KONSTRUKSI SEMIMODUL *ROUGH* ATAS SEMIRING *ROUGH*

Tesis

Oleh

EVI TRISNAWATI
NPM. 2227031003

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG

2024

ABSTRACT

THE CONSTRUCTION OF *ROUGH* SEMIMODULE OVER *ROUGH* SEMIRING

By

EVI TRISNAWATI

Let (U, R) be an approximation space, where Ua non-empty set and R an equivalence relation on U. If X is a subsets of U, then the union of equivalence classes contained in X is called the lower approximation. The union of equivalence classes that intersect with the set X is called the upper approximation. The subset X is a rough set if $\overline{Apr}(X) \neq \underline{Apr}(X)$. If some binary operations are defined, X form a rough semimodule over rough semiring if it sarisfy certain conditions. Inthis research, we investigate some characteristics and we construct examples of the rough semimodule over rough semiring. Next use, program Phyton determation of the rough semimodule over rough semiring.

Keywords: *approximation space, rough set, rough semimodule, rough semiring.*

ABSTRAK

KONSTRUKSI SEMIMODUL *ROUGH* ATAS SEMIRING *ROUGH*

Oleh

EVI TRISNAWATI

Diberikan ruang aproksimasi (U, θ) dengan himpunan tak kosong U dan relasi ekuivalensi θ pada U. Relasi bersifat refleksif, simetris dan transitif disebut relasi ekuivalensi. Relasi ekuivalensi membentuk partisi-partisi yang saling lepas yang disebut kelas ekuivalensi. Jika X merupakan himpunan bagian dari U, maka gabungan kelas-kelas ekuivalensi yang termuat dalam X disebut aproksimasi bawah, dinotasikan dengan $\underline{Apr}(X)$. Gabungan kelas-kelas ekuivalensi yang beririsan dengan himpunan X dan bukan merupakan himpunan kosong disebut aproksimasi atas, dinotasikan dengan $\overline{Apr}(X)$. Suatu himpunan bagian X merupakan himpunan *rough* jika $\overline{Apr}(X) - \underline{Apr}(X) \neq \varnothing$. Jika didefinisikan operasi biner X, X akan membentuk semimodul *rough* atas semiring *rough* apabila memenuhi syarat-syarat tertentu. Pada penelitian ini, dibahas beberapa sifat serta diberikan contoh konstruksi semimodul *rough* atas semiring *rough.* Selanjutnya, menggunakan pemograman python untuk penentuan semimodul *rough* atas semiring r*ough*.

Kata-kata kunci: Ruang aproksimasi, himpunan *rough*, semimodul *rough*, semiring *rough*.

KONSTRUKSI SEMIMODUL *ROUGH* ATAS SEMIRING *ROUGH*

EVI TRISNAWATI

Tesis

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
Magister Matematika

pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

Judul Skripsi	:	**KONSTRUKSI SEMIMODUL ROUGH ATAS SEMIRING ROUGH**
Nama Mahasiswa	:	**Evi Trisnawati**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2227031003**
Program Studi	:	**Magister Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**
NIP 198406272006042001	NIP 198002062003121003

2. Ketua Program Studi Magister Matematika

Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.
NIP. 197604112000122001

MENGESAHKAN

1. Tim penguji

Ketua	:	**Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**	....
Sekretaris	:	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**1. Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.**	....
	:	**2. Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

3. Direktur Program Pasca Sarjana

Prof. Dr. Ir. Murhadi, M.Si.
NIP. 196403261998021001

Tanggal Lulus Ujian Tesis: **18 April 2024**

PERNYATAAN TESIS MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**EVI TRISNAWATI**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2227031003**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**KONSTRUKSI SEMIMODUL *ROUGH* ATAS SEMIRING *ROUGH***

Dengan ini menyatakan bahwa tesis ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa tesis inni merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 18 April 2024

Penulis,

10000
METERAI TEMPEL
B5DAKX856931477

EVI TRISNAWATI

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Lampung Utara pada tanggal 09 Agustus 1986 merupakan anak pertama dari tiga bersaudara dari pasangan bapak Wazier Herawan dan ibu Mardawiyah. Pada tahun 2013, penulis menikah dengan Aris Maroby MN dan memiliki putra yang bernama Farras Ardev Uwais dan putri bernama Faliha Ardev Azzahra.

Penulis menyelesaikan Sekolah Dasar Negeri 1 Penengahan Bandar Lampung pada tahun 1998, menyelesaikan Sekolah Menengah Pertama Negeri 22 Bandar Lampung pada tahun 2001, dan menyelesaikan Sekolah Menengah Umum Negeri 4 Bandar Lampung pada tahun 2004. Selanjutnya penulis menyelesaikan Sarjana Strata 1 pada Jurusan Kimia Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahun Alam Universitas Lampung pada tahun 2008. Pada Tahun 2022, penulis terdaftar sebagai mahasiswa Program Magister Matematika, Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

KATA INSPIRASI

”Tidak ada suatu riwayat paling lemah sekalipun menyatakan bahwa orang yang tidak tau komputer, matematika, kimia, teknik dan lain-lain, akan disiksa di akhirat, tetapi orang yang tidak mau tau akan alquran jelas diancam oleh Allah SWT (Az Zuhruf dan Thoha)”

”Tidak ada kekuatan kecuali dengan (pertolongan) Allah”
(Q.S. Al-Kahf: 39)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin,

Puji dan syukur kehadirat Allah Subhanahu Wata'ala atas limpahan nikmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad Shallallahu 'Alaihi Wasallam.

Dengan penuh syukur, kupersembahkan karya ini kepada:

Keluarga Tercinta

Terimakasih kepada Pipi Oke, kakak Farras Solih dan Ses Fali Super Manja untuk semua do'a, kasih sayang, serta nasehat yang diberikan. Terimakasih seluruh keluargaku karena sudah mendukungku dalam segala hal dan selalu memberikan semangat.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat berjasa dalam membantu, memberikan masukan, arahan, serta ilmu yang berharga.

Sahabat – Sahabatku

Terimakasih kepada sahabat – sahabatku atas semua do'a, dukungan, semangat, serta canda tawa keceriaan selama masa perkuliahan ini.

Almamater Tercinta Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini yang berjudul ”Konstruksi Semimodul *Rough* atas Semiring *Rough*” dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan Tesis ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga tesis ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Dr. Fitriani, S.Si.,M.Sc. selaku Pembimbing 1 serta Pembimbing Akademik yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan tesis ini.

2. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing 2 yang telah memberikan bimbingan, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan tesis ini.

3. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku penguji 1 serta Ketua Jurusan Matematika yang telah banyak memberikan saran dan motivasi kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan tesis ini.

4. Ibu Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku penguji 2 serta ketua Prodi Magister Matematika yang telah banyak memberikan bimbingan, motivasi, saran dan bantuan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan tesis.

5. Pipi, Kakak Farras dan Ses Fali dan keluarga besar yang selalu memotivasi, memberikan dukungan dan do’a kepada penulis.

6. Terimakasih kepada diriku sendiri karena sudah berjuang dan bertahan sejauh ini.

7. Seluruh dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam Universitas Lampung.

8. Teman – teman satu bimbingan, Aira, Lisa, Sandi, Anggita, Bidari, Kak dona, Retno dan Salsa yang telah memberikan semangat, motivasi maupun saran kepada penulis.

9. Teman – teman Jurusan Magister Matematika angkatan 2022 yang sudah banyak membantu selama masa perkuliahan.

10. Semua pihak yang membantu dalam proses penyusunan Tesis ini yang tidak dapat penulis sebut satu persatu.

Semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa tesis ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan tesis ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung,

Evi Trisnawati

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori himpunan *Rough* pertama kali diperkenalkan oleh Zdzislaw Pawlak, seorang ilmuwan asal Polandia pada tahun 1982. Konsep teori himpunan *rough* meliputi aproksimasi atas (*upper approximation*) dan aproksimasi bawah (*lower approximation*) dari suatu himpunan *rough*.

Suatu aproksimasi dibentuk berdasarkan relasi ekuivalen yang merupakan suatu relasi yang memiliki sifat refleksi, sifat simetris, dan sifat transitif. Pasangan berurut himpunan semesta U dan relasi ekuivalen R yang dinyatakan dengan notasi (U, R) disebut sebagai ruang aproksimasi. Jika terdapat himpunan $X \subseteq U$, aproksimasi atas dari X pada suatu ruang aproksimasi (U, R) dinyatakan dengan notasi $\overline{Apr}(X)$, dan aproksimasi bawah dari X pada suatu ruang aproksimasi (U, A) dinotasikan dengan $\underline{Apr}(X)$. Selanjutnya, himpunan pasangan berurut aproksimasi atas dan aproksimasi bawah yang dinotasikan dengan $Apr(X)$ merupakan himpunan rough jika $\overline{Apr}(X) - \underline{Apr}(X) \neq \varnothing$.

Berbagai penelitian telah banyak dilakukan terkait himpunan *rough*. Biswas dan Nanda pada tahun 1994 melakukan penelitian mengenai grup *rough* dan subgrup rough (Biswas dan Nanda, 1994). Selanjutnya, De-song pada tahun 2004 mengemukakan gagasan mengenai penerapan dua teori dari himpunan *rough* pada grup dan ring (De-song, 2004), pada tahun yang sama Davvas mempelajari *rough* pada ring (Davvas, 2004). Kemudian pada tahun 2006, Davvas dan Mahdavipour mempelajari *rough* pada modul (Davvas dan Mahdavipour, 2006). Pada tahun yang sama, Qung-feng mempelajari *rough* pada modul dan sifat-sifatnya (Qung-feng, 2006). Pada tahun 2005, Miao dkk mempelajari *group rough, subgroup rough* dan sifat-sifatnya (Miao dkk., 2005). Pada tahun 2014, Sinha dan Prakash mempelajari modul proyektif pada himpunan *rough* (Sinha dan Prakash, 2014). Selanjutnya, penelitian terbaru oleh Nugraha pada tahun 2022 membahas mengenai penerapan konsep himpunan kesat (*rough* set) pada stuktur grup (Nugraha dkk., 2022), Hafifullah pada tahun 2022 membahas mengenai sifat-sifat barisan *V-Coexect rough* dalam grup *rough* (Hafifullah dkk., 2022), dan pada tahun 2023 Dwiyanti membahas mengenai penerapan konsep himpunan *rough* pada struktur modul proyektif (Yanti dkk., 2023).

Berdasarkan perkembangan penelitian yang telah diuraikan sebelumnya, pada penelitian ini akan dibahas mengenai penerapan himpunan *rough* pada semimodul *rough* atas semiring *rough*, serta menyelidiki sifat-sifatnya dan membuat program *Python* untuk menentukan suatu himpunan *rough* pada struktur aljabar.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah:

1. mengkontruksi semimodul *rough* atas semiring *rough*;
2. menyelidiki sifat-sifat semimodul *rough* atas semiring *rough*;
3. membuat program untuk menentukan semimodul *rough* atas semiring *rough* menggunakan *Python* .

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah:

1. menambah pengetahuan yang berkaitan dengan struktur aljabar terutama pada himpunan *rough*.
2. mengembangkan pengetahuan tentang penerapan himpunan *rough* dalam semimodul *rough* atas semiring *rough*.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Teori himpunan *Rough* pertama kali diperkenalkan oleh Zdzislaw Pawlak ilmuwan asal Polandia pada tahun 1982. Konsep teori himpunan rough mencakup dua bagian yaitu aproksimasi atas (*upper approximation*) dan aproksimasi bawah (*lower approximation*).

2.1 Himpunan *Rough*

Sebelum membahas mengenai himpunan rough, terlebih dahulu diberikan definisi dari relasi.

Definisi 2.1.1 Relasi R dari himpunan A ke himpunan B adalah himpunan bagian dari $A \times B$.

Untuk memahami Definisi 2.1.1, berikut diberikan contoh dari relasi.

Contoh 2.1.2 Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{a, b, c\}$. Jika didefinisikan $R = \{(2, a),\ (2, b), (3, a)\} \subseteq A \times B$, maka R adalah relasi dari himpunan A ke B. Karena $(2, a) \in R$, dapat dikatakan bahwa 2 berelasi dengan a dan ditulis $2Ra$.

Setelah memahami definisi dari relasi, berikut diberikan definisi dari relasi ekuivalensi.

Definisi 2.1.3 Diberikan definisi relasi ekuivalensi, relasi R pada himpunan A dikatakan ekuivalensi jika:

1. Relasi R bersifat refleksif, yaitu aRa untuk setiap $a \in\ A$;

2. Relasi R bersifat simetris, yaitu aRb berakibat bRa untuk setiap $a, b \in\ A$

3. Relasi R bersifat transitif, yaitu aRb dan bRc berakibat aRc untuk setiap $a, b, c \in A$ (Barnier dan Feldman,1990).

Untuk memahami Definisi 2.1.3 berikut diberikan contoh.

Contoh 2.1.4 Didefinisikan relasi R pada himpunan $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$ sebagai berikut: $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}x\mathbb{Z}$. Akan ditentukan apakah relasi R merupakan relasi ekuivalensi.

1. Diberikan sebarang $(a, b) \in \mathbb{Z}x\mathbb{Z}$. Karena $ab = ab$, diperoleh $(a, b)R(a, b)$. Oleh karena itu, relasi R bersifat refleksif.

2. Diberikan sebarang $(a, b), (c, d)\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$, dengan $(a, b)R(c, d)$. Oleh karena itu, $ab = cd$ yang berakibat $cd = ab$, sehingga diperoleh $(c, d)R(a, b)$. Jadi, relasi R bersifat simetris.

3. Diberikan sebarang $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{Z}x\mathbb{Z}$ dengan $(a, b)R(c, d)$. Oleh karena itu, $ab = cd$ yang berakibat $cd = ef$. Akibatnya, $ab = ef$ atau $(a, b)R(e, f)$. Akibatnya, relasi R bersifat transitif.

Jadi, relasi R bersifat refleksif, simetris dan transitif, sehingga R merupakan relasi ekuivalensi.

Setelah memahami definisi dari relasi ekuivalensi, akan diberikan definisi kelas-kelas ekuivalensi.

Definisi 2.1.5 Diberikan relasi ekuivalensi R pada himpunan A. Kelas ekuivalensi dari A pada R adalah $[a]_R = \{x : x \in A$ dan $aRx\}$ (Barnier dan Feldman, 1990).

Berikut akan diberikan contoh, untuk memahami definisi kelas-kelas ekuivalens.

Contoh 2.1.6 Diberikan $U = \mathbb{Z}_{10}$ dengan $U = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan U untuk setiap $a, b \in U$, dengan $a - b = 3z$ untuk $k \in Z$. Diperoleh kelas-kelas ekuivalensi sebagai berikut:

$E_1 = [\overline{0}] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$;
$E_2 = [\overline{1}] = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{7}\}$;

$E_3 = [\overline{2}] = \{\overline{2}, \overline{5}, \overline{8}\}$.
Kelas-kelas ekuivalensi yang diperoleh yaitu E_1, E_2, E_3.

Selanjutnya akan diberikan definisi mengenai ruang aproksimasi yang merupakan syarat penting untuk pembentukan himpunan *rough*.

Definisi 2.1.7 Diberikan ruang aproksimasi $K = (U, R)$, dan X merupakan himpunan bagian dari tak kosong U. Aproksimasi atas dan aproksimasi bawah dari X dapat didefinisikan sebagai berikut:

Aproksimasi atas $\overline{Apr}(X)$ adalah gabungan seluruh kelas ekuivalensi yang irisannya dengan X tidak kosong, atau dapat dinyatakan $\overline{Apr}(X) = \{x|[x] \cap X \neq \emptyset\}$.

Aproksimasi bawah $\underline{Apr}(X)$ adalah gabungan seluruh kelas ekuivalensi yang termuat di X, atau dinyatakan $\underline{Apr}(X) = \{x|[x] \subseteq X\}$.

$\overline{Apr}(X)$ disebut aproksimasi atas dari X dan $\underline{Apr}(X)$ disebut aproksimasi bawah dari X (Davvaz dkk., 2021).

Berikut diberikan proposisi mengenai himpunan *rough*.

Proposisi 2.1.8 Diberikan himpunan $X, Y \subseteq U$ berlaku sifat-sifat berikut:

1. $\underline{X} \subseteq X \subseteq \overline{X}$,
2. $\underline{R} = \overline{R} = R$, $\underline{U} = \overline{U} = U$,
3. $X \cap Y = \underline{X} \cap \underline{Y}$,
4. $\overline{X \cap Y} \subseteq \overline{X} \cap \overline{Y}$,
5. $\underline{X} \cup \overline{Y} \subseteq \underline{X \cup Y}$,
6. $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$,
7. $X \subseteq Y$ jika dan hanya jika $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$ dan $\underline{X} \subseteq \underline{Y}$ (Miao dkk., 2005).

Untuk memahami himpunan *rough*, berikut akan diberikan contoh dari himpunan *rough*.

Contoh 2.1.9 Diberikan $U = \mathbb{Z}_{10}$ dengan $U = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan U untuk setiap $a, b \in U$, dengan $a - b = 3z$ untuk $k \in Z$.

1. Diberikan sebarang $a \in U$, karena $a - a = 0 = 3z$ dan $0 \in Z$, diperoleh aRa. Dengan demikian relasi R bersifat refleksif.

2. Diberikan sebarang $a, b \in U$ dengan aRb artinya $a - b = 3z$ untuk suatu $z \in \mathbb{Z}$. Oleh karena itu, $b - a = -(3z)$ dengan $-z \in \mathbb{Z}$. Dengan demikian, bRa sehingga relasi R bersifat simetris.

3. Diberikan sebarang $a, b, c \in U$ dengan aRb dan bRc. Diperoleh $a - b = 3z'$ dan $b - c = 3z''$ dengan $a, b \in Z$. Hal ini berakibat

   $$a - c = (a - b) + (b - c) = 3z' + 3z'' = 3(z' + z''),$$

   dengan $(z' + z'') \in \mathbb{Z}$. Dengan demikian aRc sehingga relasi R bersifat transitif.

Sehingga relasi bersifat refleksif, simetris dan transitif. Selanjutnya diperoleh kelas-kelas ekuivalensi sebagai berikut:

$E_1 = [\overline{0}] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$;
$E_2 = [\overline{1}] = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{7}\}$;
$E_3 = [\overline{2}] = \{\overline{2}, \overline{5}, \overline{8}\}$.
Diperoleh kelas-kelas ekuivalensi yang diperoleh yaitu E_1, E_2, E_3.

Diberikan himpunan bagian $A \subseteq U$ dengan $A = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}\}$. Diperoleh $\overline{Apr}(A)$ = $E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}\} = U$ dan $\underline{Apr}(A)$ = $E_2 = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{7}\}$. Jadi $\overline{Apr}(A) - \underline{Apr}(A) \neq \emptyset$, sehingga A merupakan himpunan *rough*.

2.2 Monoid *Rough*

Setelah memahami konsep dari himpunan *rough*, akan diberikan definisi mengenai monoid *rough*. Monoid *rough* adalah bentuk sederhana dari grup *rough*. Berikut diberikan definisi dari monoid *rough*.

Definisi 2.2.1 Suatu himpunan tak kosong G dengan operasi biner * disebut monoid rough jika memenuhi aksioma berikut:

1. operasi $*$ bersifat tertutup di $\overline{Apr}(G)$;
2. operasi * bersifat asosiatif ;
3. terdapat elemen e di $\overline{Apr}(G)$ yang dinamakan elemen identitas di G (Bagirmaz dan ozcan, 2015).

Untuk memahami monoid *rough*, berikut akan diberikan contoh dari monoid *rough* menggunakan Contoh 2.1.4.

Contoh 2.2.2 Diberikan $U = \mathbb{Z}_{10}$ dengan $U = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan U untuk setiap $a, b \in U$, dengan $a - b = 3z$ untuk $k \in Z$.

1. Diberikan sebarang $a \in U$, karena $a - a = 0 = 3z$ dan $0 \in Z$, diperoleh aRa. Dengan demikian relasi R bersifat refleksif.
2. Diberikan sebarang $a, b \in U$ dengan aRb artinya $a - b = 3z$ untuk suatu $z \in \mathbb{Z}$. Oleh karena itu, $b - a = -(3z)$ dengan $-z \in \mathbb{Z}$. Dengan demikian, bRa sehingga relasi R bersifat simetris.

3. Diberikan sebarang $a, b, c \in U$ dengan aRb dan bRc. Diperoleh $a - b = 3z'$ dan $b - c = 3z''$ dengan $a, b \in Z$. Hal ini berakibat

$$a - c = (a - b) + (b - c) = 3z' + 3z'' = 3(z' + z''),$$

dengan $z' + z'' \in \mathbb{Z}$. Dengan demikian aRc sehingga relasi R bersifat transitif.

Oleh karena itu, R relasi bersifat refleksif, simetris dan transitif. Selanjutnya diperoleh kelas-kelas ekuivalensi sebagai berikut:

$E_1 = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$;

$E_2 = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{7}\}$;

$E_3 = \{\overline{2}, \overline{5}, \overline{8}\}$.

Diberikan himpunan bagian $A \subseteq U$ dengan $A = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}\}$. Diperoleh $\overline{Apr}(A)$ = $E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}\} = U$ dan $\underline{Apr}(A)$ = $E_2 = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{7}\}$. Jadi $\overline{Apr}(A) - \underline{Apr}(A) \neq \emptyset$.

Berikut diberikan Tabel *Cayley* dari $\mathbb{Z}_{10}$ yang digunakan untuk menunjukkan himpunan tersebut memenuhi aksioma-aksioma yang merupakan monoid *rough*. Tabel *Cayley* digunakan untuk melihat himpunan yang digunakan termuat pada ruang aproksimasi atas di U . Berikut disajikan Tabel *Cayley* penjumlahan modulo 10 di $\mathbb{Z}_{10}$.

Tabel 2.2.1 Tabel *Cayley* penjumlahan modulo 10 di Y

$+_{10}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$

1. Untuk setiap $x, y \in U$, berlaku $x +_{10} y \in \overline{Apr}(A)$;
2. Untuk setiap $x, y, z \in U$, $(x +_{10} y) +_{10} z = x +_{10} (y +_{10} z)$ terpenuhi di $\overline{Apr}(A)$ (berlaku sifat asosiatif di $\overline{Apr}(A)$);
3. Terdapat $e \in \overline{Apr}(A$ yaitu $\overline{0} \in \overline{Apr}(A)$ sehingga untuk setiap $x \in U$, berlaku $x +_{10} e = e +_{10} x = x$ (e disebut elemen identitas *rough* dari U);
4. Untuk setiap $x, y \in X$ berlaku $x +_{10} y = y +_{10} x$ sehingga X dengan operasi $+_{10}$ bersifat komutatif.

Dari 1-4 terbukti bahwa $(X, +_{10})$ merupakan monoid *rough*.

2.3 Grup

Setelah mengetahui monoid *rough* dengan aksioma-aksiomanya, selanjutnya dalam struktur aljabar akan diberikan definisi mengenai grup. Suatu struktur aljabar yang terdiri atas satu himpunan dan satu operasi biner yang memenuhi aksioma tertentu dinamakan grup.

Definisi 2.3.1 Grup $\langle G, * \rangle$ adalah himpunan tak kosong G dengan operasi biner * dan memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. operasi biner * bersifat asosiatif;
2. terdapat elemen identitas e untuk operasi biner *;
3. untuk setiap elemen $x \in G$, terdapat $x^{-1}G$ sehingga $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Untuk memahami definisi dari grup tersebut, berikut diberikan contoh grup.

Contoh 2.3.2 Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_5\backslash\{\overline{0}\}$ dan operasi $\cdot_5$ merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}_5\backslash\{\overline{0}\}$. Akan dibuktikan bahwa $\langle\mathbb{Z}_5\backslash\{\overline{0}\}\rangle$ merupakan suatu grup.

Tabel 2.3.2 Tabel *Cayley* perkalian modulo 5 pada himpunan $\mathbb{Z}_5\backslash\{\overline{0}\}$

$\cdot_5$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

1. Dari Tabel 2.3.2 terlihat bahwa $\mathbb{Z}_5\backslash\{\overline{0}\}$ tertutup terhadap operasi $\cdot_5$.
2. Dari Tabel 2.3.2 terlihat bahwa operasi $\cdot_5$ bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}_5\backslash\{\overline{0}\}$.
3. Terdapat $e = \overline{1} \in \mathbb{Z}_5\backslash\{\overline{0}\}$, sehingga $a \cdot_5 e = a = e \cdot_5 a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_5\backslash\{\overline{0}\}$.
4. Dari Tabel 2.3.2 diperoleh:
   $(\overline{1})^{-1} = \overline{1}$;
   $(\overline{2})^{-1} = \overline{3}$;
   $(\overline{3})^{-1} = \overline{2}$;
   $(\overline{4})^{-1} = \overline{4}$.
   Jadi, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_5\backslash\{\overline{0}\}$, terdapat $a^{-1} \in \mathbb{Z}_5\backslash\{\overline{0}\}$, sehingga $a \cdot_5 a^{-1} = a^{-1} \cdot a = \overline{1}$.

Berdasarkan hal tersebut, terbukti bahwa $\langle\mathbb{Z}_5\backslash\{\overline{0}\}, \cdot_5\rangle$ merupakan grup.

Selanjutnya suatu himpunan bagian dari himpunan yang merupakan grup dapat membentuk subgrup, berikut definisi mengenai subgrup.

Proposisi 2.3.3 Himpunan H merupakan himpunan bagian dari grup G, dikatakan subgrup jika memenuhi:

1. himpunan $H \neq \emptyset$, dan
2. untuk setiap $x, y \in H, xy^{-1} \in H$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Bukti.
Asumsikan H merupakan subgrup G. Akan ditunjukkan sifat (1) dan (2) terpenuhi. Karena H merupakan subgrup G, elemen identitas e termuat di H. Akibatnya $H \neq \emptyset$, sehingga sifat (1) terpenuhi. Selanjutnya, diberikan sebarang $x, y \in H$. Karena H merupakan subgrup G, $y^{-1} \in H$. ■

Untuk memahami definisi subgrup, berikut diberikan contoh subgrup.

Contoh 2.3.4 Diberikan grup $\mathbb{Z}_{12} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{11}\}$ terhadap operasi biner penjumlahan modulu 12 dan $H = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$. Akan ditunjukkan H merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}_{12}$.

1. himpunan $H \neq \emptyset$, dan
2. untuk setiap $a, b \in H$ berlaku $a -_{12} b \in H$.

Oleh karena itu, terbukti H merupakan subgrup.

2.4 Grup *Rough*

Setelah memahami definisi dan contoh dari himpunan *rough* yang merupakan dasar dari penelitian ini. Selanjunya akan dipelajari mengenai grup *rough*. Berikut diberikan definisi dari grup *rough*.

Definisi 2.4.1 Diberikan ruang aproksimasi $k = (U, R)$ dengan operasi biner $*$ pada U. Himpunan $G \subseteq U$ disebut grup *rough* jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. untuk setiap $x, y \in G$, berlaku $x * y \in \overline{Apr}(G)$;
2. untuk setiap $x, y, z \in G$, berlaku $(x * y) * z = x * (y * z)$ terpenuhi di $\overline{Apr}(G)$;
3. terdapat $e \in \overline{Apr}(G)$ sehingga untuk setiap $x \in G$, $x * e = e * x = x$, elemen e disebut elemen identitas rough di G;

4. untuk setiap $x \in G$, terdapat $y \in G$ sehingga $x * y = yx = e$. Elemen y disebut elemen invers *rough* dari x di G (Miao dkk., 2005).

Selanjutnya akan diberikan contoh dari grup *rough*.

Contoh 2.4.2 Diberikan $U = \mathbb{Z}_{10}$ dengan $U = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan U untuk setiap $a, b \in U$, dengan $a - b = 3z$ untuk $k \in Z$.

1. Diberikan sebarang $a \in U$, karena $a - a = 0 = 3z$ dan $0 \in Z$, diperoleh aRa. Dengan demikian relasi R bersifat refleksif.

2. Diberikan sebarang $a, b \in U$ dengan aRb artinya $a - b = 3z$ untuk suatu $z \in \mathbb{Z}$. Oleh karena itu, $b - a = -(3z)$ dengan $-z \in \mathbb{Z}$. Dengan demikian, bRa sehingga relasi R bersifat simetris.

3. Diberikan sebarang $a, b, c \in U$ dengan aRb dan bRc. Diperoleh $a - b = 3z'$ dan $b - c = 3z''$ dengan $a, b \in Z$. Hal ini berakibat

   $$a - c = (a - b) + (b - c) = 3z' + 3z'' = 3(z' + z''),$$

   dengan $z' + z'' \in \mathbb{Z}$. Dengan demikian aRc sehingga relasi R bersifat transitif.

Oleh karena itu, R relasi bersifat refleksif, simetris dan transitif. Selanjutnya, diperoleh kelas-kelas ekuivalensi sebagai berikut:

$E_1 = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$;

$E_2 = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{7}\}$;

$E_3 = \{\overline{2}, \overline{5}, \overline{8}\}$.

Diberikan himpunan bagian $A \subseteq U$ dengan $A = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}\}$. Diperoleh $\overline{Apr}(A)$ = $E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}\} = U$ dan $\underline{Apr}(A) = \emptyset$. Jadi $\overline{Apr}(A) - \underline{Apr}(A) \neq \emptyset$.

Berikut diberikan Tabel *Cayley* dari $\mathbb{Z}_{10}$ yang digunakan untuk menunjukkan himpunan tersebut memenuhi aksioma-aksioma yang merupakan grup *rough*. Tabel *Cayley* digunakan untuk melihat himpunan yang digunakan termuat pada ruang aproksimasi atas di U . Berikut disajikan Tabel *Cayley* penjumlahan modulo 10 di $\mathbb{Z}_{10}$.

Tabel 2.4.3 Tabel *Cayley* penjumlahan modulo 10 di Y

$+_{10}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$

1. Untuk setiap $a, b \in U$, berlaku $a +_{10} b \in \overline{Apr}(A)$;
2. Untuk setiap $a, b, c \in U$, $(a +_{10} b) +_{10} c = a +_{10} (b +_{10} c)$ terpenuhi di $\overline{Apr}(A)$ (berlaku sifat asosiatif di $\overline{Apr}(A)$);
3. Terdapat $e \in \overline{Apr}(A)$ yaitu $\overline{0} \in \overline{Apr}(A)$ sehingga untuk setiap $x \in U$, berlaku $x +_{10} e = e +_{10} x = x$ (e disebut elemen identitas *rough* dari U);
4. Untuk setiap $x \in A$ terdapat $-x \in A$ sehingga $x +_{10} (-x) = (-x) +_{10} x = e$ ($-x$ disebut elemen invers *rough* dari x di A). Berdasarkan Tabel 2.4.5 dapat dilihat bahwa setiap elemen x dihimpunan A memiliki invers $-x$ dihimpunan A.

   Tabel 2.4.4 Tabel invers dari anggota himpunan A

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$-x$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$

5. Untuk setiap $a, b \in A$ berlaku $a +_{10} b = b +_{10} a$ sehingga A dengan operasi $+_{10}$ bersifat komutatif.

Dari 1-5 terbukti bahwa $(A, +_{10})$ merupakan grup *rough*.

Selanjutnya, akan diberikan definisi subgrup *rough* sebagai berikut.

Definisi 2.4.3 Diberikan grup *rough* G dengan operasi biner $*$ dan himpunan tak kosong H, dengan $H \subseteq G$. H disebut subgrup *rough* dari G jika H juga merupakan grup *rough* terhadap operasi biner $*$ yang sama dengan G (Kumar dkk., 2020).

Kemudian subgrup *rough* juga dapat didefiniskan jika memenuhi dua aksioma. Berikut ini diberikan definisi lain dari subgrup *rough*.

Definisi 2.4.4 Diberikan grup *rough* G dan $H \subseteq G$. Himpunan H merupakan - subgrup *rough* dari G jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

i) untuk setiap $a, b \in H, a * b \in \overline{Apr}(H)$;

ii) untuk setiap $a \in H, a^{-1} \in H$ (Kumar dkk., 2020).

Bukti.
Diketahui H adalah subgrup dari G. Hal ini berakibat untuk setiap $a, b \in S$ maka $a - b \in S$. Apabila H adalah subgrup dari G maka operasi pergandaan skalar pada R juga berlaku di H. Akibatnya, untuk setiap $r \in R$ dan $a \in H$ berlaku $r \circ a \in H$. Dengan demikian, H merupakan subgrup di R. $\blacksquare$

Berikut diberikan contoh untuk memahami Definisi 2.4.4.

Contoh 2.4.5 Diberikan himpunan bagian $S \subseteq A$ dengan $= \{\overline{0}, \overline{5}\}$. Diperoleh $\overline{Apr}(A)$ = $E_1 \cup E_3 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{9}\}$ dan $\underline{Apr}(A) = \emptyset$. Jadi $\overline{Apr}(A) - \underline{Apr}(A) \neq \emptyset$.

Berikut diberikan Tabel *Cayley* dari $\mathbb{Z}_{10}$ yang digunakan untuk menunjukkan himpunan tersebut memenuhi aksioma-aksioma yang merupakan subgrup *rough*. Tabel *Cayley* digunakan untuk melihat himpunan yang digunakan termuat pada ruang aproksimasi atas. Berikut disajikan Tabel *Cayley* penjumlahan modulo 10 di $\mathbb{Z}_{10}$.

Tabel 2.4.5 Tabel *Cayley* penjumlahan modulo 10 di Y

$+_{10}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$

1. Untuk setiap $a, b \in U$, berlaku $a +_{10} b \in \overline{Apr}(S)$;
2. Untuk setiap $a, b, c \in U$, $(a +_{10} b) +_{10} c = a +_{10} (b +_{10} c)$ terpenuhi di $\overline{Apr}(S)$ (berlaku sifat asosiatif di $\overline{Apr}(S)$);
3. Terdapat $e \in \overline{Apr}(S)$ yaitu $\overline{0} \in \overline{Apr}(S)$ sehingga untuk setiap $x \in U$, berlaku $x +_{10} e = e +_{10} x = x$ (e disebut elemen identitas *rough* dari U);
4. Untuk setiap $x \in S$ terdapat $-x \in S$ sehingga $x +_{10} (-x) = (-x) +_{10} x = e$ ($-x$ disebut elemen invers *rough* dari x di S). Berdasarkan Tabel 2.4.5 dapat dilihat bahwa setiap elemen x dihimpunan S memiliki invers $-x$ dihimpunan S.

Tabel 2.4.6 Tabel invers dari anggota himpunan A

x	$\overline{0}$	$\overline{5}$
$-x$	$\overline{0}$	$\overline{5}$

5. Untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a +_{10} b = b +_{10} a$ sehingga S dengan operasi $+_{10}$ bersifat komutatif.

Dari 1-5 terbukti bahwa $(S, +_{10})$ merupakan subgrup *rough*.

2.5 Ring

Setelah memahami konsep dari grup yang memiliki satu operasi biner. selanjutnya akan dipelajari struktur aljabar yang memiliki dua operasi biner yang dikenal dengan ring.

Definisi 2.5.1 Ring R adalah himpunan dengan dua operasi biner, penjumlahan (dilambangkan dengan $a + b$) dan perkalian (dilambangkan dengan ab), yang memenuhi aksioma-aksioma berikut.

1. $\langle R, +\rangle$ merupakan grup komutatif;

2. operasi bersifat asosiatif, $(ab)c = a(bc)$ untuk setiap $a, b, c \in R$;

3. berlaku hukum distributif kiri dan hukum distributif kanan, untuk setiap $a, b, c \in R$, yaitu:$a(b+c) = (ab)+(ac)$ dan $(a+b)c = (ac)+(bc)$ (Dummit & Foote, 2004).

Ring dinotasikan dengan $\langle R, +, \cdot\rangle$, dengan R merupakan himpunan tak kosong, $+$ dan $\cdot$ merupakan dua operasi biner pada R. Selanjutnya ini akan diberikan contoh ring.

Contoh 2.5.2 Diberikan A himpunan semua fungsi $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Untuk setiap $a, b \in A$ dan $x \in \mathbb{R}$, didefinisikan dengan:

$$(a + b)(x) = a(x) + b(x)$$

dan

$$(ab)(x) = a(x)b(x).$$

i) $\langle A, +\rangle$ merupakan grup abel.

ii) Untuk setiap $a, b \in A$ dan $x \in \mathbb{R}$, berlaku:

$$(ab)(x) = a(x)b(x) \in \mathbb{R}$$

Jadi, operasi $\cdot$ bersifat tertutup.

iii) Untuk setiap $a, b, c \in A$ dan $x \in \mathbb{R}$, berlaku:

$$\begin{aligned} ((ab)c)(x) &= (ab)(x)c(x) \\ &= a(x)b(x)c(x) \\ &= a(x)(bc)(x) \\ &= (a(bc))(x). \end{aligned}$$

Jadi, $((ab)c)(x) = (a(bc))(x)$ artinya operasi $\cdot$ bersifat asosiatif.

iv) Untuk $a, b, c \in A$ dan $x \in \mathbb{R}$, berlaku:

$$
\begin{aligned}
(a(b+c))(x) &= a(x)(b+c)(x) \\
&= a(x)(b(x)+c(x)) \\
&= a(x)b(x)+c(x)h(x) \\
&= (ab)(x)+(ac)(x) \\
&= (ab+ac)(x)
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
((a+b)c)(x) &= (a+b)(x)c(x) \\
&= (a(x)+b(x))c(x) \\
&= a(x)c(x)+b(x)c(x) \\
&= (ac)(x)+(bc)(x) \\
&= (ac+bc)(x).
\end{aligned}
$$

Jadi, berlaku hukum distributif kiri dan kanan pada A. Berdasarkan pernyataan i), ii), iii), dan iv) terbukti bahwa $\langle A, +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

Setelah membahas mengenai definisi ring, sama halnya seperti dalam grup terdapat subgrup begitu juga pada ring terdapat subring. Berikut diberikan definisi subring beserta contohnya.

Teorema 2.5.3 Diberikan himpunan bagian tak kosong S di dalam ring $\langle R, +, \cdot \rangle$. Himpunan S disebut subring dari R untuk setiap $s_1, s_2 \in S$ jika memenuhi:

1. $s_1 - s_2 \in S$,

2. $s_1 \cdot s_2 \in S$, untuk setiap $s_1, s_2 \in S$ (Wahyuni dkk., 2016).

Bukti.

Diketahui S adalah subring dari R. Hal ini berakibat untuk setiap $s_1, s_2 \in S$ maka $s_1 - s_2 \in S$. Apabila S adalah subring dari R maka operasi pergandaan skalar pada R juga berlaku di S. Akibatnya, untuk setiap $r \in R$ dan $s \in S$ berlaku $r \circ s \in S$. Dengan demikian, S merupakan subring di R. ■

Berikut diberikan contoh subring untuk memahami Teorema 2.5.2.

Contoh 2.5.4 Diberikan himpunan $k\mathbb{Z} = \{kz|z \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan $k\mathbb{Z}$ merupakan subring $\mathbb{Z}$. Diberikan sebarang $a, b \in k\mathbb{Z}$ terdapat $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{Z}$ sehingga $a = kz_1$ dan $b = kz_2$.

1. $a - b = kz_1 - kz_2 = k(z_1 - z_2) \in k\mathbb{Z}$,
2. $a \cdot b = kz_1 \cdot kz_2 = k(kz_1z_2) \in k\mathbb{Z}$.

Jadi terbukti $k\mathbb{Z}$ merupakan subring $\mathbb{Z}$.

2.6 Ring *Rough*

Setelah memahami definisi grup *rough* berikut akan diberikan himpunan *rough* dengan dua operasi biner yang membentuk ring *rough*. Berikut definisi ring *rough*.

Definisi 2.6.1 Sistem aljabar yang memiliki dua operasi biner $\langle Apr(R), +, *\rangle$ disebut ring *rough* jika memenuhi aksioma berikut:

1. $\langle Apr(R), +\rangle$ merupakan grup komutatif *rough* terhadap operasi $+$;
2. $\langle Apr(R), *\rangle$ merupakan semigrup *rough* terhadap operasi $*$ atau R bersifat asosiatif;
3. untuk setiap $x, y, z \in R$, berlaku hukum distributif kanan $(x + y) * z = (x * z) + (y * z)$ dan hukum distributif kiri $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$ di $\overline{Apr}(R)$ (De-song, 2004).

Untuk memahami Definisi 2.6.1 berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.6.2 Diberikan $U = \mathbb{Z}_{10}$ dengan $U = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan U untuk setiap $a, b \in U$, dengan $a - b = 3z$ untuk $k \in Z$.

1. Diberikan sebarang $a \in U$, karena $a - a = 0 = 3z$ dan $0 \in Z$, diperoleh aRa. Dengan demikian relasi R bersifat refleksif.

2. Diberikan sebarang $a, b \in U$ dengan aRb artinya $a - b = 3z$ untuk suatu $z \in \mathbb{Z}$. Oleh karena itu, $b - a = -(3z)$ dengan $-z \in \mathbb{Z}$. Dengan demikian, bRa sehingga relasi R bersifat simetris.

3. Diberikan sebarang $a, b, c \in U$ dengan aRb dan bRc. Diperoleh $a - b = 3z'$ dan $b - c = 3z''$ dengan $a, b \in Z$. Hal ini berakibat

$$a - c = (a - b) + (b - c) = 3z' + 3z'' = 3(z' + z''),$$

dengan $(z' + z'') \in \mathbb{Z}$. Dengan demikian aRc sehingga relasi R bersifat transitif.

Sehingga relasi bersifat refleksif, simetris dan transitif. Selanjutnya diperoleh kelas-kelas ekuivalensi sebagai berikut:

$E_1 = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$;

$E_2 = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{7}\}$;

$E_3 = \{\overline{2}, \overline{5}, \overline{8}\}$.

Diberikan himpunan bagian $R \subseteq U$ dengan $R = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{6}, \overline{8}\}$. Diperoleh $\overline{Apr}(R)$ = $E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}\} = U$ dan $\underline{Apr}(R)$ = $\emptyset$. Jadi $\overline{Apr}(R) - \underline{Apr}(R) \neq \emptyset$.

Berikut diberikan Tabel *Cayley* dari $\mathbb{Z}_{10}$ yang digunakan untuk menunjukkan himpunan tersebut memenuhi aksioma-aksioma yang merupakan ring *rough*. Tabel *Cayley* digunakan untuk melihat himpunan yang digunakan termuat pada ruang aproksimasi atas di U . Berikut disajikan Tabel *Cayley* penjumlahan modulo 10 di $\mathbb{Z}_{10}$.

Tabel 2.6.7 Tabel *Cayley* penjumlahan modulo 10 di Y

$+_{10}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{9}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$

1. Untuk setiap $a, b \in U$, berlaku $a +_{10} b \in \overline{Apr}(R)$;

2. Untuk setiap $a, b, c \in U$, $(a +_{10} b) +_{10} c = a +_{10} (b +_{10} c)$ terpenuhi di $\overline{Apr}(R)$ (berlaku sifat asosiatif di $\overline{Apr}(R)$);

3. Terdapat $e \in \overline{Apr}(R)$ yaitu $\overline{0} \in \overline{Apr}(R)$ sehingga untuk setiap $x \in U$, berlaku $x +_{10} e = e +_{10} x = x$ (e disebut elemen identitas *rough* dari U);

4. Untuk setiap $x \in R$ terdapat $-x \in R$ sehingga $x +_{10} (-x) = (-x) +_{10} x = e$ ($-x$ disebut elemen invers *rough* dari x di R). Berdasarkan Tabel 2.4.5 dapat dilihat bahwa setiap elemen x dihimpunan A memiliki invers $-x$ dihimpunan A.

Tabel 2.6.8 Tabel invers dari anggota himpunan R

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$
$-x$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$

5. Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a +_{10} b = b +_{10} a$ sehingga R dengan operasi $+_{10}$ bersifat komutatif.
6. Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a \cdot_{10} b \in \overline{Apr}(R)$ dapat dilihat pada Tabel 2.6.8 berikut ini.

7. Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $(a \cdot_{10} b) \cdot_{10} c = a \cdot_{10} (b \cdot_{10} c)$ terpenuhi di $\overline{Apr}(R)$ (operasi perkalian modulo 10 bersifat asosiatif di $\overline{Apr}(R)$).

Tabel 2.6.9 Tabel *Cayley* perkalian modulo 10 pada himpunan R

$\cdot_{10}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$

8. Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku hukum distributif di $\overline{Apr}(R)$, yaitu:
   a. $a \cdot_{10} (b +_{10} c) = (a \cdot_{10} b) +_{10} (a \cdot_{10} c)$ (hukum distributif kiri);
   b. $(a +_{10} b) \cdot_{10} c = (a \cdot_{10} c) +_{10} (b \cdot_{10} c)$ (hukum distributif kanan).

Oleh karena itu, berdasarkan 1 - 8 dapat disimpulkan $\langle R, +_{10}, \cdot_{10}\rangle$ merupakan ring *rough* dari ruang aproksimasi (U, θ).

Selanjutnya, akan dibahas mengenai subring *rough*, berikut definisinya.

Definisi 2.6.3 Diberikan ring *rough* R dengan operasi $+$ dan $*$ serta himpunan tak kosong T dengan $T \subseteq R$. Himpunan T disebut subring *rough* dari R jika T juga merupakan ring *rough* terhadap operasi yang sama dengan R (De-song, 2004).

Berikut merupakan syarat cukup dan perlu untuk membuktikan himpunan bagian dalam ring *rough* merupakan subring *rough*.

Proposisi 2.6.4 Diberikan ring *rough* $\langle R, +, *\rangle$ dan himpunan tak kosong T dengan $T \subseteq R$. Himpunan T disebut subring *rough* R untuk setiap $t_1, t_2 \in T$ berlaku:

1. $t_1 - t_2 \in \overline{Apr}(T)$;
2. $t_1 \circ t_2 \in \overline{Apr}(T)$ (De-song, 2004).

Bukti.

Diketahui T adalah subring dari R. Hal ini berakibat untuk setiap $t_1, t_2 \in T$ maka $t_1 - t_2 \in \overline{Apr}(T)$. Apabila T adalah subring dari R maka operasi pergandaan skalar pada R juga berlaku di T. Akibatnya, untuk setiap $r \in R$ dan $t \in T$ berlaku $r \circ t \in \overline{Apr}(T)$. Dengan demikian, T merupakan subring di R. ■

Contoh 2.6.5 Diberikan himpunan bagian $S \subseteq A$ dengan $= \{\overline{0}, \overline{5}\}$. Diperoleh $\overline{Apr}(A)$ = $E_1 \cup E_3 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{9}\}$ dan $\underline{Apr}(A) = \emptyset$. Jadi $\overline{Apr}(A) - \underline{Apr}(A) \neq \emptyset$.

Berikut diberikan Tabel *Cayley* dari $\mathbb{Z}_{10}$ yang digunakan untuk menunjukkan himpunan tersebut memenuhi aksioma-aksioma yang merupakan subgrup *rough*. Tabel *Cayley* digunakan untuk melihat himpunan yang digunakan termuat pada ruang aproksimasi atas. Berikut disajikan Tabel *Cayley* penjumlahan modulo 10 di $\mathbb{Z}_{10}$.

Tabel 2.6.10 Tabel *Cayley* penjumlahan modulo 10 di Y

$+_{10}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$

1. Untuk setiap $a, b \in U$, berlaku $a +_{10} b \in \overline{Apr}(S)$;

2. Untuk setiap $a, b, c \in U$, $(a +_{10} b) +_{10} c = a +_{10} (b +_{10} c)$ terpenuhi di $\overline{Apr}(S)$ (berlaku sifat asosiatif di $\overline{Apr}(S)$);

3. Terdapat $e \in \overline{Apr}(S)$ yaitu $\overline{0} \in \overline{Apr}(S)$ sehingga untuk setiap $x \in U$, berlaku $x +_{10} e = e +_{10} x = x$ (e disebut elemen identitas *rough* dari U);

4. Untuk setiap $x \in S$ terdapat $-x \in S$ sehingga $x +_{10} (-x) = (-x) +_{10} x = e$ ($-x$ disebut elemen invers *rough* dari x di S). Berdasarkan Tabel 2.4.5 dapat dilihat bahwa setiap elemen x dihimpunan S memiliki invers $-x$ dihimpunan S.

Tabel 2.6.11 Tabel invers dari anggota himpunan A

x	$\overline{0}$	$\overline{5}$
$-x$	$\overline{0}$	$\overline{5}$

5. Untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a +_{10} b = b +_{10} a$ sehingga S dengan operasi $+_{10}$ bersifat komutatif.

Dari 1-5 terbukti bahwa $(S, +_{10})$ merupakan subring *rough*.

2.7 Modul atas Ring

Setelah memahami definisi grup dan ring yang merupakan hal-hal yang diperlukan dalam pembentuk modul atas ring. Berikut diberikan definisi dari modul beserta aksioma-aksiomanya.

Definisi 2.7.1 Diberikan grup komutatif $\langle M, +\rangle$ dan ring R dengan elemen 1_R, serta operasi skalar $\circ : R \times M \to M$. Grup M disebut modul kiri atas ring terhadap operasi $\circ$ dengan memenuhi aksioma-aksioma berikut.

1. $r_1 \circ (m_1 + m_2) = r_1 \circ m_1 + r_1 \circ m_2$;
2. $(r_1 + r_2) \circ m_1 = r_1 \circ m_1 + r_2 \circ m_1$;
3. $(r_1 \cdot r_2) \circ m_1 = r_1 \circ (r_2 \circ m_1)$;
4. $1_R \circ m_1 = m_1$,

untuk setiap $r_1, r_2 \in R$ dan $m_1, m_2 \in M$ (Adkins & Weintraub, 1992).

Definisi 2.7.2 Diberikan grup komutatif $\langle M, +\rangle$ dan ring R dengan elemen 1_R, serta operasi skalar $\circ : M \times R \to M$. Grup M disebut modul kiri atas ring terhadap operasi $\circ$ dengan memenuhi aksioma-aksioma berikut.

1. $(m_1 + m_2) \circ r_1 = m_1 \circ r_1 + m_2 \circ r_1$;
2. $m_1 \circ (r_1 + r_2) = m_1 \circ r_1 + m_1 \circ r_2$;
3. $m_1 \circ (r_1 \cdot r_2) = r_1 \circ (m_1 \circ r_1) \circ r_2$;
4. $m_1 \circ 1_R = m_1$,

untuk setiap $r_1, r_2 \in R$ dan $m_1, m_2 \in M$ (Adkins & Weintraub, 1992).

Berikut merupakan contoh modul kanan atas ring.

Contoh 2.7.3 Diberikan sebarang ring R dan grup komutatif R^n terhadap operasi pergandaan skalar:

$$(r_1, r_2, \ldots, r_n)t = (r_1t, r_2t, \ldots, r_nt),$$

untuk setiap $t \in R$ dan $(r_1, r_2, \ldots, r_n) \in R^n$. Akan ditunjukkan bahwa grup Abel R^n merupakan modul kanan atas R.

Untuk setiap $t, u \in R$ dan $(r_1, r_2, \ldots, r_n), (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in R^n$, berlaku:

$$\begin{aligned}
((r_1, r_2, \ldots, r_n) + (s_1, s_2, \ldots, s_n))t &= (r_1 + s_1, r_2 + s_2, \ldots, r_n + s_n)t \\
&= (r_1t + s_1t, r_2t + s_2t, \ldots, r_nt + s_nt) \\
&= (r_1t, r_2t, \ldots, r_nt) + (s_1t, s_2t, \ldots, s_nt) \\
&= (r_1, r_2, \ldots, r_n)t + (s_1, s_2, \ldots, s_n)t;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(r_1, r_2, \ldots, r_n)(tu) &= (r_1(tu), r_2(tu), \ldots, r_n(tu)) \\
&= ((r_1t)u, (r_2t)u, \ldots, (r_nt)u) \\
&= (r_1t, r_2t, \ldots, r_nt)u \\
&= ((r_1, r_2, \ldots, r_n)t)u;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(r_1, r_2, \ldots, r_n)(t + u) &= (r_1(t + u), r_2(t + u), \ldots, r_n(t + u)) \\
&= (r_1t + r_1u, r_2t + r_2u, \ldots, r_nt + r_nu) \\
&= (r_1t, r_2t, \ldots, r_nt) + (r_1u, r_2u, \ldots, r_nu) \\
&= (r_1, r_2, \ldots, r_n)t + (r_1, r_2, \ldots, r_n)u;
\end{aligned}$$

$$(r_1, r_2, \ldots, r_n)1 = (r_11, r_21, \ldots, r_n1) = (r_1, r_2, \ldots, r_n).$$

Oleh karena itu, terbukti bahwa grup R^n merupakan modul kanan atas R.

Berikut diberikan contoh modul kiri atas ring.

Contoh 2.7.4 Diberikan himpunan $M_2(\mathbb{Z})$ adalah himpunan matriks orde dua - dengan entri bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Selidiki apakah $M_2(\mathbb{Z})$ merupakan modul kiri atas ring $\mathbb{Z}$.

1) Akan ditunjukkan $\langle M_2(\mathbb{Z}), +\rangle$ merupakan grup komutatif.

   i) Diberikan sebarang A, B, C elemen di $M_2(\mathbb{Z})$. Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$$

   Oleh karena itu, operasi $+$ bersifat tertutup di $M_2(\mathbb{Z})$.

   ii) Diberikan sebarang $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z})$. Telah diketahui bahwa operasi penjumlahan pada matriks bersifat asosiatif, yaitu

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

   Oleh karena itu, operasi $+$ bersifat asosiatif di $M_2(\mathbb{Z})$.

   iii) Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$.

   Karena $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$,

   elemen identitas di $M_2(\mathbb{Z})$ terhadap operasi $+$ adalah $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   iv) Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$.

   Karena $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ -a_3 & -a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ -a_3 & -a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

   invers dari $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ terhadap operasi $+$ di $M_2(\mathbb{Z})$ adalah $\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ -a_3 & -a_4 \end{bmatrix}$.

v) Diberikan sebarang $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$.

Telah diketahui bahwa operasi penjumlahan pada matriks bersifat komutatif, yaitu

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_1 + a_1 & b_2 + a_2 \\ b_3 + a_3 & b_4 + a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \\ &= B + A. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, operasi $+$ bersifat komutatif di $M_2(\mathbb{Z})$.

Dari i), ii), iii), iv), dan v), diperoleh bahwa $\langle M_2(\mathbb{Z}), +$ merupakan grup komutatif.

2) Diberikan sebarang ring Z dan grup komutatif $M_2(\mathbb{Z})$ terhadap operasi pergandaan skalar:

$$r \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra_1 & ra_2 \\ ra_3 & ra_4 \end{bmatrix},$$

untuk setiap $r \in \mathbb{Z}$ dan $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$. Akan ditunjukkan bahwa grup komutatif $M_2(\mathbb{Z})$ merupakan modul kiri atas ring $\mathbb{Z}$.

Untuk setiap yang memenuhi $r, s \in \mathbb{Z}$ dan $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$, berlaku:

i)

$$\begin{aligned}
r(A+B) &= r\left\{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}\right\} \\
&= r\begin{bmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} r(a_1+b_1) & r(a_2+b_2) \\ r(a_3+b_3) & r(a_4+b_4) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ra_1+rb_1 & ra_2+rb_2 \\ ra_3+rb_3 & ra_4+rb_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ra_1 & ra_2 \\ ra_3 & ra_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} rb_1 & rb_2 \\ rb_3 & rb_4 \end{bmatrix} \\
&= r\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \\
&= rA + rB.
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
(r+s)A &= (r+s)\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (r+s)a_1 & (r+s)a_2 \\ (r+s)a_3 & (r+s)a_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ra_1+sa_1 & ra_2+sa_2 \\ ra_3+sa_3 & ra_4+sa_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ra_1 & ra_2 \\ ra_3 & ra_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} sa_1 & sa_2 \\ sa_3 & sa_4 \end{bmatrix} \\
&= rA + sA.
\end{aligned}$$

iii)
$$\begin{aligned}(rs)A &= (rs)\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (rs)a_1 & (rs)a_2 \\ (rs)a_3 & (rs)a_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r(sa_1) & r(sa_2) \\ r(sa_3) & r(sa_4) \end{bmatrix} \\ &= r(sA).\end{aligned}$$

iv)
$$1 \cdot A = 1 \cdot \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}.$$

Dari i) – iv) disimpulkan bahwa $M_2(\mathbb{Z})$ merupakan modul kiri atas ring $\mathbb{Z}$.

Selanjutnya akan dibahas mengenai himpunan bagian atau *subset* dari suatu modul yang juga membentuk modul terhadap operasi pergandaan skalar yang sama dengan operasi pergandaan skalar di modulnya, yang disebut dengan submodul. Berikut diberikan definisinya.

Definisi 2.7.5 Diberikan R-modul M. Suatu himpunan tak kosong $N \subseteq M$ dikatakan submodul dari M jika N merupakan subgrup dari M terhadap operasi penjumlahan, serta N juga merupakan modul atas R terhadap operasi pergandaan skalar yang sama dengan operasi pergandaan pada R-modul M (Wahyuni dkk., 2016).

Untuk mengetahui suatu himpunan bagian dari modul merupakan submodul dapat ditunjukkan dengan aksioma-aksioma.

Proposisi 2.7.6 Diberikan modul M atas ring R dan N merupakan himpunan bagian tak kosong dari M. Himpunan N merupakan submodul di M jika memenuhi aksioma:

1. $s_1 - s_2 \in N$, untuk setiap $s_1, s_2 \in N$;
2. $r \cdot s \in N$, untuk setiap $r \in R$ dan $s \in N$ (Wahyuni dkk., 2016).

Bukti.
Diketahui N adalah submodul dari M. Hal ini berakibat untuk setiap $s_1, s_2 \in N$ maka $s_1 - s_2 \in N$. Apabila N adalah submodul dari M maka operasi pergandaan skalar pada M juga berlaku di N. Akibatnya, untuk setiap $r \in R$ dan $s \in N$ berlaku $r \cdot s \in N$. Dengan demikian, N merupakan submodul di M. ∎

Setelah membahas definisi submodul, berikut merupakan contoh submodul.

Contoh 2.7.7 Diberikan $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}$ dan himpunan tak kosong $7\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan bahwa himpunan $7\mathbb{Z}$ merupakan submodul dari $\mathbb{Z}$.

1. Diambil sebarang $7k_1, 7k_2 \in 7\mathbb{Z}$ dengan $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, diperoleh
$$7k_1 - 7k_2 = 7(k_1 - k_2) \in 7\mathbb{Z}.$$
2. Diambil sebarang $7k_1 \in 7\mathbb{Z}$ dengan $k_1 \in \mathbb{Z}$ dan $r \in \mathbb{Z}$, diperoleh
$$r7k_1 = 7(rk_1) \in 7\mathbb{Z}.$$

Berdasarkan 1 dan 2, terbukti bahwa himpunan $7\mathbb{Z}$ merupakan submodul dari $\mathbb{Z}$.

Berikut akan kembali diberikan contoh submodul lainya.

Contoh 2.7.8 Diberikan himpunan $\mathbb{R}^3$ atas ring $\mathbb{R}$. Himpunan tak kosong $N \subset \mathbb{R}^3$, dengan

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix} | u, v \in \mathbb{R} \right\},$$

Akan dibuktikan L merupakan submodul di $\mathbb{R}^3$.

Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \in N$ dan $r \in \mathbb{R}$, sehingga

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u - x \\ v - y \\ 0 \end{bmatrix} \in N$$

dan

$$r \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ru \\ rv \\ 0 \end{bmatrix} \in N$$

Oleh karena itu, terbukti bahwa N merupakan submodul pada modul $\mathbb{R}^3$ atas ring $\mathbb{R}$.

Selanjutnya akan diberikan sifat dari submodul.

Lemma 2.7.9 Diberikan $R-$ modul M. Jika S_1 dan S_2 merupakan submodul di M maka:

1. $S_1 \cap S_2$ merupakan submodul di M.

2. $S_1 + S_2$ merupakan submodul di M.

Bukti.

1. Jelas bahwa $S_1 \cap S_2$ bukan merupakan himpunan kosong karena S_1 dan S_2 masing-masing termuat 0_M. Diambil sebarang $r \in R$ dan $a, b \in S_1 \cap S_2$. Hal tersebut mempunyai arti bahwa $a, b \in S_1$ dan $a, b \in S_2$. Karena S_1 dan S_2 merupakan submodul di M, berlaku $a - b \in S_1$ dan $a - b \in S_2$. Akibatnya diperoleh $a - b \in S_1 \cap S_2$. Karena S_1 dan S_2 merupakan submodul di M, berlaku $ra \in S_1$ dan $ra \in S_2$. Disini berakibat $ra \in S_1 \cap S_2$. Jadi terbukti bahwa $S_1 \cap S_2$ merupakan submodul di M.

2. Jelas bahwa $S_1 + S_2$ bukan merupakan himpunan kosong karena $0_M \in S_1 + S_2$. Diambil sebarang $r \in R$ dan $a + b, x + y \in S_1 + S_2$. Karena S_1 dan S_2 merupakan submodul di M, berlaku $a - x \in S_1$ dan $b - yS_2$. Akibatnya diperoleh $(a + b) - (x + y) = (a - x) + (b - y) \in S_1 + S_2$. Selanjutnya, karena S_1 dan S_2 merupakan submodul di M, berlaku $ra \in S_1$ dan $rb \in S_2$. Akibatnya, diperoleh $r(a + b) = ra + rb \in S_1 + S_2$. Jadi, terbukti bahwa $S_1 + S_2$ merupakan submodul di M (Wahyuni dkk., 2016).

$\blacksquare$

2.8 Modul *Rough* atas Ring *Rough*

Setelah memahami definisi serta contoh dari modul atas ring, selanjutnya akan diberikan definisi dari modul *rough* atas ring *rough*.

Definisi 2.8.1 Diberikan ring *rough* $\langle R, +, * \rangle$ dengan elemen satuan dan grup *rough*-komutatif $\langle M, +' \rangle$. Himpunan M disebut modul *rough* kiri atas ring *rough* R jika terdapat pemetaan $\cdot : \overline{Apr}(R) \times \overline{Apr}(M) \to \overline{Apr}(M), (a, x) \mapsto ax$, sehingga untuk setiap $a, b \in R, x, y \in M$ berlaku:

1. $a(x +' y) = ax +' ay$;

2. $(a + b)x = ax +' bx$;

3. $(a * b)x = a(bx)$;

4. $1x = x$, dengan 1 adalah elemen satuan dari R (Zhang dkk., 2006).

Definisi 2.8.2 Diberikan ring *rough* $\langle R, +, *\rangle$ dengan elemen satuan dan grup *rough*-komutatif $\langle M, +'\rangle$. Himpunan M disebut modul *rough* kanan atas ring *rough* R jika terdapat pemetaan $\cdot : \overline{Apr}(M) \times \overline{Apr}(R) \to \overline{Apr}(M), (x, a) \mapsto xa$, sehingga untuk setiap $a, b \in R, x, y \in M$ berlaku:

1. $(x +' y)a = xa +' ya$;

2. $x(a + b) = xa +' xb$;

3. $x(a * b) = (xa)b$;

4. $x1 = x$, dengan 1 adalah elemen satuan dari R (Zhang dkk., 2006).

Untuk memahami Definisi 2.8.1, berikut diberikan contoh modul *rough* atas ring *rough*. Berdasarkan Contoh 2.4.2 bahwa $A = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}\}$ merupakan grup *rough* komutatif dan pada Contoh 2.6.2 bahwa $R = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{6}, \overline{8}\}$ merupakan ring *rough*.

Contoh 2.8.3 Diberikan pembuktian bahwa A merupakan modul *rough* atas ring *rough* R. Berikut ini tabel *Cayley* perkalian skalar modul *rough* A terhadap ring *rough* R.

Tabel 2.8.12 Tabel *Cayley* perkalian skalar modul *rough* A terhadap ring *rough* R

$\cdot_{10}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$

Berdasarkan Tabel 2.8.12 terbukti bahwa:

1. Diberikan sebarang $a \in R$ dan $x, y \in A$, berlaku
   $a \cdot_{10} (x +_{10} y) = (a \cdot_{10} x) +_{10} (a \cdot_{10} y)$.

2. Diberikan sebarang $a, b \in R$ dan $x \in A$, berlaku
   $(a +_{10} b) \cdot_{10} x = (a \cdot_{10} x) +_{10} (b \cdot_{10} x)$.
3. Diberikan sebarang $a, b \in R$ dan $x \in A$, berlaku
   $(a \cdot_{10} b) \cdot_{10} x = (a \cdot_{10} x) \cdot_{10} (b \cdot_{10} x)$.
4. Terdapat $\overline{1} \in \overline{Apr}(R)$ sehingga untuk setiap $x \in A$, berlaku $\overline{1} \cdot x = x$.

Oleh karena itu, berdasarkan 1-4 dapat disimpulkan A merupakan modul *rough* atas ring *rough* R.

Setelah memahami definisi dari modul *rough*, berikut merupakan definisi submodul *rough*.

Teorema 2.8.4 Diberikan modul *rough* M dan himpunan tak kosong N, dengan $N \subseteq M$. Himpunan N disebut submodul *rough* dari M jika N memenuhi aksioma berikut.

1. $s_1 - s_2 \in \overline{Apr}(N)$, untuk setiap $s_1, s_2 \in N$;
2. $r \cdot s \in \overline{Apr}(N)$, untuk setiap $r \in R, s \in N$ (Zhang dkk., 2006).

Diketahui bahwa syarat menjadi submodul *rough* adalah suatu himpunan *rough* merupakan subgrup *rough* dari suatu grup komutatif *rough*.

Bukti.

Diberikan sebarang $s_1, s_2 \in N$. Akan ditunjukkan $s_1 - s_2 \in \overline{Apr}(N)$, karena $s_1 - s_2 \in U$ diperoleh $s_1 - s_2 \in \overline{Apr}(N)$ untuk setiap $s_1 - s_2 \in N$. Apabila N adalah subsemimodul dari M maka operasi pergandaan skalar pada M juga berlaku di N. Akibatnya, untuk setiap $r \in X$ dan $s \in N$ berlaku $rs \in \overline{Apr}(N)$ karena $r \cdot s \in N$. Dengan demikian, N merupakan submodul di M. ∎

Berikut akan diberikan contoh dari submodul *rough* menggunakan Contoh 2.8.3.

Contoh 2.8.5 Diberikan modul *rough* atas ring *rough* yang sudah dijelaskan pada Contoh 2.8.3 dan himpunan tak kosong $S \subseteq A$, dengan $S = \{\overline{0}, \overline{5}\}$.

diperoleh:

$$\overline{Apr}(S) = E_1 \cup E_3 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{9}\} \text{ dan } \underline{Apr}(S) = \emptyset.$$

Akan ditunjukkan bahwa S merupakan submodul *rough* dari A atas ring *rough* R. Diberikan pembuktian bahwa S merupakan submodul *rough* dari A atas ring *rough* R. Disajikan Tabel 2.8.12 *Cayley* penjumlahan modulo 10 dari S dan Tabel 2.8.13 *Cayley* perkalian skalar submodul *rough* S terhadap ring *rough* R.

Tabel 2.8.13 Tabel *Cayley* penjumlahan modulo 10 pada himpunan S

$+_{10}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$

Tabel 2.8.14 Tabel *Cayley* perkalian skalar submodul *rough* S terhadap ring *rough* R

$\cdot_{10}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$

Tabel 2.8.15 Tabel invers dari anggota himpunan S

x	$\overline{0}$	$\overline{5}$
x^{-1}	$\overline{0}$	$\overline{5}$

Berdasarkan Tabel 2.8.12 dan Tabel 2.8.13 , diperoleh sebagai berikut.

1. Untuk setiap $x, y \in S$, $x +_{10} y \in \overline{Apr}(S)$.
2. Untuk setiap $x \in S$, $x^{-1} \in S$.
   Berdasarkan Tabel 2.8.16 dapat dilihat bahwa setiap elemen x dihimpunan S memiliki invers x^{-1} dihimpunan S.

Jadi, berdasarkan 1, 2, dan 3 terbukti bahwa himpunan S merupakan submodul *rough* dari A atas ring *rough* R.

2.9 Semimodul atas Semiring

Seperti halnya modul atas ring, pada semimodul atas semiring terdapat beberapa pengertian seperti semimodul kiri dan semimodul kanan. Perbedaan modul dan semimodul terletak pada syarat pertama yaitu pada $(M, +)$. Jika pada modul merupakan grup komutatif, maka pada semimodul merupakan monoid komutatif. Oleh karena itu, perbedaan utama antara modul dan semimodul adalah jika pada modul disyaratkan setiap elemen mempunyai invers, maka pada semimodul tidak ada syarat invers tersebut.

Definisi 2.9.1 Diberikan monoid komutatif $\langle M, + \rangle$ dan semiring R, serta operasi $\circ : R \times M \to M$. Monoid M disebut semimodul kiri atas semiring terhadap operasi $\circ$ dengan memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. $r_1 \circ (m_1 + m_2) = r_1 \circ m_1 + r_1 \circ m_2$;
2. $(r_1 + r_2) \circ m_1 = r_1 \circ m_1 + r_2 \circ m_1$;
3. $(r_1 \cdot r_2) \circ m_1 = r_1 \circ (r_2 \circ m_1)$;
4. $1_R \circ m_1 = m_1$, untuk setiap $r_1, r_2 \in R$ dan $m_1, m_2 \in M$ (Chaudhari, dkk., 2013).

Berikut diberikan contoh semimodul atas semiring.

Contoh 2.9.2 Diberikan himpunan R merupakan semiring atas operasi penjumlahan dan perkalian, maka $Mat_n(R)$ merupakan semiring. Himpunan $Mat_n(R)$ merupakan semiring maka dapat dipandang $Mat_n(R)$ merupakan monoid komutatif terhadap operasi penjumlahan. Akan ditunjukan $Mat_n(R) : R-$semimodul. Diambil sebarang $r_1, r_2 \in R$ dan $(a_{ij})_{n\times n}, (b_{ij})_{n\times n} \in Mat_n(R)$ untuk suatu $a_{ij}, b_{ij} \in R$.

1. Akan dibuktikan $(r_1 + r_2) \circ (a_{ij})_{n\times n} = r_1 \circ (a_{ij})_{n\times n} + r_2 \circ (a_{ij})_{n\times n}$

$$\begin{aligned}
(r_1 + r_2) \circ (a_{ij})_{n\times n} &= ((r_1 + r_2)a_{ij})_{n\times n} \\
&= ((r_1 a_{ij}) + (r_2 a_{ij}))_{n\times n} \\
&= (r_1 a_{ij})_{n\times n} + (r_2 a_{ij})_{n\times n} \\
&= r_1 \circ (a_{ij})_{n\times n} + r_2) \circ (a_{ij})_{n\times n}.
\end{aligned}$$

2. Akan dibuktikan $r_1 \circ ((a_{ij})_{n\times n} + (b_{ij})_{n\times n}) = r_1 \circ (a_{ij})_{n\times n} + r_1 \circ (b_{ij})_{n\times n}$

$$\begin{aligned}
r_1 \circ ((a_{ij})_{n\times n} + (b_{ij})_{n\times n}) &= r_1 \circ (a_{ij} + b_{ij})_{n\times n} \\
&= (r_1(a_{ij} + b_{ij}))_{n\times n} \\
&= (r_1 a_{ij})_{n\times n} + (r_1 b_{ij})_{n\times n} \\
&= r_1 \circ (a_{ij})_{n\times n} + r_1 \circ (b_{ij})_{n\times n}.
\end{aligned}$$

3. Akan dibuktikan $(r_1 r_2) \circ (a_{ij})_{n\times n} = r_1 \circ (r_2 \circ (a_{ij})_{n\times n})$

$$\begin{aligned}
(r_1 r_2) \circ (a_{ij})_{n\times n} &= ((r_1 r_2) a_{ij})_{n\times n} \\
&= (r_1(r_2 a_{ij}))_{n\times n} \\
&= r_1 \circ (r_2 a_{ij})_{n\times n} \\
&= r_1 \circ (r_2 \circ (a_{ij})_{n\times n}).
\end{aligned}$$

4. Akan dibuktikan $0_R \in R$. Akan dibuktikan $0_R \circ (a_{ij})_{n\times n} = 0_M$.

$$\begin{aligned} 0_R \circ (a_{ij})_{n\times n} &= (0_R a_{ij})_{n\times n} \\ &= (0_R)_{n\times n} \\ &= 0_M. \end{aligned}$$

Setelah memahami definisi dari semimodul, berikut merupakan definisi subsemimodul.

Proposisi 2.9.3 Diberikan semimodul Y atas semiring X dan S merupakan himpunan bagian tak kosong dari Y. Himpunan S merupakan subsemimodul di Y, berlaku aksioma sebagai berikut:

1. $s_1 - s_2 \in S$, untuk setiap $s_1, s_2 \in S$;
2. $r \cdot s \in S$, untuk setiap $r \in X, s \in S$.

Bukti.

Diberikan sebarang $s_1, s_2 \in S$. Akan ditunjukkan $s_1 - s_2 \in S$, karena $s_1 - s_2 \in U$ diperoleh $s_1 - s_2 \in S$ untuk setiap $s_1 - s_2 \in S$. Apabila S adalah subsemimodul dari Y maka operasi pergandaan skalar pada Y juga berlaku di S. Akibatnya, untuk setiap $r \in X$ dan $s \in S$ berlaku $rs \in S$ karena $r \cdot s \in S$. Dengan demikian, S merupakan subsemimodul di Y. ∎

Berikut diberikan contoh subsemimodul untuk memahami Proposisi 2.9.3

Contoh 2.9.4 $S = Z_0^+$ adalah himpunan bilangan cacah. $S = Z_0^+$ adalah semimodul atas semiring S atau $S : S-$ semimodul. Subsemimodul tak sejati dari S adalah S itu sendiri dan $E = 0$, sedangkan subsemimodul sejati dari S adalah nS dengan $n = 2, 3, 4, ...$

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

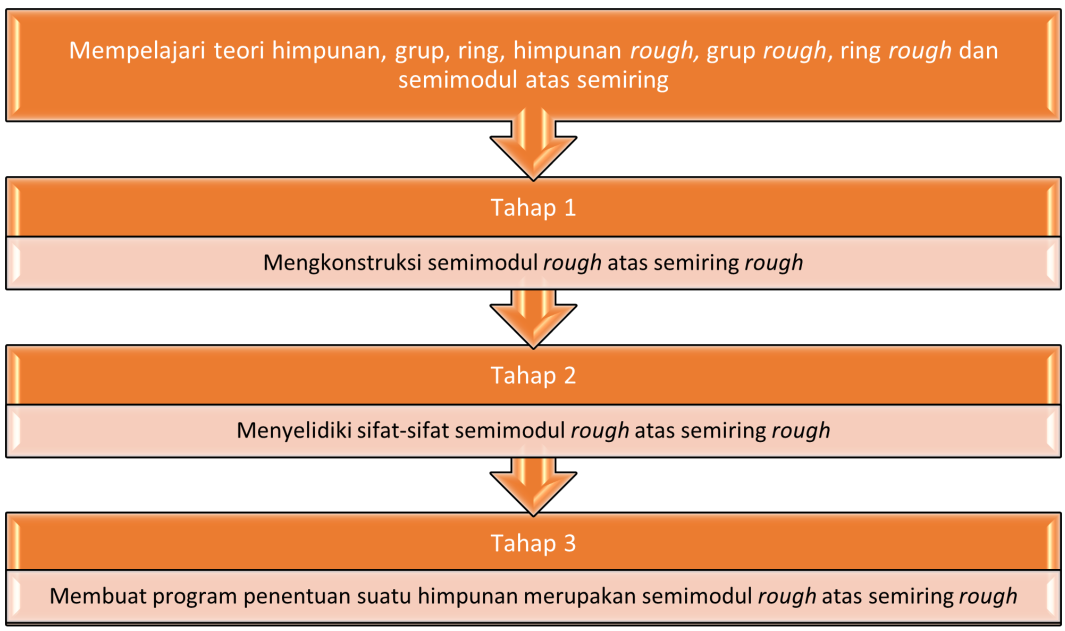
Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2023/2024 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof.Dr.Ir.Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan adalah studi literatur, dengan mengumpulkan dan mengolah bahan penelitian berdasarkan referensi seperti jurnal dan buku. Dengan langkah-langkah penelitian sebagai berikut:

1. mempelajari himpunan *rough* dan semimodul *rough* atas semiring *rough*;
2. mengkonstruksi semimodul *rough* atas semiring *rough*;
3. menyelidiki sifat-sifat semimodul *rough* atas semiring *rough*;
4. membuat program penentuan semimodul *rough* atas semiring *rough* menggunakan program *Phyton*.

Secara umum langkah-langkah penelitian ini disajikan dalam diagram penelitian pada Gambar 3.2.1.



Gambar 3.2.1 Langkah-langkah Penelitian

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan konstruksi semimodul *rough* atas semiring *rough* pada bab sebelumnya diketahui bahwa semimodul *rough* atas semiring *rough* dapat dikonstruksi menggunakan ruang aproksimasi (U, R) dengan U adalah himpunan universal dan R adalah relasi ekuivalensi. Dimana himpunan yang digunakan pada semimodul *rough* berada pada $\overline{Apr}(Y) = U$. Hal yang sama juga berlaku untuk subsemimodul *rough* dari semimodul *rough* akan tertutup jika $\overline{Apr}(S) = U$.

Diberikan ruang aproksimasi (U, R) dan Y semimodul *rough* atas semiring *rough* X di U. Jika $S \subseteq Y$ dengan $\overline{Apr}(S) = U$, maka S merupakan subsemimodul Y. Jika S' dan S'' adalah subsemimodul *rough* dari semimodul *rough* Y atas suatu semiring X, maka $S' \cap S''$ juga merupakan subsemimodul *rough* dari semimodul *rough* Y jika $\overline{Apr}(S) \cap \overline{Apr}(S'') = \overline{Apr}(S' \cap S'')$. Selanjutnya penggunaan program *Python* dalam mengkrontruksi semimodul *rough* atas semiring *rough* dapat membantu dan mengefisiensikan waktu pengerjaan.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil dan pembahasan, terdapat saran untuk penelitian selanjutnya. Dalam penelitian ini masih sedikit untuk menemukan sifat-sifat dari semimodul *rough* atas semiring *rough* sehingga masih terdapat kemungkinan untuk menguji sifat semimodul *rough* atas semiring *rough* selain yang ada dalam penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Adkins, W.A., & Weintraub, S.H. (1992). *Algebra: An Approach via module Theory*. New York: Springer-Verlag.

Bagirmaz, N., & Ozcan, A. F. (2015). Rough semigroups on approximation spaces. *International Journal of Algebra*, *9*(7), 339–350.

Barnier, W. Feldman, N. (1990). Introduction to advanced mathematics, Prenticehall International. *New Jersey*: 116-153.

Biswas, R & Nanda, S. (1994). Rough groups and rough subring. Bull. *Polish Acad.* Sci. Math., 42, 251-254.

Chaudhari, N.J., & Bonde, R. D. (2013). On Exact Sequence of Semimodules Over semirings. *Hindawi Publishing Corporation*.

Chaudhuri, A.K. (2017). *Introduction to Abstract and Linear Algebra*. New Delhi: New Central Book Agency.

Davvaz, B., & Mahdavipour, M. (2006). Roughness in Modules. *Information Sciences*, 3658–3674.

Davvaz, B. 2004. Roughness in Rings. *Information Sciences An International Journal*, 164(1-4), 147–163.

Davvaz, B., Mukhlash, I., & Soleha. (2021). Himpunan Fuzzy and Rough Sets. Limits: Journal of Mathematics and Its Apllications, 18(1), 79-94.

De-Song, W. (2004). Application of the Theory of Rough Set on the Groups and Rings. *Dissertation for Master Degree*.

Dummit, D.S., & Foote, R. M. (2004). *Abstract Algebra* $3^{r}d$ *edition*. New York.

Fitriani dan Faisol. (2022). *Grup*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Hafifulloh, D., Fitriani & Faisol, A. (2022). The Properties of Rough V-Coexact Sequence in Rough Group. Barekeng: *Journal of Mathematics and Its Applicaton*, 16(3),1069-1078.

Kumar, A., &Sah, S. K. (2020). Roughness in G-modules and its Properties. *International Journal for Research in Engineering Application & Management (IJREAM)*, 6(4), 114-118.

Miao, D., Han, S., Li, D., & Sun, L. (2005*)*. Rough Group , Rough Subgroup and Their Properties. *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, 104–113.

Nugraha, A., Fitriani., Ansori, M., & Faisol, A. (2022). The Implementation of Rough Set on a Group Structure. *Jurnal Matematika Mantik*, 8(1), 45-52.

Pawlak, Z. (1982). Rough sets. *International Journal of Computer & Information Sciences*, *11*(5), 341–356.

Qun-Feng, Z., Al-Min, F., Shi-xin, Z. (2006). Rough modules and their some properties. *Proceeding of the Fifth International Conference on Machine Learning and Cybernetics*. 2290-2293.

Sinha, A.K., Prakash, A. (2015). Rough Projective Module. *Proc. of the Second Intl. Conf. on Advances in Applied Science and Enviromental Engineering (ASEE)*. Institute of Research Engineers and Doctors, 35-38.

Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., Yuwaningsih, D.A., & Hartanto, A.D. (2016). *Teori Ring dan Modul*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.

Yanti, G.A.D., Fitriani., & Faisol, A. (2023). The Implementation of a Rough Set of Projective Module. BAREKENG: *Journal of Mathematics and Its Applications*, 17(2), 0735-0744.

Zhang, Q., Fu, A., & Zhao, S. (2006). Rough Modules and Their Some Properties. *Proceding of the Fifth International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, 2290-2293.