BATAS ATAS BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF AMALGAMASI LINTASAN DAN BARBELNYA

Tesis

Oleh

AKMAL
2227031001

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

ABSTRACT

THE UPPER BOUND OF THE LOCATING CHROMATIC NUMBER FOR AMALGAMATION OF PATH GRAPHS AND ITS BARBELL

By

Akmal

The locating chromatic number was introduced by Chartrand et al. in 2002. The locating chromatic number of a graph is a combined concept between the coloring and partition dimensions of a graph. Let c be a vertex coloring of a graph G with $c(u) \neq c(v)$ for u and v adjacent in G. Let C_i be the set of all vertices colored by the color i, and $\Pi = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ is a partition set of $V(G)$. The color code $c_\Pi(v)$ of a vertex v in G is defined as the k-ordinate $d(v, C_1), d(v, C_2), \ldots, d(v, C_k)$ where $d(v, C_i) = min\{d(v, x)|x \in C_i\}$ for $1 \leq i \leq k$. If each vertices in G has a different color code, then c is called the locating coloring of G. The smallest value of k so that G has a locating color is called the locating chromatic number of a graph G, denoted by $\chi_L(G)$. The amalgamation $n \geq 3$ of path graphs $(P_m, m \geq 3)$ denoted by ${}_nP_m$ is obtained by identifying one vertex from each path graph P_m. A barbell graph for amalgamation of paths is obtained by connecting two copies of the amalgamation of path graphs ${}_nP_m$ by an edge, denoted by $B({}_nP_m)$. The upper bound of the locating chromatic number for amalgamation of path graphs for $m, n \geq$3 is $\lceil \sqrt{n} \rceil$+1 and $\lceil \sqrt{n} \rceil$+2 for its barbell graph.

Keywords: *Locating chromatic number, the amalgamation of path graph, barbell graphs.*

ABSTRAK

BATAS ATAS BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF AMALGAMASI LINTASAN DAN BARBELNYA

Oleh

Akmal

Bilangan kromatik lokasi diperkenalkan oleh Chatrand dkk. pada tahun 2002. Bilangan kromatik lokasi suatu graf merupakan perpaduan dari pewarnaan titik dan dimensi partisi graf. Misalkan c suatu pewarnaan titik pada graf G dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk u dan v bertetangga di G. Misalkan C_i himpunan titik-titik yang diberi warna i dan $\Pi = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ merupakan himpunan partisi dari $V(G)$. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari v adalah k-pasangan terurut $(d(v, C_1), d(v, C_2), \ldots, d(v, C_k)$ dengan $d(v, C_i) = min\{d(v, x)|x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G. Nilai terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi graf G. Amalgamasi dari $n \geq 3$ buah graf lintasan $(P_m, m \geq 3)$ dinotasikan dengan ${}_nP_m$ diperoleh dengan cara menyatukan satu titik dari setiap graf lintasan P_m. Graf barbel dari amalgamasi lintasan diperoleh dengan menghubung kan dua jiplakan dari graf amalgamasi lintasan ${}_nP_m$ oleh sebuah sisi, dinotasikan dengan $B({}_nP_m)$. Batas atas bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi lintasan untuk $m, n \geq 3$ adalah $\lceil \sqrt{n} \, \rceil + 1$ dan $\lceil \sqrt{n} \, \rceil + 2$ untuk graf barbelnya.

Kata-kata kunci: *Bilangan kromatik lokasi graf, graf amalgamasi lintasan, graf barbel.*

BATAS ATAS BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF AMALGAMASI LINTASAN DAN BARBELNYA

AKMAL

Tesis

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
MAGISTER MATEMATIKA

pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

Judul Skripsi	:	**BATAS ATAS BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF AMALGAMASI LINTASAN DAN BARBELNYA**
Nama Mahasiswa	:	**Akmal**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2227031001**
Program Studi	:	**Magister Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dr. Asmiati, S.Si.,M.Si.
NIP. 19760411 200012 2 001

Dr. Notiragayu, S.Si.,M.Si.
NIP. 19731109 200012 2 001

2. Ketua Program Studi Magister Matematika

Prof. Dr. Asmiati, S.Si.,M.Si.
NIP. 19760411 200012 2 001

MENGESAHKAN

1. tim penguji

Ketua : **Prof. Dr. Asmiati, S.Si.,M.Si.** ....

Sekretaris : **Dr. Notiragayu, S.Si.,M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **1. Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D.** ....

: **2. Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP 19711001 200501 1 002

3. Direktur Program Pasca Sarjana

Prof. Dr. Ir. Murhadi, M.Si.
NIP. 19640326 198902 1 001

Tanggal Lulus Ujian Tesis: **29 Juli 2024**

PERNYATAAN TESIS MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Akmal**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2227031001**
Jurusan	:	**Magister Matematika**
Judul tesis	:	**Batas Atas Bilangan Kromatik Lokasi Graf Amalgamasi lintasan dan barbelnya**

Dengan ini menyatakan bahwa tesis ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa tesis ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 29 Juli 2024

Penulis,

METERAI TEMPEL

5DEA8ALX288093904

Akmal

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Akmal yang lahir di Teluk Kecapi pada tanggal 05 Desember 1997. Penulis merupakan anak pertama dari tiga bersaudara yang terlahir dari pasangan Bapak Jamali dan Ibu Misbah.

Penulis menyelesaikan pendidikan Sekolah Dasar di SD Negeri Teluk Kecapi pada tahun 2009, menyelesaikan Pendidikan Sekolah Menengah Pertama di SMP Negeri 1 Pemulutan pada tahun 2012, dan menyelesaikan Sekolah Menengah Atas di SMA Negeri 1 Pemulutan pada tahun 2015. Selanjutnya, penulis menyelesaikan Sarjana Sains di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Sriwijaya pada tahun 2021. Pada tahun 2022, penulis terdaftar sebagai mahasiswa Program Studi Magister Matematika di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.

KATA INSPIRASI

"Dan Kami jadikan malam dan siang sebagai dua tanda, lalu Kami hapuskan tanda malam dan Kami jadikan tanda siang itu terang, agar kamu mencari kurnia dari Tuhanmu, dan supaya kamu mengetahui bilangan tahun-tahun dan perhitungan. Dan segala sesuatu telah Kami terangkan dengan jelas".
(Q.S. Al-Israa' : 12)

"Barang siapa menginginkan soal-soal yang berhubungan dengan dunia, wajiblah ia memiliki ilmunya ; dan barang siapa yang ingin (selamat dan berbahagia) di akhirat, wajiblah ia mengetahui ilmunya pula; dan barangsiapa yang menginginkan kedua-duanya, wajiblah ia memiliki ilmu kedua-duanya pula".
(HR. Bukhari dan Muslim)

"Semakin banyak yang Anda inginkan, akan semakin banyak yang hanya tinggal jadi keinginan. Fokus pada satu keinginan memungkinkan pencapaian banyak keinginan"

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin,
Puji dan syukur kehadirat Allah Subhanahu Wata'ala atas limpahan nikmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad Shallallahu 'Alaihi Wasallam.

Dengan penuh syukur, kupersembahkan karya ini kepada:

Keluarga Tercinta

Terimakasih kepada Ibu, Bapak dan Adik-adik ku serta seluruh keluargaku untuk semua do'a, kasih sayang, dukungan dan semangat dalam segala hal serta nasehat yang diberikan.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat berjasa dalam membantu, memberikan masukan, arahan, serta ilmu yang berharga.

Sahabat – Sahabatku

Terimakasih kepada sahabat – sahabatku atas semua do'a, dukungan, semangat, serta canda tawa keceriaan selama masa perkuliahan ini.

Almamater Tercinta Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis ini yang berjudul "Bilangan Kromati Lokasi Graf Amalgamasi Lintasan dan Barbelnya" dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan Tesis ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing Utama serta Ketua Program Studi Magister Matematika yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan tesis ini.

2. Ibu Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing Pendamping yang telah memberikan arahan, bimbingan, serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyeesaikan tesis ini.

3. Bapak Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D. selaku Pembahas I yang telah memberikan saran, motivasi serta evaluasi yang membangun kepada penulis selama proses penyusunan tesis ini.

4. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku Pembahas II yang telah memberikan arahan, motivasi, bimbingan, serta saran kepada penulis selama proses penyusunan tesis ini.

5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing akademik serta Ketua Jurusan Matematika yang telah memberikan motivasi dan bimbingan selama proses penyusunan tesis ini.

6. Seluruh dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Emak, Ebak, Dila, Abel, (Alm. Nyek dan Yek) dan keluarga besar yang selalu memotivasi, memberikan dukungan dan do’a kepada penulis.

8. Terimakasih kepada diriku sendiri karena sudah berjuang dan bertahan sejauh ini.

9. Teman – teman Jurusan Magister Matematika angkatan 2022 yang sudah banyak membantu selama masa perkuliahan.

10. Teman – teman di Lampung: Yudha dkk., Dafa dkk., Keluarga Besar Masjid Al-Firdaus, Kedaton dan Bimbel Assamba yang menjadi tempat singgah saat menuntut ilmu di Bandarlampung, terimakasih atas dukungan serta kebaikannya selama ini.

11. Semua pihak yang membantu dalam proses penyusunan tesis ini yang tidak dapat penulis sebut satu persatu.

Semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa tesis ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan tesis ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 29 Juli 2024

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika yang dapat menyelesaikan suatu permasalahan dengan merepresentasikan ke dalam bentuk graf, sehingga suatu permasalahan yang ada menjadi lebih mudah dan sederhana. Banyak hal yang dapat dikembangkan dalam teori graf. Salah satu topik yang menjadi kajian adalah konsep pewarnaan lokasi pada graf yang merupakan pengembangan dari dua konsep dalam graf, yaitu pewarnaan titik dan dimensi partisi pada graf.

Dimensi partisi merupakan pengembangan dari dimensi metrik. Konsep dimensi metrik pertama kali dicetuskan oleh Slater pada tahun 1975 dan dikembangkan oleh Melter dan Harary pada tahun 1976. Dimensi metrik adalah banyak anggota minimum dari himpunan pembeda dari representasi suatu titik terhadap jarak-jaraknya (Chartrand dkk.,1998).

Dalam dimensi partisi untuk titik bertetangga dapat diwarnai dengan warna yang sama atau dapat dikelompokkan ke dalam partisi yang sama. Kemudian diberikan syarat dalam pewarnaan titik, yaitu untuk dua titik yang saling bertetangga $(adjacent)$ tidak dapat diberikan warna yang sama. Oleh karena itu, konsep dimensi partisi dalam himpunan pembeda yang diberikan syarat pewarnaan titik pada graf akan menghasilkan konsep bilangan kromatik lokasi.

Konsep pewarnaan lokasi untuk pertama kali dikenalkan oleh Chartrand dkk. pada tahun 2002. Bilangan kromatik lokasi dari G, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$ adalah banyaknya warna minimum pada pewarnaan lokasi dari G. Chartrand dkk. (2002) telah mendapatkan bilangan kromatik lokasi dari beberapa kelas graf, diantaranya adalah graf lintasan, graf siklus, graf bintang ganda dan graf multipartite lengkap. Bilangan kromatik lokasi pada graf lintasan P_n adalah 3 untuk $n \geq 3$. Pada graf siklus diperoleh $\chi_L(C_n) = 3$ untuk n ganjil dan $\chi_L(C_n) = 4$ untuk n genap. Sedangkan pada graf bintang ganda diperoleh $\chi_L(S_{a,b}) = b + 1$ untuk $1 \leq a \leq b$ dan $b \geq 2$. Misalkan graf terhubung G berorder $n \geq 3$, maka $\chi_L(G) = n$ jika dan hanya jika graf multipartit lengkap. Sehingga bilangan kromatik lokasi pada graf lengkap K_n adalah n.

Pembahasan mengenai bilangan kromatik lokasi telah banyak dipelajari. Chartrand dkk. (2003) berhasil mengkontruksi graf pohon berorde $n \geq 5$ dengan bilangan kromatik lokasi yang bervariasi dari 3 sampai $(n-1)$. Pada tahun 2011, Asmiati dkk. telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi amalgamasi pada graf bintang seragam $S_{k,m}$ dan tak seragam $S_{k,(n_1,\ldots,n_k)}$ untuk $k \geq 2$. Baskoro dan Purwasih pada tahun 2012 menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf hasil korona dari dua graf

Penelitian terkait topik bilangan kromatik lokasi semakin berkembang, diantaranya pada tahun 2013, Sofyan dkk. menemukan bilangan kromatik graf lobster yang homogen, selanjutnya Welyyanti dkk. (2013) memperoleh bilangan kromatik lokasi untuk pohon $n - arry$ lengkap, kemudian Baskoro dan Asmiati (2013) telah berhasil mengkarakterisasi semua pohon dengan bilangan kromatik lokasi gabungan lintasan, lingkaran dan graf lengkap multipartite. Pada tahun 2014, Asmiati mendapatkan bilangan kromatik lokasi pada graf amalgamasi bilangan tak homogen, dan Wellyanti dkk. (2014) mendapatkan bilangan kromatik lokasi graf tak terhubung. Behtoei dan Anbarloei (2014) menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf hasil join dari dua graf. Pada tahun 2015, Welyyanti dkk. memberikan batas atas untuk bilangan kromatik lokasi graf terhubung, dimana setiap komponen memuat satu titik dominan.

Pada tahun 2016, Asmiati dkk. berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi graf ulat dan graf kembang api dan Bahtoei dkk. (2016) juga berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi hasil kali cartesian dari lintasan dan graf lengkap. Pada tahun 2017, Asmiati berhasil mengkaji bilangan kromatik lokasi amalgamasi bintang tertentu ${}_nS_{k,m}$ untuk $k, m \geq 2, k \leq m$ dengan n, k, m bilangan asli adalah $(m+1)$ jika $1 \leq n \leq \left\lfloor \frac{m}{k-1} \right\rfloor$ dan $(m+2)$ jika $n \leq \left\lfloor \frac{m}{k-1} \right\rfloor$. Asmiati dkk. (2018), juga berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi graf barbel $B_{n,n}$ untuk $n \geq 3$, dimana graf barbel $B_{n,n}$ memuat dua graf isomorfik dari graf lengkap K_n. Kemudian Asmiati dkk. berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi disjoint union dari beberapa graf bintang ganda, pada tahun 2019.

Pada tahun 2021, Irawan dkk. berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi dari barbel graf origami untuk $n \geq 3$. Pada tahun yang sama, Damayanti dkk. berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi lintasan dimodifikasi dengan siklus. Prawinasti dkk. (2021) berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf split lingkaran. Kemudian Asmiati dkk. pada tahun 2021 berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf shadow path dan graf barbel yang memuat graf shadow path.

Berdasarkan uraian di atas, sejauh penelusuran literatur belum ada penelitian mengenai bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi lintasan dan barbelnya. Pada penelitian kali ini akan ditentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi lintasan dan barbelnya.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi lintasan.
2. Menentukan bilangan kromatik lokasi graf barbel dari graf amalgamasi lintasan.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

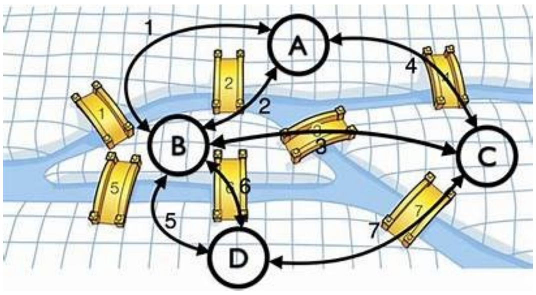
1. Memberikan pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi lintasan.
2. Mengetahui bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi lintasan dan barbelnya.
3. Sebagai bahan referensi untuk penelitian selanjutnya mengenai bilangan kromatik lokasi dari suatu graf.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leon Hard Euler pada tahun 1736 untuk membuktikan bahwa tidak mungkin melintasi sebuah jembatan tepat satu kali di empat kota di Konisberg (Rusia), yang dihubungkan oleh tujuh jembatan di atas Sungai Pregel. Masalah ini disajikan dalam bentuk gambar yang dikenal sebagai representasi graf, dimana titik menyatakan suatu wilayah dan sisi menyatakan jembatan yang menghubungkan dua wilayah. Dalam bahasan ini, representasi graf euler dapat digunakan untuk membuktikan bahwa tidak mungkin melintasi setiap jembatan tepat satu kali dan kembali ke posisi semula (Sugeng dkk., 2014).

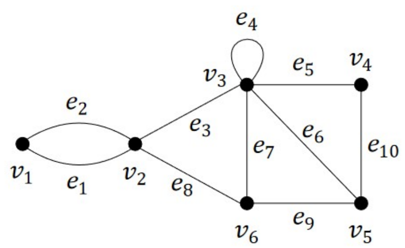


Gambar 2.1 Jembatan di atas Sungai Pregel
(Sumber: `http://www.walcom-conference.org/graph_gallery.php`)

Beberapa konsep dasar yang digunakan dalam penelitian ini diambil dari Deo (1989). Suatu graf G adalah himpunan terurut $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ menyatakan himpunan titik atau $vertex$ $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dari G dengan $V(G) \neq \emptyset$, dan $E(G)$ menyatakan himpunan sisi atau $edge$ $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ yakni pasangan tak terurut dari $V(G)$. Banyak himpunan titik $V(G)$ dari graf G disebut $orde$ dari G, dinotasikan dengan $|V(G)|$. Sedangkan banyak sisi dari graf G disebut $size$ dari G, dinotasikan dengan $|E(G)|$. Jika terdapat sebuah sisi antara u dan v, yaitu $e = uv \in E(G)$ maka titik u dikatakan bertetangga $(adjacent)$ dengan titik v sedangkan sisi e dikatakan menempel $(incident)$ dengan titik u dan v.

Derajat $(degree)$ titik v, dinotasikan $d(v)$ adalah banyak sisi yang menempel pada titik v. Titik dengan derajat nol disebut titik terisolasi $(isolated\ vertex)$ sedangkan titik dengan derajat satu disebut daun $(pendant)$. Sisi yang titik awal dan titik akhir yang sama disebut $loop$ sedangkan beberapa sisi berbeda yang mempunyai titik ujung yang sama disebut sisi ganda $(multiple\ edge)$. Graf yang tidak mempunyai $loop$ dan sisi ganda disebut graf sederhana $(simple\ graph)$. Graf G disebut terhubung $(connected)$ jika setiap dua titik sebarang berbeda terhubung.

Misalkan G adalah graf, v dan w adalah titik-titik dari G. Jalan $(walk)$ adalah barisan berhingga dari titik dan sisi yang dimulai dan diakhiri dengan titik sedemikian sehingga setiap sisi menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya. Jalan dengan panjang n dari v ke w dituliskan sebagai: $v_0e_1v_1e_2v_2 \ldots v_{n-1}e_nv_n$ dengan $v_0 = v; v_n = w$ dan $e_i = v_{i-1}v_i$. Lintasan $(path)$ adalah jalan yang melewati titik yang berbeda-beda dimana titik-titik yang dilewati tepat satu kali pada suatu graf. Lintasan dari v ke w dituliskan sebagai: $v = v_0e_1v_1e_2v_2 \ldots v_{n-1}e_nv_n = w$ dengan $e_i \neq e_j$ untuk $i \neq j$. Sirkuit dengan panjang n adalah lintasan yang dimulai dan diakhiri pada titik yang sama. Sirkuit dengan panjang n dituliskan sebagai: $v_0e_1v_1e_2v_2 \ldots v_{n-1}e_nv_n$ dengan $v_0 = v_n$



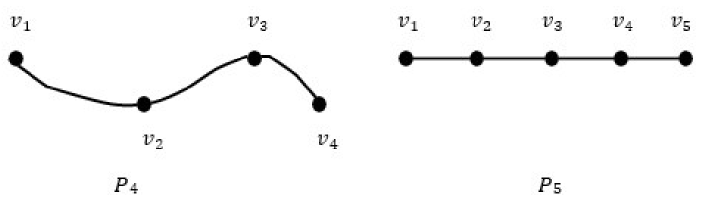
Gambar 2.2 Contoh Graf terhubung G dengan 6 titik dan 10 sisi

Pada Gambar 2.2, graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3\ , e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$. Titik v_4 dikatakan bertetangga dengan titik v_3 dan v_5 sedangkan sisi e_6 dikatakan menempel dengan titik v_3 dan v_5. Selanjutnya, $d(v_1) = 2, d(v_2) = 4, d(v_3) = 6, d(v_4) = 2, d(v_5) = 3$ dan $d(v_6) = 3$. Jadi, graf G di atas bukan merupakan graf sederhana karena graf tersebut mempunyai loop dan sisi ganda tetapi graf G terhubung karena setiap dua titik sebarang berbeda terhubung. Barisan $v_1e_1v_2e_3v_3e_5v_4e_5v_3e_6v_5$ merupakan jalan dari v_1 ke v_5 dengan panjang 5 karena terdapat sisi yang muncul dua kali, yaitu e_5. Barisan $v_1e_1v_2e_3v_3e_4v_3e_5v_4$ merupakan lintasan dari v_1 ke v_4 dengan panjang 4 karena semua sisinya berbeda dan terdapat titik yang muncul dua kali, yaitu v_3. Barisan

$v_2e_3v_3e_5v_4e_{10}v_5e_6v_3e_7v_6e_8v_2$ merupakan sirkuit dengan panjang 6 karena merupakan lintasan yang dimulai dan diakhiri pada titik yang sama, yaitu v_2.

2.2 Graf Lintasan

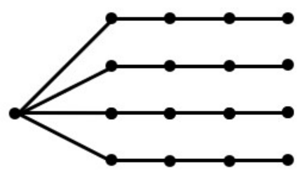
Graf berbentuk lintasan dengan titik sebanyak m dinamakan graf lintasan order m dan ditulis dengan P_m. Graf lintasan adalah graf dengan himpunan titik $V(P_m) = \{v_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $E(P_m) = \{v_jv_{j+1}\}$; $1 \leq j \leq m-1$. Graf lintasan dengan m buah titik dilambangkan dengan P_m. Contoh graf lintasan dapat dilihat pada gambar berikut ini:



Gambar 2.3 Graf lintasan P_4 dan P_5

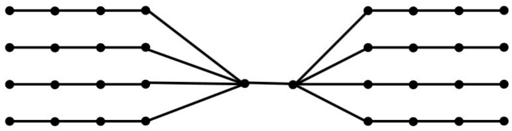
2.3 Graf Amalgamasi Lintasan dan Graf Barbel

Amalgamasi dari $n \geq 3$ buah graf lintasan $(P_m, m \geq 3)$ dinotasikan dengan ${}_nP_m$ diperoleh dengan menyatukan satu titik dari setiap graf lintasan P_m. Titik penyatuan tersebut disebut titik pusat dan dinotasikan dengan u. Contoh graf amalgamasi lintasan dapat dilihat pada gambar berikut ini:



Gambar 2.4 Graf amalgamasi lintasan ${}_4P_5$

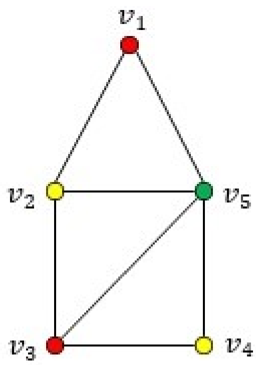
Graf barbel adalah graf sederhana yang dibentuk dengan menghubungkan dua jiplakan dari graf lengkap K_n yang dihubungkan dengan sebuah sisi yang dinotasikan dengan B_n (Ihwan dkk. 2014). Sedangkan graf barbel dari graf amalgamasi lintasan adalah graf sederhana yang dibentuk dengan menghubungkan dua jiplakan dari graf amalgamasi lintasan oleh sebuah sisi yang dinotasikan dengan $B({}_nP_m)$, $m, n \geq 3$. Contoh graf barbel dari graf amalgamasi lintasan dapat dilihat pada gambar berikut ini:



Gambar 2.5 Graf barbel dari graf amalgamasi lintasan $B({}_4P_5)$

2.4 Bilangan Kromatik Lokasi Graf

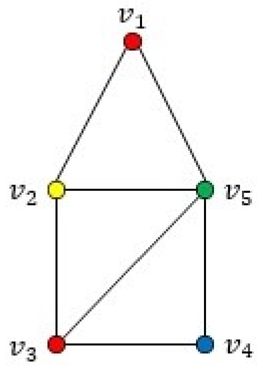
Konsep pewarnaan lokasi pada graf yang merupakan pengembangan dari dua konsep dalam graf, yaitu pewarnaan titik dan dimensi partisi pada graf. Misalkan G adalah graf terhubung. Pewarnaan titik dari G adalah pemberian warna pada setiap titik di G sedemikian sehingga tidak terdapat dua titik bertetangga mempunyai warna yang sama. Bilangan kromatik dari G, dinotasikan dengan $\chi(G)$ adalah banyaknya warna minimum pada pewarnaan titik dari G.



Gambar 2.6 Graf terhubung G dengan $\chi(G) = 3$

Misalkan c adalah pewarnaan k titik dari graf terhubung G dan $\Pi = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ adalah partisi dari $V(G)$ ke dalam kelas-kelas warna yang dihasilkan. Untuk setiap $v \in V(G)$, kode warna dari v terhadap Π didefinisikan sebagai k vektor : $c_\Pi(v) = (d(v, C_1), d(v, C_2), \ldots, d(v, C_k))$, dimana $d(v, C_i) = min\{d(v, x)|x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda terhadap Π, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G. Bilangan kromatik lokasi dari G, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$ adalah banyaknya warna minimum pada pewarnaan lokasi dari

G. Karena setiap pewarnaan lokasi merupakan pewarnaan maka $\chi(G) \leq \chi_L(G)$.



Gambar 2.7 Graf terhubung G dengan $\chi_L(G) = 4$

Pada Gambar 2.7, graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $C_1 = \{v_1, v_3\}, C_2 = \{v_2\}, C_3 = \{v_5\}$ dan $C_4 = \{v_4\}$. Kode warna dari setiap titik terhadap $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ adalah:

$$c_\Pi(v_1) = (d(v_1, C_1), d(v_1, C_2), d(v_1, C_3), d(v_1, C_4)) = (0, 1, 1, 2)$$

$$c_\Pi(v_2) = (d(v_2, C_1), d(v_2, C_2), d(v_2, C_3), d(v_2, C_4)) = (1, 0, 1, 2)$$

$$c_\Pi(v_3) = (d(v_3, C_1), d(v_3, C_2), d(v_3, C_3), d(v_3, C_4)) = (0, 1, 1, 1)$$

$$c_\Pi(v_4) = (d(v_4, C_1), d(v_4, C_2), d(v_4, C_3), d(v_4, C_4)) = (1, 2, 1, 0)$$

$$c_\Pi(v_5) = (d(v_5, C_1), d(v_5, C_2), d(v_5, C_3), d(v_5, C_4)) = (1, 1, 0, 1)$$

Karena setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda terhadap $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ maka c merupakan pewarnaan lokasi dari G. Jadi, bilangan kromatik lokasi dari G adalah $\chi_L(G) = 4$.

Berikut ini diberikan teorema dasar tentang bilangan kromatik lokasi pada graf terhubung yang telah dibuktikan oleh Chartrand dkk., (2002).

Teorema 2.4.1 Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf terhubung G. Jika u dan v adalah titik-titik yang berbeda di G sedemikian sehingga $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Secara khusus, jika u dan v adalah titik-titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.

Bukti. Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf terhubung G dan misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ adalah partisi dari titik-titik G ke dalam kelas warna C_i. Untuk titik $u, v \in V(G)$. Andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v termuat dalam kelas warna yang sama, misalkan c_i dari Π. Akibatnya, $d(u, C_i) = d(v, C_i) = 0$. Karena $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$ maka $d(u, C_j) = d(v, C_j)$ untuk setiap $j \neq i, 1 \leq j \leq k$. Akibatnya, $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Jadi, $c(u) \neq c(v)$. ■

Akibat dari Teorema 2.4.1 didapatkan batas bawah dari bilangan kromatik lokasi untuk sebarang graf sebagai berikut:

Akibat 2.4.2 Jika G adalah graf terhubung dengan suatu titik yang bertetangga dengan k daun, maka $\chi_L(G) \geq k + 1$.

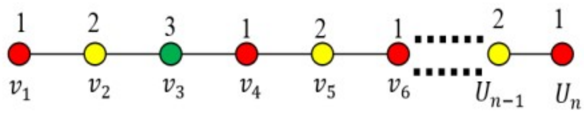
Bukti. Misalkan v adalah suatu titik yang bertetangga dengan k daun, yaitu $x_1, x_2, \ldots, x_k$ di G. Berdasarkan Teorema 2.4.1, setiap pewarnaan lokasi dari G mempunyai warna yang berbeda untuk setiap x_i, maka v harus mempunyai warna yang berbeda dengan semua daun x_i. Akibatnya $\chi_L(G) \geq k + 1$. ■

Berikut ini diberikan teorema tentang bilangan kromatik lokasi pada graf lintasan sebagai berikut:

Teorema 2.4.3 Bilangan kromatik lokasi graf lintasan P_n untuk $n \geq 3$ adalah 3.

Bukti. Perhatikan bahwa $\chi_L(P_1) = 1$ dan $\chi_L(P_2) = 2$. Jelaskan bahwa $\chi_L(P_n) \geq 3$ untuk $n \geq 3$. Berdasarkan Akibat 2.4.2 $\chi_L(G) \leq k + 1$, dengan k derajat titik maksimum. Karena pada $P_{n,k} = 2$ maka $\chi_L(P_n) \leq 1 + 2$. Akibatnya $\chi_L(G) \leq 3$. Jadi terbukti $\chi_L(P_n) = 3$. ■

Pewarnaan Teorema 2.4.3 dapat diartikan sebagai berikut.



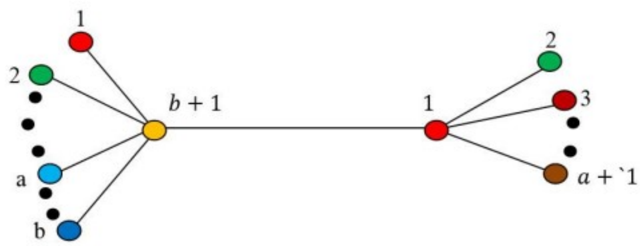
Gambar 2.8 Pewarnaan lokasi minimum pada graf lintasan $P_n, n \geq 3$

Berdasarkan Akibat 2.4.2, diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema 2.4.4 Untuk bilangan bulat a dan b dengan $1 \leq a \leq b$ dan $b \geq 2$, maka $\chi_L(S_{a,b}) = b + 1$.

Bukti. Misalkan c adalah pewarnaan titik menggunakan $b + 1$ sebagaimana terlihat pada Gambar 2.9. Perhatikan bahwa kode warna dari setiap titik $S_{a,b}$ berbeda, akibatnya c adalah pewarnaan lokasi. Jadi $\chi_L(S_{a,b}) \leq b + 1$. ■

Pewarnaan Teorema 2.4.4 dapat diartikan sebagai berikut:



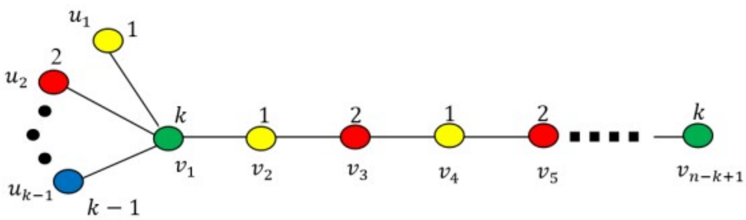
Gambar 2.9 Pewarnaan lokasi minimum pada $S_{(a,b)}$

Berikut ini teorema yang memiliki bilangan kromatik lokasi 3 sampai n kecuali $n - 1$ sebagai berikut:

Teorema 2.4.5 Terdapat graf pohon untuk titik $n \geq 5$ yang mempunyai bilangan kromatik k jika dan hanya jika $k \in \{3, 4, \ldots, n - 2, n\}$.

Bukti. Pertama misalkan $k \in \{3, 4, \ldots, n - 2, n\}$. Untuk $k = 3$, misalkan $T = P_n$; untuk $k = n$, misalkan $T = K_{1,n-1}$. Sehingga diasumsikan bahwa $4 \leq k \leq n - 2$. Misalkan T didapat dari lintasan P_{n-k+1} dengan menambahkan $k - 1$ titik baru $\{u_1, u_2, \ldots, u_{n-k+1}\}$ dan hubungkan setiap u_i, untuk $1 \leq i \leq k - 1$ dengan v_1. Berikanlah warna k pada v_1, warna 1 pada v_i jika i genap, warna 2 pada v_i jika $i \geq 3$ dan i ganjil, dan warna j pada v_j, untuk $1 \leq j \leq k - 1$ lihat Gambar 2.10. Dengan demikian $\chi_L(T)$ adalah pewarnaan lokasi, $\chi_L(T) \leq k$. Berdasarkan Akibat 2.4.2 $\chi_L(T) \geq k$ maka $\chi_L(T) = k$. ■

Pewarnaan Teorema 2.4.5 dapat diartikan sebagai berikut:



Gambar 2.10 Graf pohon T dengan titik n dengan $\chi_L(T) \leq k$

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan di Program Studi Megister Matematika Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung pada semester genap tahun ajaran 2023/2024 yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Tahap Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah:

1. Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi lintasan ${}_nP_m$ untuk $m, n \geq 3$, dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:
   a. Mengkontruksi graf amalgamasi lintasan ${}_nP_m$ untuk $m, n \geq 3$.
   b. Menentukan titik pusat $u = v_1$ sebagai titik awal pewarnaan dalam graf amalgamasi lintasan ${}_nP_m$.
   c. Mewarnai titik pusat tersebut dengan warna 1 dan dilanjutkan ke titik-titik yang lainnya sedemikian sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga memiliki warna yang sama.
   d. Pewarnaan titik dilanjutkan dengan warna lebih besar satu tingkat diatasnya dan dilanjutkan kembali dengan warna lebih kecil dibawahnya sedemikian sehingga semua titik terwarnai dengan warna terbesar yang minimum.
   e. Pewarnaan titik harus memenuhi syarat pewarnaan lokasi dengan setiap titik yang bertetangga memiliki warna dan kode warna berbeda.
   f. Tentukan kode-kode warna untuk setiap titik graf amalgamasi lintasan ${}_nP_m$ dan pastikan kode-kode warna setiap titiknya berbeda.
   g. Memformulasi hasil-hasil yang diperoleh dalam suatu pernyataan matematika dan membuktikan hasil-hasil yang diperoleh.

2. Selanjutnya, untuk menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf barbel dari graf amalgamasi lintasan $B(_nP_m)$ untuk $m, n \geq 3$, dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

   a. Mengkontruksi graf amalgamasi lintasan $B(_nP_m)$ untuk $m, n \geq 3$.

   b. Menentukan titik pusat $u = v_1$ dan $u' = v_1{}'$ sebagai titik awal pewarnaan dalam graf barbel dari graf amalgamasi lintasan $B(_nP_m)$.

   c. Mewarnai titik pusat $u = v_1$ dengan warna 1 dan dilanjutkan ke titik-titik yang lainnya sedemikian sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga memiliki warna yang sama.

   d. Pewarnaan titik dilanjutkan dengan warna lebih besar satu tingkat diatasnya dan dilanjutkan kembali dengan warna lebih kecil dibawahnya sedemikian sehingga semua titik terwarnai dengan warna terbesar yang minimum.

   e. Kemudian mewarnai titik pusat lainnya dengan warna lebih besar satu tingkat dari sebelumnya, warna terbesar minimum ini merupakan bilangan kromatik lokasi graf barbel $B(_nP_m)$.

   f. Pewarnaan lainnya mengikuti jiplakan dari warna sebelumnya.

   g. Pewarnaan titik harus memenuhi syarat pewarnaan lokasi dengan setiap titik yang bertetangga memiliki warna dan kode warna berbeda.

   h. Tentukan kode-kode warna untuk setiap titik graf amalgamasi lintasan $B(_nP_m)$ dan pastikan kode-kode warna setiap titiknya berbeda.

   i. Memformulasi hasil-hasil yang diperoleh dalam suatu pernyataan matematika dan membuktikan hasil-hasil yang diperoleh.

BAB V

KESIMPULAN

5.1 Simpulan

Pada penelitian ini telah berhasil ditentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi lintasan $({}_nP_m)$ dan graf barbelnya $(B({}_nP_m))$ untuk $m, n \geq 3$. Berdasarkan hasil dan pembahasan maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Batas atas bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi lintasan ${}_nP_m$ untuk $m, n \geq 3$ adalah $\lceil \sqrt{n} \rceil + 1$.
2. Batas atas bilangan kromatik lokasi graf barbel dari graf amalgamasi lintasan $B({}_nP_m)$ untuk $m, n \geq 3$ adalah $\lceil \sqrt{n} \rceil + 2$.

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi lintasan beserta barbelnya.

DAFTAR PUSTAKA

Asmiati, Assiyatun, H., dan Bakoro, E.T. (2011). The Locating – Chromatic Number of Amalgamation of Stars. *ITB J. Sci*. **43A(1)**:89 – 101.

Asmiati. (2014). The locating-chromatic number of non homogeneus amalgamation of stars. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. **93(1)**:89-96.

Asmiati. (2016). On the locating-chromatic number of non homogeneus caterpillars and firecracker graphs. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. **100(8)**:1305-1316.

Asmiati. (2017). Bilangan kromatik lokasi n amalgamasi bintang yang dihubungkan oleh suatu lintasan. *Jurnal Matematika Integratif*. **13(2)**:115-121.

Asmiati, Yanan I.K.S.G., dan Yulianti. (2018). On locating-chromatic number of certain barbel graphs. *International Journal of Mathematical Sciences*. **100(8)**:1-5.

Asmiati, Yulianti, L., Aldino, Aristoteles dan Junaidi, A. (2019). The locating chromatic number of a disjoint union of some double stars. *Journal of Physics*. **1338**:1-5.

Asmiati, Damayanti, M., dan Yulianti, L. (2021). On the locating chromatic number of barbell shadow path graphs. *Indonesian Journal of Combinatorics*. **5(2)**:82-93.

Baskoro, E.T., dan Purwasih, I.A. (2012). The Locating-Chromatic Number for Corona Product of Graphs. *Southeast-Asian J. of Science*. **1(1)**:124 – 134.

Baskoro, E.T., dan Asmiati. (2013). Characterizing all trees with locating-chromatic number 3. *Electronic Journal of graph Theory and Applications I*. **2**:109-117.

Behtoei, A., and Anbarloei, M. (2014). The Locating Chromatic Number of The Join of Graphs. *Bull. Iranian Math. Soc.* **40(6)**:1491 – 1504.

Chatrand, G., Salehi, E., Zhang, P. (1998). On partition dimension of graph. *Congr. Numer*. **130**:157-168.

Chatrand, G., Erwin, D., Henning, M.A., Slater, P.J., and Zhang, P. (2002). The Locating-Chromatic Number of a Graph. *Bull. Inst. Combin. Appl*. **59**:45 – 54.

Chatrand, G., Erwin, D., Henning, M.A., Slater, P.J., and Zhang, P. (2003). Graphs of Order n with Locating-Chromatic Number n-1. *Discrete Mathematics*. **269(1-3)**:65 – 79.

Damayanti, M., Asmiati, Fitriani, Ansori, dan Faradila, A. (2021). The locating chromatic number of some modifed path with cycle having locating number four. *Journal of Physics: Conference Series*. **1751**:1-5.

Deo, N. (1989). *Graph theory with application to engineering and computer science*. Prentice Hall of India Private Limited, New Delhi.

Ihwan, M.D., Rahmawati, A., dan Sumargono. (2014). Kajian bilangan clique graf gear G_n dan barbel B_n. *Jurnal Gagasan Matematika dan Informatika*. **5(1)**:39-50.

Irawan, A., Asmiati, Zakaria, L., dan Muludi, K. (2021). The locating-chromatic number of origami graphs. *Indonesian Journal of Combinatorics*. **14(167)**:1-15.

Prawinasti, K., Ansori, M., Asmiati, Notiragayu, dan Rofi, A.R.G.N. (2021). The locating chromatic number for split graph of cycle. *Journal of Physics: Conference Series*. **1751**:1-5.

Sofyan, D.K., Baskoro, E.T., dan Assiyatun, H. (2013). On the locating chromatic number of homogeneous lobster. *AKCE Int. J. Graphs Comb*. **10(3)**:245-252.

Sugeng, K. A., Slamet, S. dan Silabban, D.R. (2014). *Teori Graf dan Aplikasinya*. Departemen Matematika FMIPA UI, Depok.

Welyyanti, D., Baskoro, E.T., Simanjutak, R. dan Uttunggadewa, S. (2013). On the locating chromatic number of complete n-ary tree. *AKCE Int. J. Graphs Comb*. **10(3)**:309-315.

Welyyanti, D., Baskoro, E.T., Simanjutak, R. dan Uttunggadewa, S. (2014). The locating-chromatic number of disconnected graphs. *Far East J. of Mathematical Sciences*. **94(2)**:169-182.

Welyyanti, D., Baskoro, E.T., Simanjutak, R. dan Uttunggadewa, S. (2015). On locating chromatic number for graphs with dominant vertices. *Procedia Comput. Sci*. **74**:89-92.