoh dari operasi $n \cdot a$ di suatu ring R.

Contoh 2.2.2 Dalam ring matriks $M_2(\mathbb{R})$, yaitu himpunan matriks berukuran 2×2 dengan entri berupa bilangan real. Diberikan sebarang matriks A di $M_2(\mathbb{R})$ sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Jika $n = 3$, maka operasi $n.a$ didefinisikan sebagai penjumlahan matriks A sebanyak tiga kali, yang dapat dituliskan secara matematis sebagai:

$$3.A = A + A + A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}.$$

Jadi operasi $n.a$ dalam ring matriks merepresentasikan penjumlahan a dengan dirinya sendiri sebanyak n kali.

Berikut akan dibahas tentang karakteristik ring.

Definisi 2.2.3 Karakteristik ring R yang dinotasikan dengan $char(R)$ adalah bilangan bulat positif terkecil n yang memenuhi $n \cdot 1_R = 0$, dengan 1_R adalah elemen identitas perkalian di R dan $n \cdot 1_R$ adalah penjumlahan 1_R sebanyak n kali. Jika tidak ada bilangan bulat positif n yang memenuhi kondisi tersebut, maka karakteristik ring R didefinisikan sebagai 0 (Rasiman, dkk., 2018).

Berikut diberikan contoh karakteristik ring.

Contoh 2.2.3 Ring modulo n ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) merupakan ring dengan karakteristik n karena $n \cdot 1_R = 0$.

Berikut akan dibahas definisi tentang ring komutatif.

Definisi 2.2.4 Suatu ring $\langle R, +, \cdot \rangle$ dikatakan ring komutatif jika R komutatif terhadap perkalian yaitu berlaku $a \cdot b = b \cdot a$ untuk setiap $a, b \in R$ (Wahyuni, dkk., 2021).

Berikut diberikan contoh pada ring komutatif.

Contoh 2.2.4 Ring $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle$, dan $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$, masing-masing merupakan ring komutatif dengan elemen satuan.

2.2.1 Ring Polinomial $R[x]$

Ring polinomial adalah salah satu struktur aljabar yang terdiri dari semua fungsi $f(x)$, dengan $f(x)$ disebut polinomial jika dapat dituliskan sebagai $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, dengan n merupakan bilangan bulat positif dan $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ merupakan koefisien fungsi $f(x)$, yaitu elemen-elemen dari suatu ring R, dan variabel x. Berikut diberikan definisi ring polinomial.

Definisi 2.2.5 Diberikan ring R. Himpunan $R[x]$, dinotasikan sebagai semua himpunan barisan tak hingga $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, dengan $a_i \in R$, untuk setiap $i = 1, 2, 3, \ldots$ dan terdapat $n \in \mathbb{Z}^+$, sehingga untuk $k \geq n$ berlaku $a_k = 0$. Elemen-elemen $R[x]$ disebut polinomial atas ring.

Operasi penjumlahan dan perkalian pada $R[x]$ didefinisikan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
+ : R[x] \times R[x] &\to R[x] \\
(a_0, a_1, a_2, ...) + (b_0, b_1, b_2, ...) &= (a_0 + b_0, a_1 + b_1, ...)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cdot : R[x] \times R[x] &\to R[x] \\
(a_0, a_1, a_2, ...)(b_0, b_1, b_2, ...) &= (c_0, c_1, c_2, ...),
\end{aligned}
$$

dengan $c_j = \sum_{i=0}^{j} a_i b_{j-i}$ untuk $j = 0, 1, 2, ...$

Dengan dua operasi tersebut, $R[x]$ merupakan ring yang disebut ring polinomial (Dummit dan Foote, 2004).

Jika R adalah ring komutatif, maka $R[x]$ juga komutatif. Hal ini disebabkan oleh operasi perkalian dalam $R[x]$ didasarkan pada komutativitas dari koefisien-koefisien dalam R. Jika R memiliki elemen identitas 1_R, maka $R[x]$ juga memiliki elemen identitas, yang merupakan polinomial dengan koefisien konstanta 1_R dan suku-suku lainnya bernilai nol, karena elemen tersebut memenuhi sifat identitas dalam operasi perkalian di $R[x]$.

Contoh 2.2.5 Diberikan ring polinomial $\mathbb{R}[x]$, yang merupakan himpunan semua polinomial dengan koefisien dari bilangan real dan variabel x.

Akan ditunjukkan $\mathbb{R}[x]$ adalah ring polinomial.

Diberikan sebarang dua polinomial:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Penjumlahan keduanya adalah:

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0) \\ &\quad + (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0). \end{aligned}$$

Hasil dari penjumlahan ini tetap merupakan polinomial dengan koefisien bilangan real, sehingga $\mathbb{R}[x]$ tertutup terhadap penjumlahan.

Diberikan sebarang polinomial $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$, maka perkaliannya adalah:

$$\begin{aligned} p(x) \cdot q(x) &= (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0) \\ &\quad \cdot (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0) \\ &= c_{n+m} x^{n+m} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0. \end{aligned}$$

Hasilnya juga merupakan polinomial dengan koefisien bilangan real, sehingga $\mathbb{R}[x]$ tertutup terhadap perkalian.

Diberikan sebarang dua polinomial $p(x)$ dan $q(x)$, penjumlahan harus bersifat komutatif:

$$p(x) + q(x) = q(x) + p(x).$$

Karena penjumlahan koefisien bilangan real bersifat komutatif, maka penjumlahan polinomial di $\mathbb{R}[x]$ juga bersifat komutatif.

Polinomial nol, $\theta(x) = 0$, adalah elemen identitas aditif dalam $\mathbb{R}[x]$. Untuk setiap polinomial $p(x)$, berlaku:

$$p(x) + \theta(x) = p(x).$$

Dengan demikian, $\theta(x)$ merupakan elemen identitas di $R[x]$ terhadap operasi $+$.

Setiap polinomial $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ memiliki invers aditif, yaitu $-p(x) = -a_n x^n - \cdots - a_1 x - a_0$, sehingga:

$$p(x) + (-p(x)) = 0 = \theta(x).$$

Invers aditif ini juga diperoleh dari sifat invers aditif di ring R.

Perkalian dalam $\mathbb{R}[x]$ harus bersifat asosiatif. Diberikan sebarang tiga polinomial $p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$, berlaku:

$$(p(x) \cdot q(x)) \cdot r(x) = p(x) \cdot (q(x) \cdot r(x))$$

Perkalian polinomial harus bersifat distributif terhadap penjumlahan, yaitu:

$$p(x) \cdot (q(x) + r(x)) = p(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot r(x)$$

Karena $\mathbb{R}[x]$ memenuhi semua aksioma yang membentuk suatu ring seperti pada Definisi 2.2.1, maka $\mathbb{R}[x]$ adalah ring polinomial.

2.2.2 Ideal

Dalam teori aljabar, ideal dari suatu ring R adalah himpunan bagian I dari R yang memenuhi dua aksioma. Ideal ring dibedakan menjadi dua yaitu ideal kiri dan ideal kanan. Berikut akan diberikan definisi dari ideal.

Definisi 2.2.6 Diberikan ring R dan himpunan tak kosong I yang merupakan himpunan bagian dari R. Himpunan I disebut ideal kiri dari R jika:

i) untuk setiap $a, b \in I$, berlaku $a - b \in I$,

ii) untuk setiap $a \in I, r \in R$, berlaku $ra \in I$.

Definisi 2.2.7 Diberikan ring R dan himpunan tak kosong I yang merupakan himpunan bagian dari R. Himpunan I disebut ideal kanan dari R jika:

i) untuk setiap $a, b \in I$, berlaku $a - b \in I$,

ii) untuk setiap $a \in I, r \in R$, berlaku $ar \in I$.

Jika himpunan bagian I dari R merupakan ideal kiri sekaligus ideal kanan maka I disebut ideal atau ideal dua sisi dari ring R (Dummit dan Foote, 2004).

Berikut diberikan contoh ideal.

Contoh 2.2.6 Diberikan ring bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan himpunan bagian tak kosong $3\mathbb{Z}$ yang merupakan himpunan semua bilangan bulat kelipatan dari 3, yaitu:

$$3\mathbb{Z} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Akan dibuktikan bahwa $3\mathbb{Z}$ adalah ideal dalam $\mathbb{Z}$.

i) Diberikan sebarang $a = 3k$ dan $b = 3m$ dengan $k, m \in \mathbb{Z}$, berlaku:

$$a - b = 3k - 3m = 3(k - m) \in \mathbb{Z}$$

karena $k - m$ juga merupakan bilangan bulat.

ii) Diberikan sebarang $x \in \mathbb{Z}$ dan $a = 3k \in 3\mathbb{Z}$, berlaku:

$$x \cdot a = x \cdot 3k = 3(x \cdot k)$$

$$a \cdot x = 3k \cdot x = 3(k \cdot x)$$

karena $x \cdot k$ dan $k \cdot x$ adalah bilangan bulat sehingga $x \cdot a$ dan $a \cdot x \in 3\mathbb{Z}$.

Berdasarkan i) dan ii), terbukti bahwa $3\mathbb{Z}$ adalah ideal dalam $\mathbb{Z}$.

2.2.3 Kombinasi Linear pada Ring

Dalam teori aljabar, khususnya dalam konteks ring, kombinasi linear adalah konsep yang melibatkan elemen-elemen dari ring dan koefisien dari sebuah ring yang sama. Berikut adalah definisi mengenai kombinasi linear pada ring.

Definisi 2.2.8 Diberikan ring R. Jika $r_1, r_2, \ldots, r_n$ adalah elemen-elemen dari ring R dan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah koefisien dalam ring R, maka kombinasi linear dari elemen-elemen $r_1, r_2, \ldots, r_n$ dengan koefisien elemen dari R yang didefinisikan sebagai berikut.

$$a_1r_1 + a_2r_2 + \cdots + a_nr_n$$

(Artin, 2011).

Berikut diberikan contoh kombinasi linear pada ring.

Contoh 2.2.7 Diberikan ring $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Elemen-elemen dalam ring ini adalah $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{11}\}$, dan operasi yang dilakukan yaitu perkalian modulo 12.

Pilih $r_1 = \overline{5}$ dan $r_2 = \overline{7}$ dalam $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Pilih koefisien $a_1 = 3$ dan $a_2 = 4$ dalam $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Kombinasi linear dari r_1 dan r_2 dengan koefisien a_1 dan a_2 adalah:

$$\begin{aligned} a_1r_1 + a_2r_2 &= 3 \cdot \overline{5} + 4 \cdot \overline{7} \\ &= 15 + 28 \\ &= 43 \bmod 12 \\ &= \overline{7} \end{aligned}$$

Dengan demikian, kombinasi linear $3 \cdot \overline{5} + 4 \cdot \overline{7}$ dalam $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ adalah $\overline{7}$.

2.3 Derivasi

Derivasi pada ring merupakan generalisasi dari konsep turunan dalam kalkulus ke dalam konteks aljabar abstrak. Dalam teori ring, derivasi adalah suatu pemetaan yang menggambarkan perubahan elemen-elemen dalam ring, yang mengikuti sifat-sifat tertentu seperti linearitas dan aturan Leibniz. Berikut diberikan definisi dari derivasi.

Definisi 2.3.1 Diberikan ring R. Pemetaan $d : R \to R$ disebut derivasi jika memenuhi sifat berikut:

i) $d(x + y) = d(x) + d(y)$, untuk setiap $x, y \in R$;

ii) $d(xy) = d(x)y + xd(y)$, untuk setiap $x, y \in R$;

(Ali, 2012).

Berikut diberikan contoh derivasi pada suatu ring.

Contoh 2.3.1 Diberikan ring $M_2(\mathbb{Z})$. Akan ditunjukkan fungsi d yang didefinisikan sebagai:

$$d\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix}$$

merupakan derivasi.

Diberikan sebarang $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$.

Berlaku

$$\begin{aligned} d(A+B) &= d\left(\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(b+f) \\ c+g & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -f \\ g & 0 \end{bmatrix} \\ &= d(A) + d(B). \end{aligned}$$

Jadi, $d(A+B) = d(A) + d(B),$ untuk setiap $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$.

$$\begin{aligned} d(AB) &= d\left(\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(af+bh) \\ ce+dg & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Di lain pihak,

$$
\begin{aligned}
d(A)B + Ad(B) &= \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -f \\ g & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -bg & -bh \\ ce & cf \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bg & -af \\ dg & -cf \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -(bh+af) \\ ce+dg & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -(af+bh) \\ ce+dg & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Jadi, $d(AB) = d(A)B + Ad(B),$ untuk setiap $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$.

Dengan demikian, terbukti bahwa d derivasi di ring $M_2(\mathbb{Z})$.

2.4 Derivasi Jordan

Derivasi Jordan adalah konsep dalam aljabar abstrak yang memperluas ide derivasi biasa dengan menggunakan struktur komutatif di antara elemen-elemen suatu ring, dengan derivasi diterapkan menggunakan aturan Jordan. Berikut diberikan definisi dari derivasi Jordan.

Definisi 2.4.1 Diberikan ring R. Pemetaan aditif $d : R \to R$ disebut derivasi Jordan jika memenuhi:

$$d(a^2) = d(a)a + ad(a), \text{ untuk setiap } a \in R \tag{2.4.1}$$

(Herstein, 1957).

Selanjutnya, akan diberikan contoh derivasi Jordan.

Contoh 2.4.1 Diberikan ring $R = \mathbb{Z}$. Didefinisikan fungsi $d : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sebagai berikut:

$$d(a) = 0, \text{ untuk setiap } a \in \mathbb{Z}.$$

Akan diselidiki apakah d merupakan derivasi Jordan.

Diberikan sebarang $a \in \mathbb{Z}$, berlaku:

$$d(a^2) = 0, \text{karena } a^2 \in \mathbb{Z}, \text{ untuk setiap } a \in \mathbb{Z}.$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned} d(a)a + ad(a) &= 0 \cdot a + a \cdot 0 \\ &= 0 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Karena $d(a^2) = 0$ dan $d(a)a + ad(a) = 0$, fungsi d yang didefinisikan sebagai $d(a) = 0,$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ merupakan derivasi Jordan.

Contoh 2.4.2 Diberikan ring $M_2(\mathbb{Z}_2)$ dengan karakteristik 2. Didefinisikan fungsi $d : M_2(\mathbb{Z}_2) \to M_2(\mathbb{Z}_2)$ pada setiap matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ sebagai berikut:

$$d(A) = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix}.$$

Akan diselidiki apakah d merupakan derivasi Jordan.

Diberikan sebarang $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_2)$.

Diperoleh $A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix}.$

$$d(A^2) = d\left(\begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & ab + bd \\ ac + cd & 0 \end{bmatrix}.$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned} d(A)A + Ad(A) &= \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} bc & bd \\ ac & bc \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bc & ab \\ cd & bc \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} bc + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + bc \end{bmatrix} \end{aligned}$$

karena elemen $\mathbb{Z}_2$ dan karakteristik 2 maka $bc + bc = 0$, sehingga

$$d(A)A + Ad(A) = \begin{bmatrix} 0 & ab + bd \\ ac + cd & 0 \end{bmatrix}.$$

Jadi, $d(A^2) = d(A)A + Ad(A)$.

Terbukti fungsi d merupakan derivasi Jordan pada ring $M_2(\mathbb{Z}_2)$.

Berikut diberikan contoh fungsi yang bukan merupakan derivasi Jordan.

Contoh 2.4.3 Diberikan ring R. Didefinisikan fungsi $d : R \to R$ sebagai berikut:

$$d(a) = -a, \text{ untuk setiap } a \in R.$$

Akan diselidiki apakah d merupakan derivasi Jordan.

Diberikan sebarang $a \in R$,

$$d(a^2) = -a^2.$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned} d(a)a + ad(a) &= -a \cdot a + a \cdot -a \\ &= -a^2 + -a^2 \\ &= -2a^2. \end{aligned}$$

Karena $-a^2 \neq -2a^2,$ untuk setiap $a \in R$ (kecuali untuk $a = 0$) sehingga fungsi d yang didefinisikan sebagai $\delta(a) = -a,$ untuk setiap $a \in R$ bukan merupakan derivasi Jordan.

Contoh 2.4.4 Diberikan ring $R = M_2(\mathbb{R})$, yaitu ring matriks yang berukuran 2×2 dengan entri bilangan real. Didefinisikan suatu fungsi $d : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dengan:

$$d(A) = A^T, \text{ untuk setiap } A \in M_2(\mathbb{R}).$$

Akan ditunjukkan apakah d merupakan derivasi Jordan.

Pilih $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} d(A^2) &= d\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right) \\ &= d\left(\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 22 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned} d(A)A + Ad(A) &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 15 & 25 \\ 25 & 45 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Karena $d(A^2) = \begin{bmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 22 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 15 & 25 \\ 24 & 45 \end{bmatrix} = d(A)A + Ad(A)$, maka fungsi $d(A) = A^T$ bukan merupakan derivasi Jordan.

2.4.1 Ideal Jordan

Ideal Jordan adalah konsep dalam aljabar abstrak yang menggeneralisasi sifat ideal dalam ring. Konsep ini mengatur himpunan yang, selain menjadi subgrup aditif, juga memenuhi syarat bahwa kombinasi tertentu dari elemen-elemen dalam ideal dan elemen-elemen ring tetap berada di dalam ideal tersebut. Berikut diberikan definisi dari ideal Jordan.

Definisi 2.4.2 Himpunan $J \subseteq R$ disebut ideal Jordan dari ring R jika memenuhi:

i) J adalah subgrup aditif dari R,

ii) untuk setiap $x, y \in J$ dan $r_1, r_2 \in R$, berlaku $xr_1 + r_2y \in J$,

(Agarwal dan Chaudhary, 2010).

Berikut diberikan contoh ideal Jordan.

Contoh 2.4.5 Diberikan ring $R = \mathbb{R}[x]$, yaitu ring polinomial dengan koefisien bilangan real. Didefinisikan himpunan J sebagai berikut.

$$J = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(0) = 0\},$$

yaitu himpunan semua polinomial dalam $\mathbb{R}[x]$ yang memiliki suku konstanta nol. Akan dibuktikan bahwa J merupakan ideal Jordan pada ring $R = \mathbb{R}[x]$.

i) J merupakan subgrup aditif dari $\mathbb{R}[x]$.

Diberikan sebarang $f(x), g(x) \in J$, maka $f(0) = 0$ dan $g(0) = 0$.

$$(f(x) + g(x))(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0.$$

Karena $f(x) + g(x) \in J$, untuk setiap $f(x), g(x) \in J$ sehingga J tertutup terhadap penjumlahan.

Diberikan sebarang $f(x) \in J$, berlaku $f(x) + 0(x) = f(x)$ dan $0(x) + f(x) = f(x)$, yang menunjukkan $0(x)$ adalah elemen identitas terhadap penjumlahan.

Diberikan sebarang $f(x) \in J$, sehingga $-f(x)$ juga memenuhi $(-f)(0) = -f(0) = 0$.

Oleh karena itu, J merupakan subgrup aditif dari $\mathbb{R}[x]$.

ii) Diberikan sebarang $f(x), g(x) \in J$ dan $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$.

Akan ditunjukkan bahwa $f(x)p(x) + q(x)g(x) \in J$.

$$\begin{aligned}(f(x)p(x) + q(x)g(x))(0) &= f(0)p(0) + q(0)g(0) \\ &= 0 \cdot p(0) + q(0) \cdot 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Hal tersebut menunjukkan bahwa $f(x)p(x) + q(x)g(x)$ memiliki suku konstanta nol, sehingga $f(x)p(x) + q(x)g(x) \in J$.

Berdasarkan i) dan ii), terbukti bahwa himpunan J ideal Jordan di $\mathbb{R}[x]$.

2.4.2 Ideal Derivasi Jordan

Dalam ideal derivasi Jordan, apabila suatu elemen termasuk dalam ideal derivasi Jordan, maka hasil penerapan derivasi Jordan pada kuadrat elemen tersebut tetap berada di dalam ideal tersebut. Berikut diberikan definisi dari ideal derivasi Jordan.

Definisi 2.4.3 Diberikan R adalah suatu ring. Suatu himpunan $J \subseteq R$ disebut ideal derivasi Jordan jika memenuhi:

i) J adalah subgrup aditif dari R

ii) untuk setiap $x \in J$, berlaku $d(x^2) \in J$

iii) untuk setiap $x \in J$ dan $r \in R$, berlaku $xr + rx \in J$

(Herstein, 1957).

Berikut diberikan contoh ideal derivasi Jordan.

Contoh 2.4.6 Diberikan sebarang $R = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, yaitu himpunan pasangan bilangan real dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang didefinisikan sebagai berikut:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{dan} \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd).$$

Selanjutnya, didefinisikan $J = \{(0, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$, yaitu himpunan semua pasangan yang elemen pertamanya adalah nol. Akan dibuktikan bahwa J merupakan ideal derivasi Jordan pada ring $R = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

i) J adalah subgrup aditif dari R.

Diberikan sebarang $(0, b_1)$, $(0, b_2) \in J$, berlaku:

$$(0, b_1) + (0, b_2) = (0, b_1 + b_2).$$

Karena $b_1 + b_2 \in \mathbb{R}$, diperoleh $(0, b_1 + b_2) \in J$.

Diberikan sebarang $(0, b) \in J$, berlaku:

$$(0, b) + (0, 0) = (0, b + 0) = (0, b).$$

Dengan demikian, $(0, 0) \in J$ adalah elemen identitas terhadap penjumlahan.

Diberikan sebarang $(0, b) \in J$, maka invers aditifnya adalah:

$$-(0, b) = (0, -b).$$

Karena $-b \in \mathbb{R}$, maka $(0, -b) \in J$. Dengan demikian, J adalah subgrup aditif dari R.

ii) Diberikan d adalah derivasi Jordan pada R. Akan ditunjukkan bahwa $d((0, b)^2) \in J$, untuk setiap $(0, b) \in J$.

$$\begin{aligned}(0, b)^2 &= (0, b) \cdot (0, b) = (0 \cdot 0, b \cdot b) = (0, b^2)\\ d((0, b)^2) &= (0, b)d((0, b)) + d((0, b))(0, b)\\ d((0, b)^2) &= (0, c), \text{ untuk setiap } c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

sehingga $d((0, b)^2) \in J$.

iii) Diberikan sebarang $(0, b) \in J$ dan $(a, c) \in R$. Akan ditunjukkan $(0, b)(a, c) + (a, c)(0, b) \in J$.

$$\begin{aligned}(0, b) \cdot (a, c) &= (0 \cdot a, b \cdot c) = (0, bc)\\ (a, c) \cdot (0, b) &= (a \cdot 0, c \cdot b) = (0, cb)\\ (0, b) \cdot (a, c) + (a, c) \cdot (0, b) &= (0, bc) + (0, cb) = (0, bc + cb).\end{aligned}$$

Karena hasil tersebut pasangan dengan elemen pertama 0, maka $(0, bc + cb) \in J$.

Berdasarkan i), ii), dan iii), terbukti bahwa himpunan J ideal derivasi Jordan di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

BAB III

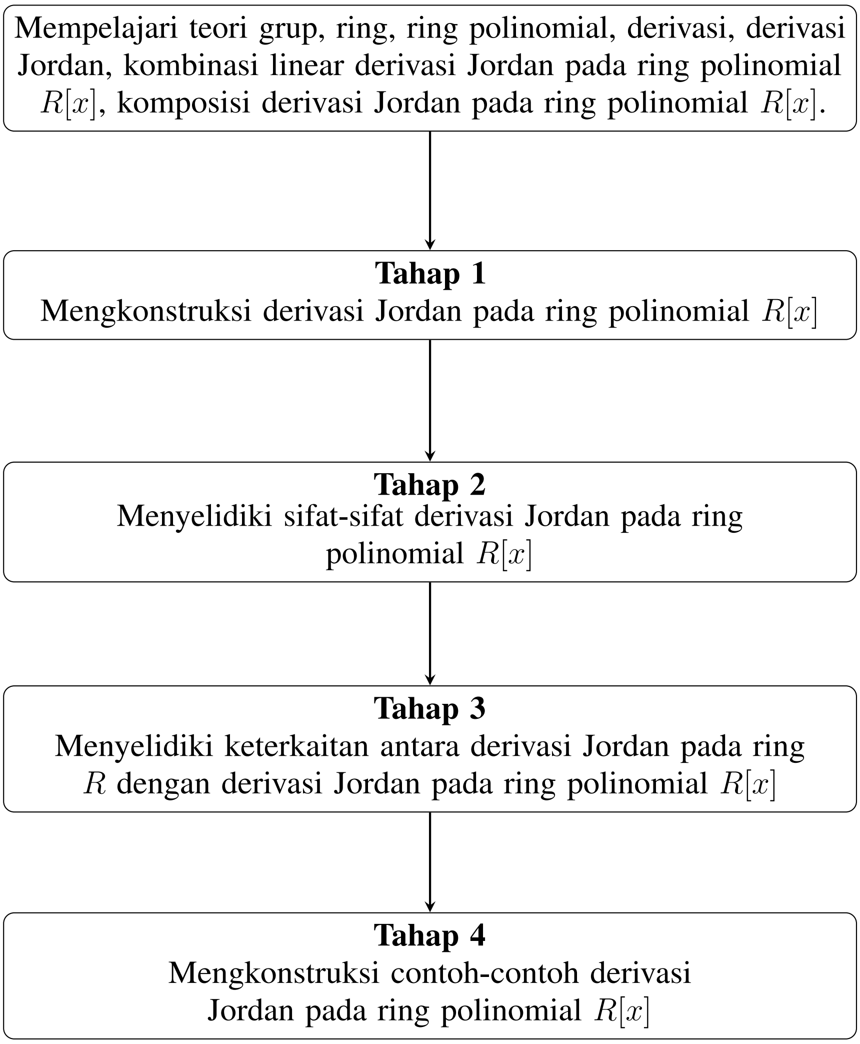
METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2024/2025 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamat di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan penulis adalah studi literatur, yang diperoleh dari mengumpulkan dan mengolah bahan penelitian berdasarkan referensi terkait seperti jurnal, buku, dan artikel yang berkaitan dengan penelitian ini serta mengkaji definisi dan teorema yang berhubungan dengan permasalahan penelitian ini. Adapun langkah-langkah penelitian ini dapat dilihat pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Diagram tahapan penelitian.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan dalam Bab IV, dapat disimpulkan bahwa kombinasi linear dari derivasi Jordan pada suatu ring merupakan derivasi Jordan. Selanjutnya, jika terdapat derivasi Jordan pada ring R, maka pemetaan tersebut dapat diperluas menjadi derivasi Jordan pada $R[x]$. Selain itu, kombinasi linear dari derivasi Jordan juga merupakan derivasi Jordan pada $R[x]$.

Secara khusus, komposisi dua derivasi Jordan tidak selalu menghasilkan derivasi Jordan. Selain itu, setiap derivasi pada ring selalu merupakan derivasi Jordan, tetapi tidak semua derivasi Jordan merupakan derivasi. Contoh konkret dalam ring matriks $M_2(\mathbb{Z}_2)$ dengan fungsi $d(A) = A^T - A$ menunjukkan bahwa pemetaan ini memenuhi sifat derivasi Jordan, tetapi tidak selalu memenuhi aturan Leibniz, sehingga merupakan derivasi Jordan yang bukan merupakan derivasi.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian ini, disarankan Penelitian lebih lanjut dapat dilakukan untuk menyelidiki penerapan derivasi Jordan pada ring polinomial dengan koefisien dari ring non-komutatif, guna memperoleh pemahaman yang lebih mendalam mengenai hubungan yang lebih kompleks. Pengembangan teori derivasi Jordan pada ring polinomial dengan lebih dari satu variabel ($R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$) dapat memberikan pandangan baru tentang sifat aljabar dan hubungan antarvariabel.

DAFTAR PUSTAKA

Agarwal, S., dan Chaudhary, M. P. 2010. Jordan Ideal in Non-Commutative Rings. *Global Jurnal of Science Frontier Research,* 10, 9-11.

Ali, S. 2012. On Generalized Derivations in Rings. *Palestine Journal of Mathematics*, 1, 32-37.

Al-Khalidi, T., dan Al-Sharif, M. 2020. The Relationship Between Jordan Derivations and Maximal Ideals in Commutative Rings. *Journal of Mathematical Sciences,* 248(1), 1-15.

Artin, M. 2011. *Algebra* 2^{nd} *Edition*. Boston, MA: Pearson Education.

Ayres, F dan Jaisingh, L.R. 2004. *Theory and Problems of Abstract Algebra* 2^{nd} *Edition*. New York: McGraw-Hill Publishing Company.

Azad, A., dan Rahimi, A. 2022. Applications of Jordan Derivations in Semisimple Rings and Their Implications for Number Theory. *International Journal of Mathematics,* 33(6), 1234-1248.

Bouaziz, M. 2019. Jordan Derivations in Non-commutative Rings and the Central Elements Interaction. *Journal of Algebra and Its Applications,* 18(10).

Çakmak, M. 2015. Characterization of Jordan Derivations on Non-commutative Rings. *Algebra and Applications,* 12(4), 375-390.

Chaudhuri, A.K. 2017. *Introduction to Abstract and Linear Algebra*. New Delhi: New Central Book Agency.

Dummit, D. S., dan Foote, R. M. 2004. *Abstract Algebra* 3^{rd} *Edition*. Hoboken, NJ: Wiley.

Fitriani dan Faisol, A. 2022. *Grup*. Yogyakarta: Matematika.

Herstein, I.N. 1957. Jordan Derivations of Prime Rings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 8 , 1104 - 1110.

Jacobson, N. 1949. *Lie Algebras*. Providence, Rhode Island (RI): American Mathematical Society.

Jordan, P. 1934. On the Quantum Theory of Observation. *Zeitschrift für Physik*, 87(1), 155-159.

Khosravi, A., dan Ahmed, A. 2014. Properties of Jordan Derivations and Applications in Commutative Rings. *Journal of Algebra*, 396, 61-72.

Kumar, A., dan Singh, P. 2023. The impact of Jordan Derivations on Broader Algebraic Structures and Their Applications in Representation Theory. *Journal of Mathematical Analysis,* 15(3), 123-145.

Lang, S. 2002. *Algebra* 2^{nd} *Edition*. New York: Springer-Verlag.

Liu, Y., dan Chen, H. 2017. Structure of Jordan Derivations in Lie algebras with Applications in Representation Theory. *Communications in Algebra*, 45(3), 1075-1088.

Madan, R. 2023. Patterns of Interaction Between Jordan Derivations and Elements in Prime Rings. *Algebra Research,* 12(2), 101-115.

Newton, I. 1687. *Mathematical Principles of Natural Philosophy,* London: Joseph Streater.

Rasiman, Rubowo, M. R., dan Pramasdyahsari, A. S. (2018). *Teori Ring*. Semarang: Univ PGRI Semarang Press.

Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., Yuwaningsih, D. A., dan Hartanto, A. D. 2021. *Teori Ring dan Modul*. Yogyakarta: UGM PRESS.

Wu, J., dan Zhang, Y. 2021. The impact of Jordan Derivations on Prime Rings and Generated Ideals. *Algebra and Number Theory*, 15(6), 1341-1356.