SIFAT-SIFAT TRANSFORMASI HANKEL

(Skripsi)

Oleh

TIARA NUR SALSABILLA
NPM. 2057031013

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

ABSTRACT

PROPERTIES OF HANKEL TRANSFORM

By

Tiara Nur Salsabilla

A sequence is a function with a domain consisting of natural numbers, and it can be transformed into a matrix provided it has a first term valued at one. Where a matrix is a collection of real or complex numbers arranged by rows (m) and columns (n), where m and n are positive integers. The matrix of such a sequence is called a Hankel matrix. A Hankel matrix is formed from a sequence in such a way that it will always have a determinant of 0 $(det = 0)$, therefore, a transformation is performed on this matrix, known as the Hankel transformation. Like other transformation, the Hankel transformation has several properties, such as similarity based on its Invers transformation and properties related to the main super diagonal of a matrix.

Keywords : sequence, Hankel matrix, Hankel transformation, Invers transformation

ABSTRAK

SIFAT-SIFAT TRANSFORMASI HANKEL

Oleh

Tiara Nur Salsabilla

Barisan adalah suatu fungsi dengan domain berupa himpunan bilangan asli, dan dapat diubah menjadi matriks dengan syarat memiliki suku awal yang bernilai satu. Dimana matriks adalah kumpulan bilangan-bilangan real atau kompleks yang disusun berdasarkan baris (m) dan kolom (n), m dan n adalah bilangan bulat positif. Matriks dari barisan tersebut dinamakan matriks Hankel. Matriks Hankel terbentuk dari suatu barisan sehingga akan selalu mempunyai determinan 0 $(det = 0)$, oleh karena itu, pada matriks ini akan dilakukan transformasi atau disebut dengan transformasi Hankel. Seperti halnya dengan transformasi lainnya, transformasi Hankel memiliki beberapa sifat yaitu kesamaan transformasi Hankel berdasarkan transformasi Inversnya dan sifat yang berhubungan dengan super diagonal utama dari suatu matriks.

Kata kunci : barisan, matriks Hankel, transformasi Hankel, transformasi Invers.

SIFAT-SIFAT TRANSFORMASI HANKEL

Oleh

TIARA NUR SALSABILLA
2057031013

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

Judul Skripsi	:	**SIFAT-SIFAT TRANSFORMASI HANKEL**
Nama Mahasiswa	:	Tiara Nur Salsabilla
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2057031013**
Program Studi	:	**Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI,

1. Komisi Pembimbing

Dra. Dorrah Aziz, M.Si.	**Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.**
NIP. 19610128 198811 2 001	NIP. 19720227 199802 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	**: Dra. Dorrah Aziz, M.Si.**	.....
Sekretaris	**: Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.**	.....
Penguji Bukan Pembimbing	**: Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.**	.....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 19711001 200501 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **2 April 2024**

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	:	**Tiara Nur Salsabilla**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2057031013**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Sifat-sifat Transformasi Hankel**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 2 April 2024

Penulis,

Tiara Nur Salsabilla

NPM. 2057031013

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Tiara Nur Salsabilla, dilahirkan di Gedong Tataan pada tanggal 25 Januari 2002. Penulis merupakan putri tunggal dari pasangan Bapak Sunarto dan Ibu Erniwati.

Penulis mengawali pendidikan di Taman Kanak-Kanak (TK) Satu Atap SD Negeri 2 Bogorejo pada tahun 2007-2008 dan melanjutkan pendidikan Sekolah Dasar (SD) di SD Negeri 2 Bogorejo pada tahun 2008-2014. Kemudian melanjutkan ke Sekolah Menengah Pertama (SMP) di SMP Negeri 1 Pesawaran pada tahun 2014-2017. Kemudian penulis menempuh pendidikan pada jenjang Sekolah Menengah Atas (SMA) di SMA Negeri 1 Gadingrejo pada tahun 2017-2020.

Penulis melanjutkan jenjang pendidikan di Perguruan Tinggi Negeri (PTN) dan terdaftar sebagai mahasiswa S1 Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Mandiri Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SMMPTN) pada tahun 2020.

Sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu kepada dunia kerja dan masyarakat, penulis menyelesaikan Kerja Praktik (KP) di Badan Pusat Statistik (BPS) Kabupaten Pesawaran pada tahun 2023. Penulis juga melakukan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kampung Sinar Luas, Kecamatan Bangun Rejo, Kabupaten Lampung Tengah pada tahun 2023.

KATA INSPIRASI

"Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. Dia mendapat (pahala) dari (kebajikan) yang dikerjakan dan dia mendapat (siksa) dari (kejahatan) yang diperbuatnya."
(Q.S. Al-Baqarah : 286)

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Maka apabila kamu telah selesai (dari sesuatu urusan), kerjakanlah dengan sungguh-sungguh (urusan) yang lain, dan hanya kepada Tuhanmulah hendaknnya kamu berharap."
(Q.S. Al-Insyirah : 6-8)

"Dan jangan kamu berputus asa dari rahmat Allah. Sesungguhnya yang berputus asa dari rahmat Allah, hanyalah orang-orang yang kafir."
(Q.S. Yusuf : 87)

"Hatiku tenang karena mengetahui bahwa apa yang melewatkanku tidak akan pernah menjadi takdirku, dan apa yang ditakdirkan untukku tidak akan pernah melewatkanku."
(Umar bin Khattab)

PERSEMBAHAN

Bismillahirrahmanirrahim

Alhamdulillah, puji dan syukur kehadirat Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya yanng memberikan kekuatan dan kesabaran juga memberikan penerangan dalam ilmu pengetahuan. Hanya karena-Nya lah skripsi ini bisa penulis selesaikan dengan rasa syukur dan bahagia.

Kupersembahkan karya sederhana ini kepada :

Bapak dan Ibu

Terimakasih telah memberikan semua pengorbanan, dukungan, serta do'a dan kasih sayang yang tak terhingga dan terimakasih juga telah menjadi pembimbing serta penyemangat yang terbaik sampai penulis bisa menyelesaikan karya kecil ini.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih telah memberikan bimbingan, arahan, masukan, dukungan, serta ilmu yang bermanfaat bagi penulis.

Almamaterku Tercinta Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillahi Rabbil Alamin, puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah serta karunia-Nya kepada penulis sehingga skripsi dengan judul **"SIFAT-SIFAT TRANSFORMASI HANKEL"** dapat terselesaikan dengan baik.

Terselesaikannya skripsi ini tidak lepas dari dukungan, bimbingan, saran, serta do'a dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada :

1. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si., selaku Dosen Pembimbing I yang telah membimbing penulis, menyumbangkan ilmu, memberikan motivasi dan arahan, serta kesediaan waktu yang diberikan.
2. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing II yang telah membimbing penulis, menyumbangkan ilmu, memberikan motivasi dan arahan, serta kesediaan waktu yang diberikan.
3. Bapak Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si., selaku Dosen Penguji atas kesediaannya untuk menguji, memberikan kritik dan saran yang membangun pada skripsi ini.
4. Bapak Dr. Subian Saidi, S.Si., M.Si., selaku Pembimbing Akademik yang telah memberikan arahan dan bimbingan selama masa perkuliahan.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Seluruh dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Kedua orang tuaku yang selalu memberikan motivasi serta do'a sehingga penulis bisa menyelesaikan perkuliahan ini.
9. Teman terbaik dan teman seperjuangan penulis yaitu Hasna Wida Saifana, Siska Ayuditya Saputri, serta teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2020 terimakasih atas kebersamaan selama proses perkuliahan.
10. Jodoh penulis kelak kamu adalah salah satu alasan penulis menyelesaikan skripsi ini, meskipun saat ini penulis tidak mengetahui keberadaanmu. Karena penulis yakin bahwa sesuatu yang ditakdirkan menjadi milik kita akan menuju kepada kita bagaimanapun caranya.
11. Semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu terimakasih telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
12. *Last but not least* untuk diri sendiri, karena telah mampu berusaha keras dan berjuan sejauh ini. Mampu mengendalikan diri dari berbagai tekanan di luar keadaan dan tak pernah memutuskan menyerah sesulit apapun dalam menjalani proses penyusunan skripsi hingga dapat menyelesaikan dengan baik dan semaksimal mungkin. Ini adalah pencapaian yang patut dibanggakan untuk diri sendiri.

Bandar Lampung, 2 April 2024
Penulis,

Tiara Nur Salsabilla
NPM. 2057031013

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR ISI ..... **xiii**
DAFTAR ISTILAH DAN SINGKATAN ..... **xiv**
I. PENDAHULUAN **1**
1.1. Latar Belakang 1
1.2. Tujuan Penelitian 2
1.3. Manfaat Penelitian 2
II. TINJAUAN PUSTAKA **3**
2.1. Barisan 3
2.2. Matriks 3
2.3. Matriks Hankel 10
2.4. Determinan 10
2.5. Dekomposisi $-LU$ 15
2.6. Transformasi 17
2.7. Transformasi Hankel 18
2.8. Diagonal 18
III. METODOLOGI PENELITIAN **20**
3.1. Waktu dan Tempat Penelitian 20
3.2. Metode Penelitian 20
IV. HASIL DAN PEMBAHASAN **21**
4.1. Teorema 4.1 21
4.2. Teorema 4.2 37
V. KESIMPULAN **42**
DAFTAR PUSTAKA **43**

DAFTAR ISTILAH DAN SINGKATAN

$\boldsymbol{A}$	: Matriks $\boldsymbol{A}$
$\boldsymbol{A^{-1}}$	: Invers Matriks $\boldsymbol{A}$
$\boldsymbol{H}_n$	: Matriks Hankel Orde n
$\boldsymbol{H}^*$	: Matriks dari Transformasi Invers
h_n	: Nilai Determinan Hankel Orde n
h_n^*	: Nilai Detrminan Hankel Orde n
$\boldsymbol{L}$	: Matriks Segitiga Bawah
$\boldsymbol{L}^*$	: Matriks Segitiga Bawah dari Transformasi Invers
$\boldsymbol{U}$	: Matriks Segitiga Atas
$\boldsymbol{U}^*$	: Matriks Segitiga Atas dari Transformasi Invers
m	: Baris Matriks Sebanyak m
n	: Kolom Matriks Sebanyak n
$\boldsymbol{I}_n$	: Matriks Identitas Orde n
$\boldsymbol{E}$	: Matriks Elementer
$\boldsymbol{E^{-1}}$	: Invers Matriks Elementer
$det(\boldsymbol{A})$	: Determinan Matriks $\boldsymbol{A}$
$=$	: Sama Dengan
$\neq$	: Tidak Sama Dengan
$\sum$	: Sigma
■	: Terbukti

I. PENDAHULUAN

1.1.Latar Belakang

Matriks merupakan salah satu cabang dari ilmu aljabar linear yang memiliki peran sangat penting dalam matematika. Pentingnya peranan matriks ini dapat dilihat dari begitu banyaknya penggunaan matriks dalam berbagai bidang antara lain : aljabar, statistika, metode numerik, persamaan diferensial dan lain-lain (Abdurrois, 2018).

Transformasi adalah konsep yang merujuk pada perubahan atau perpindahan yang terjadi dalam suatu sistem atau objek. Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan Yeni Tahun 2008, mengenai pembuktikan 2 sifat dari 4 sifat transformasi Hankel. Saya tertarik ingin membuktikan 2 sifat yang belum dibuktikan yaitu : sifat ketiga mengenai kesamaan transformasi Hankel berdasarkan transformasi Invers dan sifat keempat mengenai super diagonal utama.

Barisan adalah suatu fungsi dengan domain berupa himpunan bilangan asli, dan dapat diubah menjadi matriks dengan syarat memiliki suku awal yang bernilai satu. Matriks yang terbentuk dari barisan bilangan bulat adalah sebagai berikut :

$$\boldsymbol{H}_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & \cdots \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \text{ dimana } a_1 = 1 \text{ dan } h_{i,j} = a_{i+j-1}$$

(Layman, 2001).

Matriks $\boldsymbol{H}_n$ adalah matriks Hankel berorde n yang dapat mengalami transformasi karena terbentuk dari suatu barisan dengan suku awal bernilai 1. Tidak semua matriks dapat dilakukan transformasi. Matriks Hankel terbentuk dari suatu barisan sehingga determinannya selalu $0\,(det = 0)$ (Layman, 2001). Oleh karena itu, dilakukan transformasi pada matriks tersebut, yang dikenal sebagai transformasi Hankel. Dengan demikian, determinan Hankel dari matriks $\boldsymbol{H}$ tersebut adalah transformasi Hankel. Seperti halnya dengan transformasi lainnya, transformasi Hankel memiliki 4 sifat. Dalam penelitian ini akan dibahas sifat-sifat dari transformasi Hankel tersebut.

1.2.Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui dan membuktikan 2 sifat transformasi Hankel yaitu :

1. Sifat 3 : Kesamaan transformasi Hankel berdasarkan transformasi Invers.
2. Sifat 4 : Elemen-elemen super diagonal utama dari $\boldsymbol{U}$ dan $\boldsymbol{U}^*$ memiliki hubungan : $\boldsymbol{u}^*_{\boldsymbol{i,i+1}} = \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{i,i+1}} + \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{i,i}}$.

1.3.Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Untuk menambah pengetahuan tentang transformasi Hankel khususnya sifat-sifat dari transformasi Hankel.
2. Memberikan sumbangan pemikiran dalam rangka memperluas dan memperdalam ilmu matematika khususnya tentang transformasi Hankel.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1.Barisan

Barisan adalah suatu fungsi yang domainnya adalah himpunan bilangan asli. Misal terdapat bilangan asli $1, 2, 3, \cdots, n$ yang bersesuaian dengan bilangan real x_n tertentu, maka $x_1, x_2, \cdots, x_n$ dikatakan barisan (Mizrahi dan Sulivan, 1982).

2.2.Matriks

Definisi 2.2.1. Matriks

Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks. Matriks yang mempunyai m baris dan n kolom (berukuran $m \times n$) dinyatakan dengan :

$$\boldsymbol{A}_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Bilangan-bilangan $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots, a_{mn}$ yang menyusun rangkaian tersebut disebut elemen atau unsur dari matriks tersebut. Indeks pertama dari elemen menunjukan baris (garis horizontal) dan indeks kedua elemen menunjukan kolom (garis vertikal) dimana elemen itu berada. Suatu matriks yang terdiri atas satu baris saja disebut vektor baris, bila terdiri atas satu kolom saja disebut vektor kolom (Gere dan Weaver, 1987).

Definisi 2.2.2. Matriks Bujur Sangkar

Matriks bujur sangkar atau matriks persegi adalah suatu matriks yang banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom, yang dinyatakan dengan $\boldsymbol{A}_{m\times n}$, dimana $m = n$, dapat ditulis dengan $\boldsymbol{A}_{n\times n} = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$. Matriks berordo $n \times n$ disebut juga matriks bujur sangkar ordo n. Dalam matriks bujur sangkar, unsur-unsur $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn}$ disebut diagonal utama matriks dari $\boldsymbol{A}$ (Anton dan Rorres, 2004).

$$\boldsymbol{A}_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2.3. Matriks Segitiga Atas

Sebuah matriks bujur sangkar yang semua elemen-elemen di bawah diagonal utama matriks tersebut bernilai nol disebut matriks segitiga atas (Anton dan Rorres, 2013).

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2.4. Matriks Segitiga Bawah

Sebuah matriks bujur sangkar yang semua elemen-elemen di atas diagonal utama matriks tersebut bernilai nol disebut matriks segitiga bawah (Anton dan Rorres, 2013).

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2.5. Matriks Identitas

Sebuah matriks bujur sangkar dengan elemen-elemen pada diagonal utama bernilai satu dan elemen-elemen di luar diagonal utama bernilai nol. Matriks identitas umumnya dilambangkan dengan huruf $\boldsymbol{I}$ (Anton dan Rorres, 2013).

$$\boldsymbol{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2.6. Matriks Singular

Sebuah matriks bujur sangkar $\boldsymbol{A}$ dikatakan singular jika $det(\boldsymbol{A}) = 0$, sedangkan tidak singular jika $det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ (Anton dan Rorres, 2013).

Definisi 2.2.7. Matriks Elementer

Sebuah matriks bujur sangkar orde n dinamakan matriks elementer jika matriks tersebut dapat diperoleh dari matriks identitas $n \times n$ yakni $\boldsymbol{I}_n$ dengan melakukan sebuah operasi baris elementer tunggal (Anton dan Rorres, 2013). Di bawah ini didaftarkan tiga matriks elemeter dan operasi-operasi yang menghasilkannya.

(i). $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

Kalikan baris kedua I_2 dengan -3

(ii). $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tambahkan tiga kali baris ketiga dari I_3 pada baris pertama

(iii). $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Pertukarkan baaris kedua dan baris keempat dari I_4

Teorema 2.1

Setiap matriks elementer dapat dibalik, dan inversnya adalah juga matriks elementer.

Bukti :

Jika $\boldsymbol{E}$ adalah matriks elementer, maka $\boldsymbol{E}$ dihasilkan dari operasi baris pada $\boldsymbol{I}$. Misalkan $\boldsymbol{E^{-1}}$ adalah matriks yang dihasilkan jika invers operasi ini ditetapkan pada $\boldsymbol{I}$. Dengan menggunakan kenyataan bahwa operasi baris invers akan saling meniadakan efek satu sama lain, maka diperoleh bahwa

$$\boldsymbol{E^{-1}E = I} \qquad\qquad \boldsymbol{EE^{-1} = I}$$

Jadi, matriks elementer $\boldsymbol{E^{-1}}$ adalah invers dari $\boldsymbol{E}$. ■

Definisi 2.2.8 Perkalian Matriks

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks $m \times n$ dan $\boldsymbol{B}$ adalah matriks $n \times s$, maka hasil kali $\boldsymbol{AB}$ adalah matriks $m \times s$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri dalam baris i dan kolom j dari $\boldsymbol{AB}$, pisahkanlah baris i dari matriks $\boldsymbol{A}$ dan kolom j dari matriks $\boldsymbol{B}$. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkanlah dari hasil yang diperoleh. Dalam notasi matriks, jika $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ adalah matriks $m \times n$, dan $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$ adalah matriks $n \times s$, maka

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix}$$

entri $(\boldsymbol{AB})_{ij}$ pada baris i dan kolom j dari $\boldsymbol{AB}$ diperoleh melalui

$$(\boldsymbol{AB})_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \qquad (2.1)$$

Jika $\boldsymbol{A}$ suatu matriks dan c adalah suatu skalar, maka hasil kali $c\boldsymbol{A}$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap anggota dengan c. Dalam notasi matriks, jika $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$, maka

$$(c\boldsymbol{A})_{ij} = c(\boldsymbol{A})_{ij} = ca_{ij} \qquad (2.2)$$

(Anton dan Rorres, 2013)**.**

Contoh :

Matriks

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan $\boldsymbol{AB}$

Penyelesaian :

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1)(9)+(2)(6)+(3)(3) & (1)(8)+(2)(5)+(3)(2) & (1)(7)+(2)(4)+(3)(1) \\ (4)(9)+(5)(6)+(6)(3) & (4)(8)+(5)(5)+(6)(2) & (4)(7)+(5)(4)+(6)(1) \\ (7)(9)+(8)(6)+(9)(3) & (7)(8)+(8)(5)+(9)(2) & (7)(7)+(8)(4)+(9)(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 30 & 24 & 18 \\ 84 & 69 & 54 \\ 138 & 114 & 90 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2.9 Invers Matriks

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks bujur sangkar, dan jika terdapat matriks $\boldsymbol{B}$ yang ukurannya sama sedemikian rupa sehingga $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$, maka $\boldsymbol{A}$ disebut dapat dibalik (inversible) dan $\boldsymbol{B}$ disebut sebagai invers (inverse) dari $\boldsymbol{A}$. Jika matriks $\boldsymbol{B}$ tidak dapat didefinisikan, maka $\boldsymbol{A}$ dinyatakan sebagai matriks singular.

Matriks $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dapat diinverskan apabila $ad - bc \neq 0$.

Dengan Rumus : $\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$

Apabila $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ adalah matriks seorde dan memiliki balikan maka $\boldsymbol{AB}$ dapat diinverskan dan $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B^{-1}A^{-1}}$ (Anton dan Rorres, 2013)**.**

Contoh 1 :

Matriks

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Tentukan nilai dari $\boldsymbol{A^{-1}}$

Penyelesaian :

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{1}{(3)(2)-(5)(1)}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6-5}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

Contoh 2 :

Matriks

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Dengan menggunakan rumus, maka didapatkan

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, (\boldsymbol{AB})^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & 8 \end{bmatrix}$$

Maka

$$\boldsymbol{B^{-1}A^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & 8 \end{bmatrix}$$

Ini menunjukkan bahwa $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B^{-1}A^{-1}}$.

Contoh 3 :

Carilah invers dari

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Untuk mereduksi $\boldsymbol{A}$ pada matriks identitas dengan menggunakan operasi-operasi baris dan menerapkan operasi-operasi ini secara bersamaan pada $\boldsymbol{I}$ untuk menghasilkan $\boldsymbol{A^{-1}}$. Hal ini dapat diselesaikan dengan menggandengkan matriks identitas tersebut ke kanan $\boldsymbol{A}$ dan dengan menerapkan operasi-operasi baris pada kedua ruas kiri tereduksi pada $\boldsymbol{I}$. Maka matriks akhir akan mempunyai bentuk :

$$[\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{A^{-1}}] \qquad (2.3)$$

Perhitungan dapat dilakukan sebagai berikut :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] B2 - 2B1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] B3 - B1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] B3 + 2B2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] (-1)B3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] B2 + 3B3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] B1 - 3B3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] B1 - 2B2$$

Jadi $\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

2.3.Matriks Hankel

Matriks Hankel adalah matriks yang semua elemen di sepanjang diagonal utamanya konstan, artinya setiap kemiringan diagonal dari kanan ke kiri adalah konstan.

$$\boldsymbol{H}_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & \cdots \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \text{ dimana } a_1 = 1 \text{ dan } h_{i,j} = a_{i+j-1}$$

(Layman, 2001).

2.4.Determinan

Misalkan $\boldsymbol{A}$ adalah suatu matriks bujur sangkar. Fungsi determinan dinotasikan dengan det dan didefinisikan $det(\boldsymbol{A})$ sebagai jumlah dari semua hasil kali elementer bertanda dari $\boldsymbol{A}$. Angka $det(\boldsymbol{A})$ disebut determinan dari $\boldsymbol{A}$ (Anton dan Rorres, 2013)**.**

Ada beberapa metode untuk menentukan determinan dari matriks bujur sangkar, antara lain : metode sarrus, metode reduksi baris, dan metode ekspansi kofaktor.

Definisi 2.4.1Metode Sarrus

Metode sarrus ini hanya dapat digunakan untuk menghitung determinan matriks yang berukuran 3×3. Misalkan :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Determinan matriks $\boldsymbol{A}$ adalah

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$= aei + bfg + cdh - (ceg + afh + bdi)$$

Contoh :

Diketahui matriks $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. Tentukan determinan dari matriks $\boldsymbol{B}$.

Penyelesaian :

$$|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 5 & -1 \end{matrix}$$

$= [(-2)(0)(3) + (3)(5)(5) + (2)(-1)(-1)] - [(2)(0)(5) + (-2)(5)(-1) + (3)(-1)(3)]$

$= [0 + 75 + 2] - [0 + 10 - 9] = 77 - 1 = 76$

Definisi 2.4.2 Metode Reduksi Baris

Teorema 2.2

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah sebarang matriks bujur sangkar yang mengandung satu baris atau satu kolom bilangan nol maka $det(\boldsymbol{A}) = 0$.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ d & 0 & f \\ g & 0 & i \end{vmatrix} = 0$$

Teorema 2.3

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks yang berbentuk segitiga atas, segitiga bawah, maka $det(\boldsymbol{A})$ adalah hasil kali dari elemen-elemen pada diagonal utama yaitu $det(\boldsymbol{A}) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} = aei \qquad \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & 0 \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei$$

Teorema 2.4

1. Jika $\boldsymbol{B}$ adalah matriks yang dihasilkan ketika satu baris atau satu kolom dari $\boldsymbol{A}$ dikalikan dengan suatu skalar k, maka $det(\boldsymbol{B}) = kdet(\boldsymbol{A})$.

$$\begin{vmatrix} a & kb & c \\ d & ke & f \\ g & kh & i \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

2. Jika $\boldsymbol{B}$ adalah matriks yang dihasilkan ketika dua baris atau dua kolom dari $\boldsymbol{A}$ ditukarkan, maka $det(\boldsymbol{B}) = -det(\boldsymbol{A})$.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

3. Jika $\boldsymbol{B}$ adalah matriks yang dihasilkan ketika kelipatan dari satu baris $\boldsymbol{A}$ ditambahkan ke baris lainnya, atau ketika kelipatan dari satu kolom ditambahkan ke kolom lainnya, maka $det(\boldsymbol{B}) = det(\boldsymbol{A})$.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ ka + d & kb + e & kc + f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Contoh :

Diketahui matriks bujur sangkar dengan ukuran 3×3 sebagai berikut :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Tentukan $det\ (\boldsymbol{A})$

Penyelesaian :

$$det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} faktor\ bersama\ yaitu\ 3\ dari\ B1\ dikeluarkan$$

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} B2\ dan\ B3\ dipertukarkan$$

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} 2\ kali\ B1\ ditambahkan\ ke\ B2$$

$$= -(3)(5)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} faktorbersama\ yaitu\ 5\ dari\ B2\ dikeluarkan$$

$$= -(3)(5)(-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} faktor\ bersama\ yaitu - 2\ dari\ B3$$

$$= -\big((3)(5)(-2)\big) = 30$$

Jadi, $det(\boldsymbol{A}) = 30$.

Definisi 2.4.3 Metode Ekspansi Kofaktor

Minor

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah suatu matriks bujur sangkar, maka minor dari elemen a_{ij} dinyatakan sebagai M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$ dihilangkan dari $\boldsymbol{A}$.

Misalkan matriks $\boldsymbol{A}$ adalah matriks yang berukuran 3×3, yaitu

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Minor dari elemen matriks $\boldsymbol{A}$ adalah sebagai berikut :

$$M_{11} = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} \qquad M_{13} = \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \qquad M_{33} = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

Kofaktor

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah suatu matriks bujur sangkar, maka kofaktor dari elemen a_{ij} dinyatakan sebagai C_{ij} dan didefinisikan dengan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dengan M_{ij} adalah minor dari elemen a_{ij}.

Misalkan matriks $\boldsymbol{A}$ berukuran 3×3, yaitu :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Kofaktor dari elemen matriks $\boldsymbol{A}$ adalah sebagai berikut :

$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

Contoh :

Hitunglah determinan dari :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Minor

$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

Kofaktor

$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16$

$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -10$

$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3$

$det(\boldsymbol{A}) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = (3)(16) + (1)(-10) + (-4)(3) = 26$

2.5.Dekomposisi – $\boldsymbol{LU}$

Sebuah faktorisasi matriks bujur sangkar $\boldsymbol{A}$ menjadi $\boldsymbol{A = LU}$, dimana $\boldsymbol{L}$ adalah segitiga bawah dan $\boldsymbol{U}$ adalah segitiga atas dikatakan sebuah dekomposisi$-LU$ atau dekomposisi segitiga $\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{E_k, \cdots E_2 E_1 A = U} \tag{2.4}$$

Dengan Teorema 2.1, $\boldsymbol{E_1, E_2, \cdots, E_K}$ yang dapat dibalik, maka dapat mengalikan kedua ruas dari persamaan (2.4) secara berurutan dengan

$$\boldsymbol{E_k}^{-1} \cdots \boldsymbol{E_2}^{-1} \boldsymbol{E_1}^{-1} \tag{2.5}$$

Sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{A = E_1}^{-1} \boldsymbol{E_2}^{-1} \cdots \boldsymbol{E_k}^{-1} \boldsymbol{U} \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{L = E_1}^{-1} \boldsymbol{E_2}^{-1} \cdots \boldsymbol{E_k}^{-1} \tag{2.7}$$

yang merupakan segitiga bawah yang juga menetapkan bahwa tidak ada pertukaran baris yang digunakan dalam mereduksi $\boldsymbol{A}$ ke $\boldsymbol{U}$. Jika matriks bujur sangkar $\boldsymbol{A}$ dapat direduksi terhadap bentuk eselon baris tanpa mempertukarkan baris-barisnya, maka $\boldsymbol{A}$ mempunyai dekomposisi$-LU$. Pada umumnya, jika pertukaran baris diperlukan untuk mereduksi $\boldsymbol{A}$ terhadap bentuk eselon baris, maka tidak ada dekomposisi$-LU$ (Anton, 1987).

Contoh :

Carilah dekomposisi$-LU$ dari

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Untuk memperoleh dekomposisi$-LU$ dimana $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$, akan mereduksi $\boldsymbol{A}$ kebentuk eselon baris $\boldsymbol{U}$, selanjutnya dihitung $\boldsymbol{L}$. langkah-langkah tersebut sebagai berikut :

Reduksi menjadi bentuk eselon baris	Matriks elementer yang bersesuaian dengan operasi baris	Invers matriks elementer
$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$		
$1/2B1\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$	$E_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	${E_1}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$B2 + 3B1\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$	$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	${E_2}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$B3 - 4B1\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$	$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	${E_3}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$B3 + 3B1\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$	$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$	${E_4}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$
$B3 - 2B2\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$	${E_5}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

Jadi,

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dan dari persamaan (2.7).

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

sehingga $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.6.Transformasi

Transformasi adalah perubahan posisi atau bentuk suatu objek ke objek lain. Ada empat macam transformasi dasar dalam matematika, yaitu translasi (pergeseran), rotasi (perputaran), refleksi (pencerminan), dan dilatasi (perbesaran).

A. Translasi (Pergeseran)

Translasi merupakan suatu perubahan posisi yang diperoleh dengan cara menggeser.

B. Rotasi (Perputaran)

Perubahan posisi dalam rotasi diperoleh dengan cara memutar objek dengan mengacu pada pusat perputaran tertentu. Rotasi berbeda dengan translasi karena perubahan posisi pada translasi tidak mengacu pada suatu titik tertentu. Keistimewaan dari rotasi adalah jarak antara titik pusat dengan masing-masing bagian objek yang diputar akan selalu tetap, seberapa jauh pun objek itu diputar.

C. Refleksi (Pencerminan)

Refleksi merupakan perubahan yang dilakukan dengan mencerminkan suatu objek terhadap suatu garis (untuk dua dimensi) atau bidang (untuk tiga dimensi).

D. Dilatasi (Perbesaran)

Seperti halnya refleksi yang tidak hanya terpaku pada perubahan posisi, dilatasi menghasilkan suatu perubahan ukuran selain perubahan posisi. Dilatasi diperoleh dengan mengalikan suatu objek dengan faktor pengali tertentu (memperbesar ataupun memperkecil) (*Transformasi- Wikipedia Bahasa Indonesia, Ensiklopedia Bebas*, 2024).

2.7.Transformasi Hankel

Suatu matriks dapat dibentuk dari suatu barisan bilangan bulat $\boldsymbol{A}$, matriks tersebut merupakan matriks Hankel. Matriks yang terbentuk dari barisan bilangan bulat $\boldsymbol{A}$ tersebut adalah sebagai berikut :

$$\boldsymbol{H}_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & \cdots \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \text{ dimana } a_1 = 1 \text{ dan } h_{i,j} = a_{i+j-1}$$

$\boldsymbol{A}$ merupakan matriks Hankel $\boldsymbol{H}$ orde n dan h_n adalah determinan Hankel orde n dari $\boldsymbol{A}$, atau dinotasikan dengan $h_n = det(\boldsymbol{H}_n)$. Determinan Hankel dari $\boldsymbol{A}$ tersebut adalah transformasi Hankel (Layman, 2001).

2.8.Diagonal

Diagonal adalah garis lurus yang menghubungkan dua ujung yang berlawanan dari suatu bentuk, atau struktur lainnya. Dalam konteks matriks, diagonal matriks adalah sekumpulan elemen yang diperluas dari ujung matriks ke ujung yang paling terjauh.

Definisi 2.8.1 Diagonal Utama

Diagonal utama adalah kumpulan elemen yang terletak dari sudut kiri atas ke sudut kanan bawah matriks. Dalam matriks persegi, elemen-elemen diagonal utama biasanya memiliki indeks yang sama, yaitu $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots$. Elemen-elemen ini merupakan titik-titik di mana baris dan kolom matriks bertemu secara vertikal dalam matriks.

Definisi 2.8.2 Super Diagonal Utama

Super diagonal utama adalah baris di atas diagonal utama dalam matriks persegi. Dalam matriks A, elemen-elemen super diagonal utama adalah a_{ij} di mana $i < j$. Elemen-elemen ini terletak di atas diagonal utama yang berjalan dari sudut kiri atas ke sudut kanan bawah matriks.

Definisi 2.8.3 Anti Diagonal

Anti diagonal adalah garis yang berjalan dari sudut kanan atas ke sudut kiri bawah dalam matriks persegi. Elemen-elemen ini terletak pada posisi yang berlawanan dengan diagonal utama (*Diagonal - Wikipedia Bahasa Indonesia, Ensiklopedia Bebas*, 2024).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1. Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2023/2024 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2. Metode Penelitian

Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini sebagai berikut :

1. Mempelajari literatur-literatur tentang transformasi Hankel dan literatur yang berhubungan dengan transformasi Hankel.
2. Merubah suatu barisan bilangan bulat ke dalam matriks Hankel, yaitu :

$$\boldsymbol{H}_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & \cdots \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \text{ dimana } a_1 = 1 \text{ dan } h_{i,j} = a_{i+j-1}$$

3. Menentukan transformasi Hankel dari langkah kedua, yaitu dimana determinan Hankel dari matriks tersebut merupakan transformasi Hankel, atau dinotasikan dengan $h_n = det(\boldsymbol{H}_n)$.
4. Membuktikan sifat-sifat yang berhubungan dengan transformasi Hankel.
5. Menerapkan dalam soal dan menyelesaikannya.

V. KESIMPULAN

Dari hasil dan pembahasan yang telah didapatkan maka dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Jika $\boldsymbol{A}$ merupakan barisan bilangan bulat dan $\boldsymbol{B}$ merupakan transformasi Inversnya, maka $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ merupakan transformasi Hankel yang sama.
2. Jika $\boldsymbol{H}$ dan $\boldsymbol{H}^*$ berturut-turut merupakan matriks Hankel dari barisan bilangan bulat $\boldsymbol{A}$ dan transformasi Inversnya $\boldsymbol{A}^*$, dan misalnya $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{LU}$ dan $\boldsymbol{H}^* = \boldsymbol{L}^*\boldsymbol{U}^*$ merupakan dekomposisi$-LU$. Sehingga super diagonal utama $\boldsymbol{U}$ dan $\boldsymbol{U}^*$ mempunyai hubungan: $\boldsymbol{u}^*_{\boldsymbol{i,i+1}} = \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{i,i+1}} + \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{i,i}}$.

DAFTAR PUSTAKA

Abdurrois. 2018. *Diagonalisasi Secara Uniter Matriks Herrmite Dan Aplikasinya Pada Pengamanan Pesan Rahasia.* Skripsi Universitas Lampung, Bandar Lampung.

Anton, H. 1987. *Aljabar Linear Elementer*. Edisi Kelima. Jilid 1. Erlangga, Jakarta.

Anton, H. dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer versi aplikasi.* Edisi kedelapan. Jilid 1. Erlangga, Jakarta.

Anton, H., dan Rorres, C. 2013. *Elementary Linear Algebra* 11^{th} *edition.* Wiley, Amerika.

Asih, Yeni. 2008. *Kararteristik Transformasi Hankel*. Skripsi Universitas Lampung, Bandar Lampung.

Diagonal - Wikipedia bahasa Indonesia, ensiklopedia bebas. (2024). https://id.wikipedia.org/wiki/Diagonal

Gere, J.M. dan Weaver Jr. 1987. *Aljabar Matriks untuk Para Insinyur.* Terjemahan G.Tejosutikno. Erlangga, Jakarta.

Layman, J. W. 2001. The Hankel Transform and Some of its Properties. In *Journal of Integer Sequences* Vol. 4.

Mizrahi, A. dan Sullivan, M. 1982. *Calculus and Analytic Geometry*. Wadsworth Publishing Company Belmont, California.

Transformasi - Wikipedia bahasa Indonesia, ensiklopedia bebas. (2024). https://id.wikipedia.org/wiki/Transformasi