DIMENSI PARTISI GRAF LINTANG DAN BARBELNYA

(Skripsi)

Oleh

SALSABILA SHAFIRA FITRI
2057031004

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

ABSTRAK

DIMENSI PARTISI GRAF LINTANG DAN BARBELNYA

Oleh

SALSABILA SHAFIRA FITRI

Graf lintang, L_n untuk $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, merupakan graf yang terbentuk dari dua titik kutub (u_1, u_2) dan n titik lintang $(v_i,\ i = 1,2, \dots, n)$ dengan himpunan sisinya $\{u_1 v_i\} \cup \{u_2 v_i\}$. Graf barbel lintang, B_{L_n} dengan $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, adalah graf sederhana yang terbentuk dari dua graf lintang yang dihubungkan oleh sebuah sisi. Dimensi partisi graf lintang adalah n untuk $n \geq 3$ dan $n + 1$ untuk barbelnya.

Kata kunci: graf lintang, graf barbel lintang, dimensi partisi graf.

ABSTRACT

PARTITION DIMENSION OF LATITUDE GRAPHS AND ITS BARBELL

By

SALSABILA SHAFIRA FITRI

The latitude graph, L_n with $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$, is a graph formed by two polar vertices (u_1, u_2) and n latitude vertices $(v_i,\ i = 1,2, \dots, n)$ with the set of edges $\{u_1 v_i\} \cup \{u_2 v_i\}$. The barbell graph of latitude graph, B_{L_n} with $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, is a simple graph constructed by two latitude graphs connected by a bridge. The partition dimension of the latitude graph is n for $n \geq 3$ and $n + 1$ for its barbell.

Keywords: latitude graphs, barbell of latitude graphs, partition dimension of graph

DIMENSI PARTISI GRAF LINTANG DAN BARBELNYA

Oleh

SALSABILA SHAFIRA FITRI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

Judul Skripsi : **DIMENSI PARTISI GRAF LINTANG DAN BARBELNYA**

Nama Mahasiswa : *Salsabila Shafira Fitri*

Nomor Pokok Mahasiswa : **2057031004**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.
NIP. 19760411 200012 2 001

Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si.
NIP. 19931106 201903 2 018

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.**	....
Sekretaris	: **Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 19711001 200501 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **26 Juni 2024**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama Mahasiswa	: **Salsabila Shafira Fitri**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **2057031004**
Program Studi	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **DIMENSI PARTISI GRAF LINTANG DAN BARBELNYA**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 26 Juni 2024

Penulis,

Salsabila Shafira Fitri
NPM. 2057031004

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Salsabila Shafira Fitri, dilahirkan pada tanggal 14 Desember 2001 di Bandar Lampung. Penulis merupakan putri pertama dari Bapak Saepullah dan Ibu Endang Kusrianti.

Penulis mengawali pendidikan di Taman Kanak-Kanak (TK) Permata Hati pada tahun 2007-2008. Kemudian menempuh pendidikan di Sekolah Dasar (SD) di SDN 5 Lempuyang Bandar pada tahun 2008-2014. Kemudian melanjutkan ke Sekolah Menengah Pertama di MTs Diniyyah Putri Lampung pada tahun 2014-2017. Selanjutnya belajar pada jenjang Sekolah Menengah Atas di MA Diniyyah Putri Lampung pada tahun 2017-2020. Pada tahun 2020 penulis terdaftar sebagai mahasiswa Program Studi S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Pada tahun 2021 dan 2022 penulis aktif di Himpunan Mahasiswa Tingkat Jurusan atau HIMATIKA UNILA, penulis diamanahkan menjadi Anggota Biro Kesekretariatan. Pada tahun yang sama, penulis diamanahkan sebagai Koordinator Divisi Kestari Dies Natalis Jurusan Matematika XXII (DINAMIKA XXII). Pada tahun 2023 penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Departemen PPIC *Processed Pineapple*, PT *Great Giant Pineapple* sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu di dunia kerja. Pada tahun yang sama penulis juga melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Sukosari, Kecamatan Kalirejo, Kabupaten Lampung Tengah, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat dan penulis melanjutkan dengan mengikuti kegiatan magang di Departemen *Supply Chain Management* (SCM) PT Bina Pertiwi Energi (member of Astra).

KATA INSPIRASI

“ Jangan takut jatuh, karena yang tidak pernah memanjatlah yang tidak pernah jatuh. Jangan takut gagal, karena yang tidak pernah gagal hanyalah orang-orang yang tidak pernah melangkah. Jangan takut salah, karena dengan kesalahan yang pertama kita dapat menambah pengetahuan untuk mencari jalan yang benar pada langkah selanjutnya.”

(Buya Hamka)

PERSEMBAHAN

Dengan segala syukur kepada Allah SWT yang telah memberikan rahmat serta hidayah sehingga dapat terselesaikannya skripsi ini dengan tepat pada waktunya.

Oleh karena itu saya persembahkan rasa terima kasih saya atas terselesaikannya skripsi ini kepada

Papa Mama dan Adik-Adikku

Terima kasih telah mendoakan dan mendukung setiap langkah yang saya pilih. Karena dengan doa dan ridho kalian, Allah memudahkan setiap perjalanan hidup ini. Terimalah bukti kecil ini sebagai hadiah keseriusan saya untuk membalas semua pengorbanan, keikhlasan, dan jerih payah yang selama ini kalian lakukan.

Keluarga dan Sahabat-sahabatku

Terima kasih kepada semua orang-orang baik yang sudah menemani, memberikan pengalaman, motivasi, doa-doanya, serta dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Puji syukur penulis ucapkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena atas rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang judul "**DIMENSI PARTISI GRAF LINTANG DAN BARBELNYA**" Penulis menyadari bahwa banyak sekali bantuan yang penulis dapatkan selama pengerjaan skripsi ini. Dengan terselesaikannya skripsi penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih kepada :

1. Ibu Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan waktu, bimbingan, arahan serta masukan dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si., selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, pengarahan, serta saran sehingga penulis dapan menyelesaikan skripsi ini.
3. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc., selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.
4. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si. M.Sc., selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan arahan sejak awal memasuki dunia perkuliahan.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman S.Si. M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Seluruh dosen, staff, karyawan Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Kedua orang tua penulis, Papa dan Mama yang selalu mendoakan disetiap waktu, memberi nasehat, membimbing, memotivasi, mendukung, serta menjadi semangat tersendiri bagi penulis dalam menjalani setiap proses meraih gelar sarjana.

8. Terima kasih untuk diri sendiri yang telah berjuang, berproses, dan bertahan hingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
9. Adik-adik penulis Carissa Rafa dan Neysha Fauziah, beserta keluarga besar yang selalu memberikan dukungan kepada penulis serta doa-doanya.
10. Sahabat baik penulis yaitu Lutfia Ayu, Aulia Ajie, Intan Candini, dan Ni kadek Dea yang selalu menemani di setiap momen berharga, memberikan motivasi, semangat, dan dukunan selama 4 tahun di perkuliahan.
11. Martha Magdalena, Asti Purwaningsih, Aulia Ajie, dan Lutfia Ayu selaku teman seperbimbingan yang telah menemani, menjadi tempat bertukar pikiran, serta memberi motivasi dan semangat kepada penulis.
12. Teman–teman Matematika angkatan 2020 khususnya kelas B yang telah membantu serta memberikan semangat kepada penulis yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, akan tetapi penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan informasi yang bermanfaat bagi yang membacanya.

Akhir kata, semoga skripsi ini dapat memberikan banyak manfaat bagi kita semua, serta penulis mengharapkan masukan dan saran untuk dijadikan pelajaran kedepannya.

Bandar Lampung, 26 Juni 2024
Penulis,

Salsabila Shafira Fitri

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf merupakan salah satu pokok bahasan dalam Matematika Diskrit yang telah lama dikenal dan memiliki sejumlah penerapan dalam berbagai persoalan di kehidupan sehari-hari. Konsep-konsep dari teori graf dapat digunakan untuk menganalisis dan merepresentasikan berbagai masalah kompleks menjadi terstruktur dan mudah dipahami. Dengan memodelkan suatu masalah dalam bentuk graf, yang terdiri dari kumpulan titik (*vertex*) yang dihubungkan oleh sisi (*edge*), solusi optimal dari masalah tersebut dapat dicari menggunakan metode dalam teori graf (Wilson, 2010).

Seiring dengan pekembangan zaman dan teknologi maka penelitian mengenai teori graf juga berkembang. Topik yang umum dibahas dalam teori graf meliputi pelabelan, pewarnaan, bilangan kromatik, dimensi metrik, dan dimensi partisi (Khairiah dkk., 2020). Dimensi metrik, dimensi partisi dan bilangan kromatik lokasi dari suatu graf merupakan tiga konsep dimensi dalam graf yang berkaitan (Baskoro, 2023).

Konsep dimensi metrik pada graf pertama kali diperkenalkan oleh Slater menyatakan bahwa himpunan lokasi pada W sebagai titik-titik di graf G sedemikian hingga untuk setiap titik di G diperoleh jarak yang berbeda terhadap setiap titik di W (Slater, 1975). Pada tahun berikutnya Harary dan Melter memakai istilah himpunan pembeda untuk sesuatu yang sama (Harary & Melter, 1976). Untuk memperoleh cara pandang baru terhadap permasalahan penentuan dimensi metrik graf, Chartrand memperkenalkan suatu konsep baru yang selanjutnya dikenal sebagai dimensi partisi graf yaitu nilai minimum k agar terdapat partisi pembeda dari $V(G)$ yang dinotasikan dengan $pd(G)$ (Chartrand dkk., 1998).

Penelitian mengenai dimensi partisi graf telah banyak berkembang, beberapa penelitian yang membahas dimensi partisi pada graf yaitu Asmiati telah menemukan dimensi partisi pada graf Amalgamasi bintang. Graf Amalgamasi bintang $S_{k,m}$ adalah graf yang diperoleh dari m buah graf bintang $K_{1,m}$ dengan menyatukan sebuah daun dari setiap graf bintang tersebut. Dimensi partisi amalgamasi bintang yaitu $pd(S_{k,m}) = m - 1$ untuk $2 \leq k \leq m - 2$ dan $m \geq 4$, $pd(S_{k,m}) = m + a$ untuk $(m + a - 1)^{2} - 1 < k \leq m^2 - 1$ dan $a \geq 1$ (Asmiati, 2012). Ramdhani berhasil mendapatkan dimensi partisi graf lengkap yaitu $pd(K_n) = n$ (Ramdhani, 2019) dan pada tahun yang sama Sanjaya dkk., mendapatkan dimensi partisi pada graf kubik yaitu $pd\left(C_{n,2n,n}\right) = 4$ untuk $n \geq 3$ (Sanjaya dkk., 2019). Pada tahun berikutnya, Daming dkk., (2020) berhasil mendapatkan dimensi partisi graf Amalgamasi Siklus yaitu $pd(Amal(C_n)_m) = 3$ untuk $n \geq 4$ dan $2 \leq m \leq 3$. Salah satu penelitian mengenai graf Lintang yaitu bilangan b-kromatik pada graf Origami adalah 4 untuk $n = 3$ dan $n = 4$, 5 untuk $n = 5$, dan 6 untuk $n \geq 6$, graf Lintang adalah 2 untuk $m \geq 2$, dan graf *Tadpole* adalah 3 untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 2$ (Kornelia dkk., 2019).

Masalah penentuan mengenai dimensi partisi pada graf lintang masih terbuka untuk dikaji karena sejauh penelusuran literatur pada penelitian belum ada teorema yang digunakan untuk menentukan dimensi partisi pada graf lintang. Sehingga pada penelitian ini penulis tertarik untuk membahas dimensi partisi pada graf lintang dan graf barbel lintang.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan dimensi partisi dari graf lintang $pd(L_n)$ dan dimensi partisi dari graf barbel lintang $pd\left(B_{L_n}\right)$.

1.3 Manfaat Penelitian

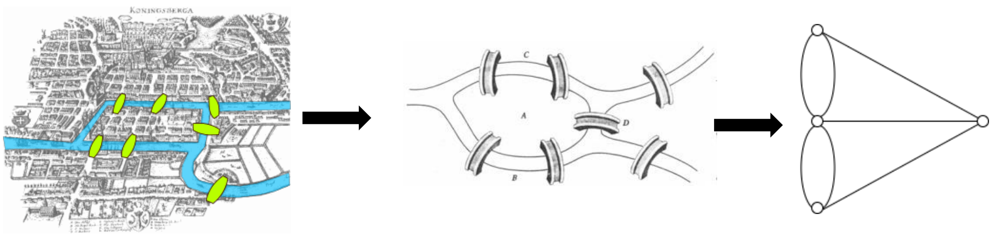
Adapun manfaat dari penelitian ini yaitu:

1. memberikan pemahaman dan wawasan mengenai dimensi partisi dari graf khususnya graf lintang dan graf barbel lintang.
2. sebagai referensi untuk penelitian lanjutan mengenai dimensi partisi dari suatu graf.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Definisi dan Istilah-Istilah Graf

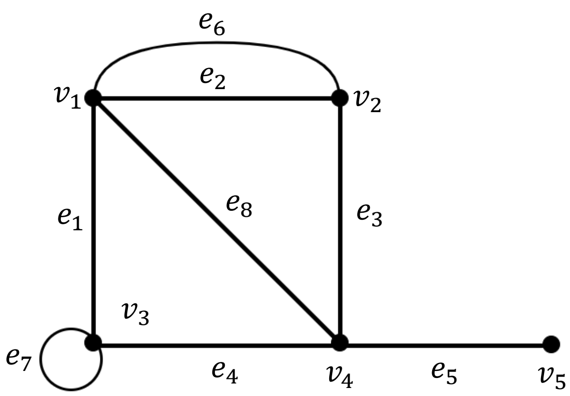
Konsep teori graf diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736, saat menyelesaikan permasalahan jembatan Konisberg, Kliningrad, Rusia. Di kota tersebut terdapat sungai Pregal yang membelah kota menjadi empat daratan terpisah dan hanya dihubungkan dengan tujuh jembatan. Permasalahannya yaitu warga kota tersebut ingin melewati jembatan tepat satu kali serta kembali lagi ke tempat awal. Dalam membuktikan kemungkinan tersebut maka masalah ini disajikan dalam bentuk gambar yang kemudian dikenal sebagai representasi graf, di mana titik menyatakan suatu wilayah yang kemudian dikenal sebagai masalah jembatan Konigsberg dan sisi menyatakan jembatan yang menghubungkan dua wilayah dengan menggunakan representasi graf, Euler membuktikan tidak mungkin melintasi setiap jembatan tepat satu kali dan kembali ke posisi semula (Suryadi, 1996).



Gambar 2.1. Representasi graf untuk masalah jembatan Konigsberg
(sumber: https://id.wikipedia.org/wiki/Berkas:Konigsberg_bridges.png)

Istilah-istilah dan definisi dasar teori graf yang digunakan pada penelitian ini merujuk dari (Deo, 1989). Suatu Graf G didefinisikan sebagai himpunan terurut $(V(G),\ E(G))$, dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ menyatakan himpunan titik dari G

dan $V(G)$ himpunan tak kosong, serta $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ menyatakan himpunan sisi yaitu pasangan tak terurut dari $V(G)$. Banyaknya himpunan titik $V(G)$ disebut orde dari graf G. Misalkan $v, w \in V(G)$ dengan sisi $e = vw$, maka v dan w dikatakan bertetangga (*adjacent*), sedangkan titik v dan w dikatakan menempel (*incident*) dengan sisi e, demikian juga sisi e dikatakan menempel dengan titik v dan w. Himpunan tetangga (*neigborhood*) dari suatu titik v, dinotasikan dengan $N(v)$ adalah himpunan titik-titik yang bertetangga dengan v.



Gambar 2.2. Contoh graf dengan 5 titik dan 8 sisi

Pada Gambar 2.2 graf (V, E) dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$. Titik v_2 bertetangga dengan $v_1$dan v_4, sedangkan v_2 dan v_4 menempel pada e_3, sebaliknya sisi e_3 menempel pada v_2 dan v_4. $N(v_2) = \{v_1, v_4\}$.

Derajat (*degree*) adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik v, dinotasikan dengan $d(v)$. Daun (*pendant vertex*) adalah titik yang berderajat 1, sedangkan sisi yang menempel dengan titik pendan disebut sisi pendan. Pada Gambar 2.2 $d(v_5) = 1$, v_5 adalah daun karena berderajat satu, $d(v_1) = 4$, $d(v_2) = 3$, $d(v_3) = 4$, $d(v_4) = 4$.

Loop adalah sisi yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sisi paralel adalah dua sisi atau lebih yang memiliki dua titik ujung yang sama. Graf yang tidak mempunyai sisi ganda dan atau *loop* disebut graf sederhana. Pada Gambar 2.2, terdapat *loop* pada titik v_3 yaitu e_7. Sedangkan e_2, dan e_6 disebut sisi paralel.

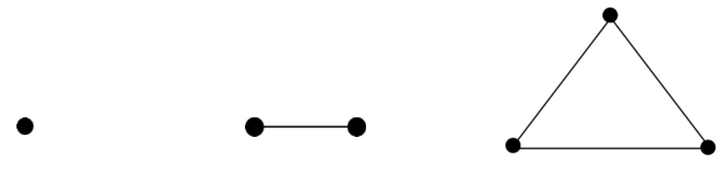
Jarak di antara x dan y pada graf terhubung G adalah panjang lintasan terpendek di antara kedua titik tersebut, dinotasikan dengan $d(x, y)$. Istilah lain yang sering muncul pada pembahasan graf adalah jalan (*walk*), lintasan (*path*), sirkuit (*circuit*). Jalan (*walk*) adalah barisan berhingga dari titik dan sisi dimulai dan diakhiri dengan titik sedemikian sehingga setiap sisi menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya. Contoh Jalan dari v_5 ke v_4 berdasarkan Gambar 2.2 adalah $v_5 - e_5 - v_4 - e_3 - v_2 - e_2 - v_1 - e_1 - v_3 - e_4 - v_4$.

Lintasan (*path*) adalah jalan yang melewati titik yang berbeda-beda pada suatu graf di mana titik-titik yang dilewati tepat satu kali. Contoh lintasan berdasarkan Gambar 2.2 dari $v_3 - e_1 - v_1 - e_2 - v_2 - e_3 - v_4 - e_5 - v_5$.

Sirkuit (*circuit*) adalah lintasan tertutup, yaitu lintasan yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sirkuit dibedakan menjadi dua macam, yaitu sirkuit genap dan sirkuit ganjil. Sirkuit genap adalah sirkuit dengan banyaknya titik genap, dan sirkuit ganjil adalah sirkuit dengan banyaknya titik ganjil. Contoh sirkuit berdasarkan Gambar 2.2 adalah $v_1 - e_8 - v_4 - e_4 - v_3 - e_1 - v_1$.

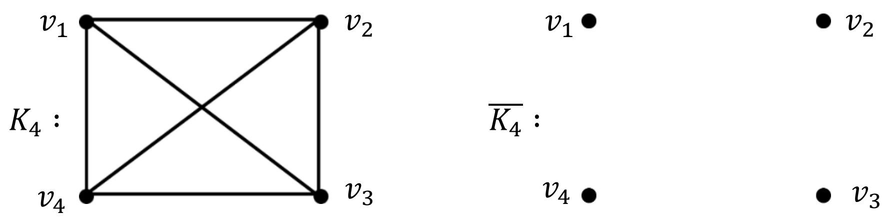
a. Graf Lengkap, Komplemen Graf, Operasi Penjumlahan Dua Graf dan Graf Lintang

Suatu graf sederhana yang setiap titiknya bertetangga (*adjacent*) disebut graf Lengkap. Graf Lengkap dengan n titik dinotasikan dengan K_n (Fletcher dkk., 1991).

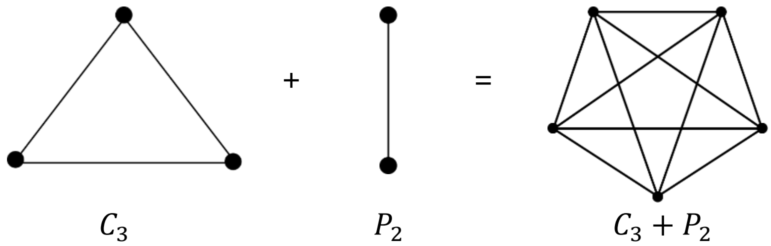


Gambar 2.3. Contoh graf lengkap

Komplemen graf sederhana G yang dinotasikan dengan $\bar{G}$, adalah graf dengan $V(\bar{G}) = V(G)$ dan uv merupakan sisi dari $\bar{G}$ jika dan hanya jika sisi tersebut bukan sisi dari G (Chartrand and Oellermann, 1993). Operasi penjumlahan pada graf $G = G_1 + G_2$ menghasilkan graf G dengan $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$ (Asmiati, 2023).

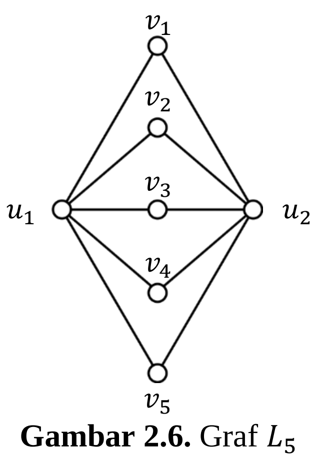


Gambar 2.4. Contoh graf dan komplemennya



Gambar 2.5. Contoh operasi penjumlahan dua graf

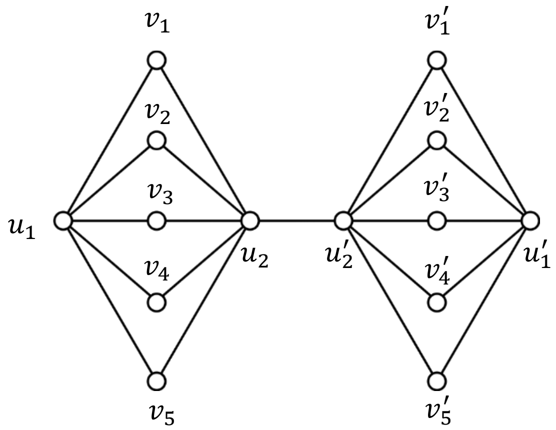
Graf lintang terbentuk dari 2 titik kutub dan n titik lintang. Graf lintang dengan n titik dinotasikan dengan L_n, didefinisikan sebagai $L_n = \overline{K_2} + \overline{K_n}$, untuk $n \geq 1$. Graf lintang memiliki himpunan titik $V(L_n) = \{u_1, u_2, v_i; i = 1, 2, \dots, n\}$, sementara himpunan sisi $E(L_n) = \{u_1 v_i; i = 1,2, \dots, n\} \cup \{u_2 v_i; i = 1,2, \dots, n\}$ (Kornelia dkk., 2019).



Gambar 2.6. Graf L_5

b. Graf Barbel Lintang

Graf barbel adalah graf sederhana yang dibentuk dengan menghubungkan dua graf tiruan (identik) dengan sebuah sisi sebagai jembatan (Ihwan & Rahmawati, 2014). Graf barbel lintang merupakan graf yang terbentuk dengan menghubungkan dua graf lintang L_n oleh sebuah sisi u_2, u_2' sebagai jembatan seperti contoh pada Gambar 2.7. Graf barbel lintang dinotasikan dengan B_{L_n}.



Gambar 2.7. Graf B_{L_5}

2.2 Dimensi Partisi Graf

Sebelum mendefinisikan apa itu dimensi partisi, terlebih dahulu akan diberikan definisi dari dimensi dan partisi secara umum yaitu, dimensi didefinisikan sebagai jumlah minimal koordinat yang dibutuhkan untuk menentukan titik-titik yang ada dalam suatu ruang atau objek, sedangkan partisi didefinisikan sebagai pengelompokkan anggota himpunan di mana setiap kelompok memiliki anggota yang berbeda dan setiap anggota masuk dalam satu kelompok tertentu. Dimensi Partisi yaitu minimum panjang lintasan terpendek antara titik pada suatu graf terhadap k-partisi, adapun panjang lintasan yaitu banyaknya sisi yang dilewati antara titik pada suatu graf terhadap k-partisi (Chartrand dkk., 2000), selanjutnya diberikan definisi dimensi partisi pada suatu graf, teorema-teorema dan beberapa contoh graf yang sudah diperoleh dimensi partisinya.

Misalkan $G = (V, E)$ suatu graf, dengan $v \in V(G)$ dan $S \subset V(G)$. Jarak dari titik v ke himpunan S, dinotasikan dengan $d(v, S)$ adalah min $\{d(v, x), x \in S\}$ dengan $d(v, x)$ adalah jarak dari titik v ke x. Misalkan terdapat sebuah graf terhubung G dan k buah partisi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_k\}$ adalah k-pasang terurut dari $V(G)$ dengan $S_1, S_2, \dots, S_k$ adalah partisi-partisi, representasi v terhadap Π, dinotasikan sebagai $r(v|\Pi) = \big(d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k)\big)$. Partisi Π dikatakan partisi pembeda dari $V(G)$ jika $r(v|\Pi) \neq r(u|\Pi)$ untuk setiap dua titik berbeda $u, v \in V(G)$. Dimensi partisi dari G atau dapat dinotasikan dengan $pd(G)$ adalah nilai minimum k agar terdapat partisi pembeda dari $V(G)$ (Chartrand dkk., 1998).

Lemma 2.4.1. (Asmiati, 2023) Diberikan graf terhubung G dengan partisi pembeda Π dari $V(G)$. Jika $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka u dan v termasuk pada kelas-kelas yang berbeda dari Π.

Bukti:

Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ adalah himpunan terurut k-partisi dari $V(G)$ dengan k adalah bilangan asli yang dibatasi oleh jumlah titik di G dan misalkan u, v adalah elemen-elemen yang terdapat pada kelas Π yang sama. Jika diketahui $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka akan ditunjukkan Π bukan suatu partisi pembeda dari $V(G)$.

Langkah pertama perhatikan bahwa $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ dengan u dan v termasuk pada kelas Π yang sama, misalkan S_i. Jadi, dapat diperoleh bahwa $d(u, S_i) = d(v, S_i) = 0$ karena jarak dari suatu titik terhadap dirinya sendiri adalah nol. Telah diketahui bahwa $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, hal ini mengakibatkan $d\big(u, S_j\big) = d\big(v, S_j\big)$ untuk setiap j dengan $1 \leq i \neq j \leq k$. Dengan demikian, diperoleh $r(u|\Pi) = r(v|\Pi)$ untuk setiap titik di G. Karena terdapat representasi yang sama untuk setiap titik di G maka diperoleh bahwa Π bukan partisi pembeda dari $V(G)$. $\blacksquare$

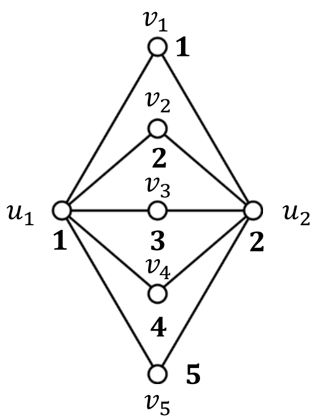
Selanjutnya dibahas mengenai partisi pembeda pada graf lintang. Misalkan sebarang graf lintang, L_n yang berorde n akan diperoleh beberapa bentuk partisi pembeda. Sekarang perhatikan suatu graf lintang $G = L_n$ dengan $V_1 = \{u_1, u_2\}$ merupakan titik kutub dan $V_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ merupakan titik lintang, dan misalkan $v_i, v_j \in V(L_n)$ sebarang. Karena titik lintang adalah titik yang lain kecuali 2 titik kutub, maka 2 titik kutub tersebut harus berada pada kelas partisi yang berbeda dan titik pada graf lintang mempunyai jarak yang sama ke semua titik yang lain, maka setiap titik lintang juga harus berada di kelas partisi yang berbeda sehingga diperoleh bahwa $d(v_i, w) = d(v_j, w)$ dengan $i \neq j$ untuk setiap titik $w \in V(L_n) - \{v_i, v_j\}$.

Untuk membentuk partisi pembeda Π dari $V(L_n)$, setiap titik lintang harus berada pada Π kelas partisi yang berbeda, dengan demikian $V(L_n)$ harus dipartisi sebanyak n-partisi, yaitu $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$. Jadi, jika ada sebanyak n titik lintang maka akan ada sebanyak n kelas partisi.

Contoh 2.1:

Berikut ini diberikan contoh graf lintang L_5 dan akan ditentukkan dimensi partisi dari graf tersebut.

Terlebih dahulu akan ditentukkan batas bawah dimensi partisi graf lintang L_5. Graf lintang L_5 mempunyai lima titik yang berjarak sama ke titik-titik yang lain, maka berdasarkan Lemma 2.4.1, diperoleh $pd(L_5) \geq 5$. Selanjutnya, pada Gambar 2.8 diberikan partisi pada setiap titik untuk mengetahui dimensi partisi graf Lintang L_5.



Gambar 2.8 Contoh partisi pembeda dari graf L_5

Misalkan Π adalah partisi pembeda dengan menggunakan lima kelas partisi, $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ dengan $S_1 = \{u_1,\ v_1\}, S_2 = \{u_2, v_2\}$, $S_3 = \{v_3\}$, $S_4 = \{v_4\}$ dan $S_5 = \{v_5\}$. Sehingga diperoleh representasi setiap titik pada graf L_5 terhadap Π adalah sebagai berikut:

$r(u_1|\Pi) = (0,1,1,1,1)$ $\qquad$ $r(v_1|\Pi) = (0,1,2,2,2)$

$r(u_2|\Pi) = (1,0,1,1,1)$ $\qquad$ $r(v_2|\Pi) = (1,0,2,2,2)$

$r(v_3|\Pi) = (1,1,0,2,2)$

$r(v_4|\Pi) = (1,1,2,0,2)$

$r(v_5|\Pi) = (1,1,2,2,0)$

Karena setiap titik pada graf L_5 memiliki representasi yang berbeda terhadap Π, maka Π adalah partisi pembeda dari graf L_5 dan diperoleh batas atas $pd(L_5) \leq 5$. Akibatnya, $pd(L_5\ ) = 5$.

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun ajaran 2023/2024 bertempat di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Langkah-Langkah Penelitian

Dalam penelitian ini, langkah-langkah yang digunakan untuk menentukan dimensi partisi pada graf lintang dan barbelnya adalah sebagai berikut:

1. Menentukan dimensi partisi graf lintang L_n.
    a. Mengonstruksi graf lintang L_n.
    b. Menentukan batas bawah dari dimensi partisi dari graf lintang $pd(L_n)$.
    c. Menentukan batas atas dari $pd(L_n)$. Batas atas dari $pd(L_n)$ diperoleh dengan mengonstruksi graf lintang. Himpunan titik-titik pada graf lintang dikelompokkan ke dalam kelas partisi pembeda. Minimum banyaknya partisi pembeda itulah yang merupakan dimensi partisi dari graf lintang.
    d. Jika batas bawah dimensi partisi graf lintang $pd(L_n) \geq x$ dan batas atas dimensi partisi graf lintang $pd(L_n) \leq x$, maka akan diperoleh dimensi partisi graf lintang adalah $pd(L_n) = x$.
    e. Menyimpulkan hasil-hasil yang diperoleh dalam suatu pernyataan matematika.
    f. Membuktikan hasil yang diperoleh pada langkah e.

2. Menentukan dimensi partisi graf barbel lintang
   a. Mengonstruksi graf barbel lintang B_{L_n}.
   b. Menentukan batas bawah dari $pd(B_{L_n})$. Karena graf B_{L_n} memuat dua graf lintang, maka $pd(B_{L_n}) \geq pd(L_n)$. Akan tetapi, jika batas bawah ini belum memenuhi syarat dimensi partisi, maka dilakukan penambahan kelas partisi secara bertahap sedemikian sehingga syarat dimensi partisi terpenuhi.
   c. Menentukan batas atas dari $pd(B_{L_n})$. Batas atas dari $pd(B_{L_n})$ diperoleh dengan mengonstruksi graf barbel lintang. Himpunan titik-titik pada graf lintang dikelompokkan ke dalam kelas partisi pembeda. Minimum banyaknya partisi pembeda itulah yang merupakan dimensi partisi dari graf barbel lintang.
   d. Jika batas bawah dimensi partisi graf barbel lintang $pd(B_{L_n}) \geq x$ dan batas atas dimensi partisi graf barbel lintang $pd(B_{L_n}) \leq x$, maka akan diperoleh dimensi partisi graf barbel lintang adalah $pd(B_{L_n}) = x$.
   e. Menyimpulkan hasil-hasil yang diperoleh dalam suatu pernyataan matematika.
   f. Membuktikan hasil yang diperoleh pada langkah e.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Pada penelitian ini diperoleh dimensi partisi graf lintang, $pd(L_n)$ adalah n untuk $n \geq 3$. Dimensi partisi dari graf barbel lintang, $pd(B_{L_n})$ adalah $n + 1$ untuk $n \geq 3$.

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan menentukan dimensi partisi graf lintang pada operasi graf lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Asmiati. (2012). Partition Dimension of Amalgamation of Stars. *Bulletin of Mathematics, 4*(2): 161-167.

Asmiati. (2023). *Graf Edisi 2: Aplikasinya pada Lintasan Terpendek*. Matematika, Yogyakarta. 158 hlm.

Baskoro, E. T. (2023). *Dimensi dalam graf*. ITB Press. 71 hlm.

Chartrand, G. & O. R. Oellermann. (1993). *Applied and Algorithmic graph Theory*. McGraw-Hill Inc, New York. 395 hlm.

Chartrand, G., Salehi, E., & Zhang, P. (1998). On The Partition Dimension of a Graph. *Congressus Numerantium, 130*: 157-160.

Chartrand, G., Salehi, E., & Zhang, P. (2000). The Partition Dimension of a Graph. *Aequationes Math, 59*: 45-54.

Daming, A. S., Hasmawati, H., Haryanto, L., & Nurwahyu, B. (2020). Dimensi Partisi Graf Hasil Amalgamasi Siklus. *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi, 16*(2): 199-207.

Deo, N. (1989). *Graph Theory with Application to Engineering and Computer Science.* Prentince Hall of India Private Limited, New Delhi. 496 hlm.

Fletcher, P., H. Hoyle & C. W. Patty (1991). *Foundation of Discrete Mathematics.* PWS Kent Publishing Company, Boston. 781 hlm.

Harary, F., & Melter, R. (1976). On the Metric Dimension of a Graph. *Ars Combin, 2*: 191-195.

Ihwan, M. D., & Rahmawati (2014). Kajian bilangan Clique Grad Gear G_n dan Barbel B_n. *Gamatika, 5*(1): 39-50.

Khairiah, A., Noviani, E., & Fran, F. (2020). Dimensi Partisi pada Graf. *Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster), 9*(1): 189-194.

Kornelia, P., Noviani, E., & Fran, F. (2019). Bilangan B-Kromatik pada Graf Origami, Graf Lintang, dan Graf Tadpole. *Buletin Ilmiah Mat, Stat, dan Terapannya (Bimaster), 8*(4): 861-868.

Ramdhani, V. (2019). Dimensi Partisi Graf Lengkap. *Saintek: Jurnal Sains dan Teknologi, 11*(2): 65-69.

Sanjaya, I., Narwen, N., & Rudianto, B. (2019). Dimensi Partisi dari Graf Kubik $C_{c,2n,n}$. *Jurnal Matematika UNAND, 7*(3): 90-93.

Slater, P. (1975). Leaves of Trees. *Congressus Numerantium, 14*: 549-559.

Suryadi, H. S. (1996). *Teori Graf Dasar*. Universitas Gunadarma, Jakarta. 147 hlm.

Wilson, R. J. (2010). *Pengantar Teori Graf.* Penerbit Erlangga, Jakarta. 192 hlm.