# PERBANDINGAN METODE *NEWTON*, METODE *BROYDEN* DAN METODE *QUADRATURE GAUSS* DALAM MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN NONLINEAR MENGGUNAKAN PROGRAM MATHEMATICA

**(Skripsi)**

**Oleh**

**Jihad Yudatama**
**2017031083**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS LAMPUNG**
**BANDAR LAMPUNG**
**2024**

**COMPARISON OF NEWTON'S METHOD, BROYDEN'S METHOD AND QUADRATURE GAUSS METHOD IN SOLVING A SYSTEM OF NONLINEAR EQUATIONS USING THE MATHEMATICA PROGRAM**


**ABSTRACT**



**By**

**Jihad Yudatama**



A system of nonlinear equations is a collection of nonlinear equations. Newton's method, Broyden's method, and Quadrature Gauss method are methods used to solve systems of nonlinear equations. These three methods are numerical methods used to estimate solutions to systems of equations when exact solutions cannot be found through algebra. This method is executed successively so that it approaches the exact solution of the system of equations. When compared using the four selected systems of equations, the Quadrature Gauss method has the highest level of accuracy and has the fewest number of iterations. Meanwhile, the Broyden method has the lowest completion time and the Newton method is at the second level in the three categories, namely accuracy level, number of iterations and running-time.



Keywords: *newton, broyden, gauss, numeric*

**PERBANDINGAN METODE *NEWTON*, METODE *BROYDEN* DAN METODE *QUADRATURE GAUSS* DALAM MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN NONLINEAR MENGGUNAKAN PROGRAM MATHEMATICA**


## ABSTRAK

**Oleh**

**Jihad Yudatama**

Sistem persamaan nonlinear adalah kumpulan dari persamaan-persamaan nonlinear. Metode *Newton*, metode *Broyden,* dan metode *Quadrature Gauss* adalah metode yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinear. Ketiga metode tersebut adalah metode numerik yang digunakan untuk memperkirakan solusi dari sistem persamaan ketika solusi eksak tidak dapaat ditemukan melewati aljabar. Metode ini dieksekusi berturut-turut sehingga mendekati solusi eksak dari sistem persamaan. Ketika dibandingkan dengan menggunakan empat sistem persamaan yang dipilih, metode *Quadrature Gauss* memiliki tingkat keakuratan yang paling tinggi dan memiliki jumlah iterasi yang paling sedikit. Sedangkan metode *Broyden* memiliki waktu penyelesaian yang paling sedikit dan metode *Newton* berada di tingkatan kedua terhadap ketiga kategori yaitu tingkat keakuratan, jumlah iterasi dan waktu penyelesaian.



Kata Kunci: *newton, broyden, gauss, numerik.*

**PERBANDINGAN METODE *NEWTON*, METODE *BROYDEN* DAN METODE *QUADRATURE GAUSS* DALAM MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN NONLINEAR MENGGUNAKAN PROGRAM MATHEMATICA**

**Oleh**

**Jihad Yudatama**

**2017031083**

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS LAMPUNG**
**BANDAR LAMPUNG**
**2024**

Judul Skripsi : **PERBANDINGAN METODE *NEWTON*, METODE *BROYDEN* DAN METODE *QUADRATURE GAUSS* DALAM MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN NONLINEAR MENGGUNAKAN PROGRAM MATHEMATICA**

Nama Mahasiswa : ***Jihad Yudatama***

Nomor Pokok Mahasiswa : **2017031083**

Jurusan : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

**MENYETUJUI**

1. Komisi Pembimbing

| | |
|---|---|
| **Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc.** | **Dra. Dorrah Aziz M.Si.** |
| NIP. 19690213 199402 1 001 | NIP. 19610128 198811 2 001 |

2. Ketua Jurusan Matematika

**Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.**
NIP. 19740316 200501 1 001

**MENGESAHKAN**

1. Tim Penguji

Ketua : **Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc.** ...............

Sekretaris : **Dra. Dorrah Aziz M.Si.** ...............

Penguji
Bukan Pembimbing : **Agus Sutrisno S.Si. M.Si.** ...............

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

**Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.**
NIP. 19711001 200501 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **27 Mei 2024**

## PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

| | |
|---|---|
| Nama | : **Jihad Yudatama** |
| Nomor Pokok Mahasiswa | : **2017031083** |
| Jurusan | : **Matematika** |
| Judul Skripsi | : **Perbandingan Metode Newton, Metode Broyden dan Metode Quadrature Gauss Dalam Menyelesaikan Sistem Persamaan Nonlinear Menggunakan Program Mathematica** |

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila di kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 6 Juni 2024
Penulis,

**Jihad Yudatama**
**NPM. 2017031083**

## RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Jihad Yudatama, lahir di Manna Kabupaten Bengkulu Selatan pada tanggal 10 April 2002. Penulis merupakan anak kedua dari tiga bersaudara dari pasangan suami istri Bapak Vengko Yudatama Fajar dan Ibu Siti Mariyah.

Penulis menempuh pendidikan di TK Qurrota Ayun Manna pada tahun 2007-2008, sekolah dasar di MIN Pematang Bangau pada tahun 2008-2014, sekolah menengah pertama di SMP IT Permata Bunda pada tahun 2014-2017, dan sekolah menengah atas di SMAN 15 Bandar Lampung pada tahun 2017-2020.

Pada tahun 2020, penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa jurusan S1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN).

Pada bulan Januari – Februari 2023, penulis melakukan Kerja Praktik (KP) di PT Perkebunan Nusantara VII. Kemudian pada bulan Juni – Agustus 2023, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kampung Balai Rejo, Kecamatan Kalirejo, Kabupaten Lampung Tengah.

**KATA INSPIRASI**

*“Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya.”*
*(Q.S. Al-Baqarah ayat 286)*

*“Maka sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan, sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan”*
*(Q.S. Al-Insyirah ayat 5-6)*

*“Bila kau tak sanggup menahan lelahnya belajar, maka kau harus sanggup menahan perihnya kebodohan”*
(Imam Syafi’i)

## PERSEMBAHAN

Alhamdulillah, segala puji syukur kehadirat Allah Subhanahu wa ta'ala atas limpahan rahmat, taufik, hidayah dan inayah-Nya kepada penulis beserta keluarga dan saudara lainnya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini tepat pada waktunya. Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

1. Pertama untuk diri sendiri, terima kasih karena mau berjuang dan bertahan sampai saat ini sampai mampu berada dititik ini.
2. Untuk (Alm) Bapak Vengko selaku orang tua saya yang sudah meninggal ketika saya masih menempuh Pendidikan SD kelas IV. Semoga beliau bangga dengan perjuangan anaknya.
3. Pintu surgaku, ibunda tercinta Siti Mariyah. Rasa terima kasih dan penghargaan sebesar-besarnya penulis berikan kepada beliau atas segala bentuk bantuan, semangat, dan doa yang diberikan selama ini. Terima kasih atas pengorbanan, kerja keras dan waktu yang telah diberikan. Semoga Allah SWT membalas segala kebaikan dan memudahkan jalan menuju kebahagiaan dunia dan akhirat.
4. Kakak adikku tersayang, Claudia Yudatama dan Luna Maryam Yudatama. Terima kasih atas segala bentuk bantuan, semangat dan doa yang diberikan selama ini. Semoga kita bertiga menjadi anak-anak yang dapat membanggakan orang tua, negara dan Tuhan.

## SANWACANA

Puji syukur penulis ucapkan kehadirat Allah Subhanahu wa ta'ala yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Perbandingan metode *Newton*, metode *Broyden* dan metode *Quadrature Gauss* dalam menyelesaikan sistem persamaan nonlinear menggunakan program Mathematica".

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak terlepas dari bimbingan, dukungan, bantuan dan doa dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan ketulusan hati penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc. selaku Dosen Pembimbing I yang senantiasa selalu membimbing dan meberikan arahan, kritik, dan saran serta dukungan kepada penulis selama proses perkuliahan dan pembuatan skripsi ini.
2. Ibu Dra. Dorrah Aziz M.Si. selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan serta saran yang membantu kepada penulis dalam proses penyelesaian skripsi ini.
3. Bapak Agus Sutrisno S.Si. M.Si. selaku Dosen Pembahas atas ketersediaannya untuk membahas serta memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis dalam penyelesaian skripsi ini.
4. Bapak Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing penulis selama mengikuti perkuliahan.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Dr. Ahmad Faisol , S.Si., M.Sc. selaku Sekretaris Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Bapak Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengatahuan Alam Universitas Lampung.
8. Seluruh dosen, staff, dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam Universitas Lampun
9. Keluarga tercinta bapak, ibu, kakak-adik dan keluarga besar yang selalu memotivasi, memberikan dukungan dan doa kepada penulis.
10. Teman-teman satu perjuangan dan satu bimbingan Nada, Regina, Demi, dan Rizka yang telah memberikan semangat, motivasi maupun saran kepada penulis.
11. Teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2020 yang sudah banyak membantu selama masa perkuliahan.
12. Terakhir, terima kasih untuk diri sendiri, karena telah mampu berusaha keras dan berjuang sejauh ini. Mampu mengendalikan diri dari berbagai tekanan diluar keadaan dan tak pernah memutuskan menyerah sesulit apapun proses penyusunan skripsi ini dengan menyelesaikan sebaik dan semaksimal mungkin, ini merupakan pencapaian yang patut dibanggakan untuk diri sendiri.

Akhirnya, sungguh penulis sangat menyadari bahwa skripsi ini masih sangat jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, kepada semua pihak utamanya para pembaca yang budiman, penulis senantiasa mengharapkan saran dan kritikannya demi kesempurnaan skripsi ini.

Mudah-mudahan skripsi yang sederhana ini dapat bermanfaat bagi semua pihak utamanya kepada Almamater tercinta Kampus Hijau Universitas Lampung.

Bandar Lampung, 6 Juni 2024
Penulis,

**Jihad Yudatama**
**NPM. 2017031083**

## DAFTAR ISI

Halaman

## DAFTAR GAMBAR

Halaman

## DAFTAR TABEL

# I. PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang dan Masalah

Terdapat banyak cara untuk menyelesaikan persamaan-persamaan dengan menggunakan berbagai macam metode aljabar. Metode subtitusi dan eliminasi merupakan dua metode aljabar yang sering digunakan. Metode aljabar lain yang dapat digunakan antara lain rumus kuadrat dan faktorisasi. Akan tetapi, ketika metode-metode tersebut tidak berhasil dieksekusi, dapat digunakan konsep metode numerik.

Metode numerik merupakan teknik penyelesaian permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan menggunakan operasi hitungan (aritmatik) yaitu operasi tambah, kurang, kali, dan bagi. Metode numerik digunakan untuk memperkirakan solusi dari persamaan ketika solusi eksak tidak dapat ditemukan melewati metode aljabar. Metode ini dieksekusi berturut-turut sehingga mendekati solusi eksak dari suatu persamaan atau sistem persamaan (Rosidi, 2019).

Sistem persamaan nonlinear merupakan kumpulan dari persamaan nonlinear dengan fungsi tujuannya saja atau bersama dengan fungsi kendala berbentuk nonlinear, yaitu pangkat dari variabelnya lebih dari satu. Ada beberapa fungsi tujuan dalam persamaan nonlinear yang tidak bisa diselesaikan dengan metode aljabar, tetapi dapat diselesaikan dengan metode-metode numerik.

Dalam metode numerik, dipelajari bagaimana caranya dalam menyelesaikan persamaan nonlinear yang hanya melibatkan satu persamaan saja. Dalam permasalahan ini, dapat digunakan metode-metode seperti metode *Newton*, metode

Secant, metode Biseksi dan lain-lain. Akan tetapi, metode-metode tersebut hanya fokus menyelesaikan persamaan nonlinear yang hanya melibatkan satu persamaan dan tidak bisa digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinear.

Dalam penelitian ini, difokuskan dalam meneliti metode-metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinear. Untuk masing-masing metode yang diteliti, akan ada penjelasan dalam prosedur numerik. Kemudian akan dibandingkan di antara metode-metode tersebut dalam total *running-time*, jumlah iterasi dan tingkat keakuratan dengan bantuan program Mathematica. Metode-metode numerik yang akan diteliti adalah metode *Newton*, metode *Broyden*, dan metode *Quadrature Gauss*.

Metode *Newton* adalah sebuah algoritma untuk mencari akar-akar dari fungsi yang dapat didiferensiasi, yang menggunakan linearisasi lokal berulang dari suatu fungsi untuk memperkirakan akar-akarnya (Courtney, 2013).

Metode *Broyden* berasal dari metode *Newton* dalam mencari akar-akar. Metode *Newton* dalam menyelesaikan sistem persamaan nonlinear menggunakan matriks Jacobian dalam setiap pengulangan. Akan tetapi, dalam mengkomputasi matriks ini cukup sulit. Sehingga dalam metode *Broyden*, dikomputasi seluruh matriks tersebut dalam satu pengulangan dan dilakukan pembaruan dalam pengulangan yang lain (Courtney, 2013).

Metode *Quadrature Gauss* adalah sebuah tiga langkah baru dari metode *Newton* yang berdasarkan syarat dari *Quadrature Gauss* yang memiliki enam orde konvergensi. Metode ini menyelesaikan sistem persamaan nonlinear dengan iterasi yang sedikit dan tingkat akurasi yang tinggi (Srivastava, dkk., 2021).

## 1.2 Tujuan Penelitian

Berdasarkan subbab latar belakang, penelitian ini bertujuan untuk mengetahui perbandingan antara metode *Newton*, metode *Broyden* dan metode *Quadrature*

*Gauss* dalam menyelesaikan sistem persamaan nonlinear dengan melihat jumlah iterasi dan tingkat akurasi dengan bantuan program Mathematica.

## 1.3 Manfaat Penelitian

1. Dapat memberikan sumbangan pemikiran untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinear dengan menggunakan metode-metode numerik.
2. Meningkatkan kemampuan penggunaan konsep sistem persamaan nonlinear dengan metode-metode numerik dalam program Mathematica.
3. Mengetahui jumlah iterasi dan tingkat ketepatan metode-metode numerik dalam menyelesaikan sistem persamaan nonlinear.
4. Mengetahui kelebihan dan kekurangan dari masing-masing metode numerik dalam menyelesaikan sistem persamaan nonlinear.

# II. TINJAUAN PUSTAKA

## 2.1 Persamaan

Persamaan adalah suatu pernyataan matematika dalam bentuk simbol yang menyatakan bahwa dua hal adalah persis sama. Persamaan ditulis dengan tanda sama dengan (=). Persamaan dapat digunakan untuk menyatakan kesamaan dua ekspresi yang terdiri dari satu atau lebih peubah. Sebagai contoh, untuk x anggota bilangan nyata, persamaan berikut selalu benar:

$$x(x-1) = x^2 - x \tag{2.1}$$

Persamaan (2.1) adalah contoh dari identitas: persamaan yang selalu benar, tak peduli berapapun nilai peubah yang ada di dalamnya. Persamaan berikut bukanlah suatu identitas:

$$x^2 - x = 0 \tag{2.2}$$

Persamaan (2.2) adalah salah untuk jumlah tak hingga x, dan hanya benar untuk satu nilai. Karenanya, jika suatu persamaan diketahui bernilai benar, persamaan tersebut membawa informasi mengenai nilai x. Secara umum, nilai peubah di mana suatu persamaan menjadi benar disebut dengan solusi atau penyelesaian. Banyak pengarang yang menggunakan istilah persamaan untuk kesamaan yang bukan identitas. Sebagai contoh,

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \tag{2.3}$$

adalah identitas, sedangkan

$$(x+1)^2 = 2x^2 + x + 1 \tag{2.4}$$

adalah persamaan yang memiliki akar x = 0 dan x = 1. Apakah suatu pernyataan dimaksudkan sebagai suatu identitas atau suatu persamaan, menentukan informasi mengenai peubahnya sering dapat ditentukan berdasarkan konteksnya.

Huruf-huruf awal alfabet seperti a, b, c, … sering kali digunakan sebagai konstanta, dan huruf-huruf di akhir alfabet, seperti x, y, z, umumnya digunakan sebagai lambang peubah (Sinaga, 2013).

## 2.2 Persamaan Linear

Persamaan linear adalah suatu persamaan dimana variabel yang terlibat berderajat paling tinggi satu (Azizah dan Ariyanti, 2020).

Suatu persamaan linear dalam n peubah adalah persamaan dengan bentuk $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, dimana $a_1, a_2, \dots, a_n$ dan $b$ adalah bilangan-bilangan real dan $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah peubah (Leon, 2001).

## 2.3 Persamaan Nonlinear

Persamaan nonlinear dapat diartikan sebagai persamaan yang tidak mengandung syarat seperti persamaan linear, sehingga persamaan nonlinear dapat merupakan:

a. Persamaan yang memiliki pangkat selain satu

b. Persamaan yang mempunyai dua variabel

Dalam penyelesaian persamaan nonlinear diperlukan akar-akar persamaan nonlinear, dimana akar sebuah persamaan nonlinear f(x) = 0 merupakan x yang menyebabkan nilai f(x) sama dengan nol. Hal ini dapat disimpulkan bahwa akar-

akar penyelesaian persamaan nonlinear merupakan titik potong antara kurva f(x) dengan sumbu x (Rosidi, 2019).

## 2.4 Sistem Persamaan Nonlinear

Di kehidupan sehari-hari, umumnya model matematika muncul dalam bentuk sistem persamaan. Persamaan yang diselesaikan tidak hanya satu, tetapi dapat lebih dari satu, sehingga membentuk sebuah sistem yang disebut sistem persamaan non linear. Bentuk umum sistem persamaan non linear dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Penyelesaian sistem ini adalah himpunan nilai x simultan, $x_1$, $x_2$, …, $x_n$, yang memenuhi seluruh persamaan (Munir, 2015).

## 2.5 Metode Penentuan Nilai Akar

Dalam metode numerik, pencarian akar f(x) = 0 dilakukan secara iterative. Sampai saat ini sudah banyak ditemukan metode pencarian akar. Secara umum, semua metode pencarian akar tersebut dapat dikelompokkan menjadi dua golongan besar:

### 2.5.1 Metode Tertutup

Metode yang termasuk dalam golongan ini mencari akar di dalam selang [a, b]. selang [a, b] dipastikan berisi minimal satu buah akar, karena itu metode jenis ini selalu berhasil menemukan akar. Dengan kata lain, iterasinya selalu konvergen ke akar, karena itu metode tertutup kadang-kadang dinamakan juga metode konvergen (Munir, 2015).

### 2.5.2 Metode Terbuka

Berbeda dengan metode tertutup, metode terbuka tidak membutuhkan selang [a, b] yang mengandung akar, tetapi yang diperlukan adalah tebakan awal akar. Lalu dengan prosedur iterasi, digunakan untuk menghitung hampiran akar yang baru. Pada setiap kali iterasi, hampiran akar yang lama dipakai untuk menghitung hampiran akar yang baru. Mungkin saja hampiran akar yang baru mendekati akar sejati, atau mungkin juga menjauhinya. Karena itu, metode terbuka tidak selalu berhasil menemukan akar, kadang-kadang konvergen, kadangkala ia divergen (Munir,2015).

## 2.6 Matriks

Matriks merupakan suatu jajaran bilangan (angka) berbentuk segi empat yang diapit dengan tanda kurung

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (2.6)$$

Atau juga dapat ditulis :

$$A = [a_{ij}] \quad i = 1,2,\dots,m; \;\; j = 1, 2, 3, \dots, n \qquad (2.7)$$

Disebut matriks dengan m baris dan n kolom, atau matriks m x n. Bilangan $a_{11}, a_{12}, \dots$ disebut unsur-unsur matriks. sedangkan indeks i dan j berturut-turut menyatakan baris dan kolom. Jadi elemen $a_{mn}$ terdapat pada baris ke-m dan kolom ke-n. Pasangan bilangan (m,n) disebut dimensi (ukuran atau bentuk) dari matriks (Azizah dan Ariyanti, 2020).

Sebuah matriks dinotasikan dengan simbol huruf besar seperti $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ atau A, B, …, X, Y, Z dan sebagainya.

Contoh:

$$A_{2x3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Disebut matriks A dengan 2 baris dan 3 kolom. Jika A sebuah matriks, maka digunakan $a_{ij}$ untuk menyatakan elemen yang terdapat di dalam baris i dan kolom j dari A. Dalam contoh ini i = 1,2; dan j = 1, 2, 3 atau dapat ditulis

$$A = [a_{ij}] \;\; i = 1,2; \quad j = 1,2,3$$

(Azizah dan Ariyanti, 2020).

### 2.6.1 Invers Matriks

Jika A adalah suatu matriks bujur sangkar dan jika suatu matriks B yang berukuran sama bisa didapatkan sehingga AB = BA = I, maka A disebut bisa dibalik dan B disebut invers matriks dari A.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Dapat dibalik jika ad – bc ≠ 0, dimana inversnya bisa dicari dengan rumus

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

(Azizah dan Ariyanti, 2020).

### 2.6.2 Matriks Jacobian

Matriks Jacobian adalah matriks turunan parsial orde pertama.

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

Sebagai contoh:

$$3x_1 - cos\ cos\ (x_2x_3)\ - \frac{1}{2} = 0x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + sin\ sin\ (x_3)\ + 1.06$$
$$= 0e^{-x_2x_1} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

Maka diperoleh matriks Jacobian:

$J(x) = [3\ x_3 sin\ (x_2x_3)\ x_2 sin\ (x_2x_3)\ 2x_1\ - 162(x_2 +$
$0.1)\ cos\ (x_3) - x_2e^{-x_1x_2}\ - x_1e^{-x_1x_2}\ 20\ ]$

(Courtney, 2013;Patrascioiu dan Marinoiu, 2010).

## 2.7 Vektor

Misalkan $x \in R^n$ dimana

$$\vec{x} = [x_1\ x_2\ \vdots\ x_n\ ]$$

Sebuah norm vektor pada $R^n$ adalah sebuah fungsi, $\|.\|$, dari $R^n$ ke $R$ yang memiliki syarat-syarat berikut ini:

1. $\|x\| \geq 0$ untuk semua $x \in R^n$
2. $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$
3. $\|ax\| = |a|\|x\|$ untuk semua $a \in R$ dan $x \in R^n$

4. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk semua $x, y \in R^n$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \tag{2.9}$$

(Courtney, 2013).

## 2.8 Deret Taylor

Misalkan f fungsi yang turunan ke-(n+1), $f^{(n+1)}(x)$ ada untuk masing-masing x dalam interval terbuka I yang mengandung a. Maka untuk masing-masing x dalam I,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + O_n(x) \tag{2.10}$$

Dengan sisa (atau galat) $O_n(x)$ diberikan oleh rumus

$$O_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{2.11}$$

Dan c suatu titik di antara x dan a (Purcell, dkk., 2008).

## 2.9 Metode Numerik

Tidak semua permasalahan matematis atau perhitungan dapat diselesaikan dengan mudah. Bahkan dalam prinsip matematik, dalam memandang permasalahan yang terlebih dahulu diperhatikan apakah permasalahan tersebut mempunyai penyelesaian atau tidak. Dengan dasar inilah dapat dikatakan bahwa suatu metode tertentu yang dapat digunakan untuk menghitung permasalahan matematis. Meskipun metode tersebut tidak dapat menghasilkan nilai yang tepat, setidak-tidaknya sudah mendekati nilai yang diharapkan.

Metode numerik adalah teknik penyelesaian permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan cara operasi hitungan. Dalam metode numerik ini dilakukan operasi hitungan dalam jumlah yang banyak dan prosesnya berulang. Sehingga dalam prakteknya perlu bantuan komputer untuk menyelesaikan hitungan tersebut. Tanpa bantuan komputer, metode numerik tidak banyak memberikan manfaat. Metode numerik merupakan alat yang sangat ampuh untuk menyelesaikan permasalahan dalam berbagai bidang salah satunya yaitu sistem persamaan nonlinear (Atmika, 2016).

Ada beberapa metode yang digunakan untuk menghitung akar sistem persamaan yaitu:

### 2.9.1 Metode *Newton*

Metode *Newton* adalah satu dari metode numerik yang paling terkenal. Metode ini berasal dari perluasan fungsi deret Taylor f(x) tentang titik variabel $x_1$:

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1)f'(x_1) + \frac{1}{2!}(x - x_1)^2 f''(x_1) + \cdots \qquad (2.12)$$

Dimana f dan turunan orde pertama dan kedua dihitung pada $x_1$. Jika diambil dua istilah pertama dari perluasan fungsi deret Taylor maka:

$$f(x) \approx f(x_1) + (x - x_1)f'(x_1) \qquad (2.13)$$

Kemudian diubah persamaan (2.13) menjadi f(x) = 0 untuk mencari akar dari persamaan:

$$f(x_1) + (x - x_1)f'(x_1) = 0 \qquad (2.14)$$

Dengan mengatur persamaan (2.14) didapatkan

$$x = x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \tag{2.15}$$

Sehingga dari persamaan (2.15) didapatkan metode iterasi *Newton*

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}, i \in N \tag{2.16}$$

Dimana $x_i \to \underline{x}$ dimana $i \to \infty$ dan $\underline{x}$ adalah nilai perkiraan dari akar fungsi (Walia, 2022).

Kemudian dideskripsikan langkah-langkah dalam metode *Newton*:

1. Misalkan $\vec{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ merupakan vektor permulaan
2. Hitung $J(\vec{x}^{(0)})$ dan $F\left(\vec{x}^{(0)}\right)$
3. Kemudian hitung vektor $y^{(0)}$, dimana

$$\vec{y} = [y_1\ y_2\ \vdots\ y_n\ ]$$

   Untuk menemukan $\vec{y}^{(0)}$, selesaikan sistem linear dari $J(\vec{x}^{(0)})\vec{y}^{(0)} = -F(\vec{x}^{(0)})$ menggunakan Eliminasi Gaussian

4. Ketika $\vec{y}^{(0)}$ sudah ditemukan, diselesaikan iterasi pertama dengan menyelesaikan $x^{(1)}$.

$$\vec{x}^{(1)} = \vec{x}^{(0)} + \vec{y}^{(0)} = \left[x_1^{(0)}\ x_2^{(0)}\ \vdots\ x_n^{(0)}\ \right] + \left[y_1^{(0)}\ y_2^{(0)}\ \vdots\ y_n^{(0)}\ \right] \tag{2.17}$$

5. Ketika $\vec{x}^{(1)}$ sudah didapatkan, proses tersebut diulang sampai $\vec{x}^{(k)}$ konvergen ke $\underline{x}$. Ini menandakan ditemukannya solusi untuk F(x) = 0, dimana $\underline{x}$ adalah solusi dari sistem tersebut (Courtney, 2013).

### 2.9.2 Metode *Broyden*

Salah satu dari kekurangan dari metode *Newton* bahwa $J(x^{(0)})$ dan turunannya harus dihitung untuk setiap pengulangan. Sehingga untuk menghindari masalah ini, terdapat metode modifikasi dari metode *Newton* yaitu metode *Broyden* yang menggunakan matriks perkiraan yang diperbarui setiap pengulangan sebagai ganti dari matriks Jacobian.

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - A_i^{-1} F(x^{(i)}) \tag{2.18}$$

Persamaan (2.18) didefinisikan sebagai prosedur iterasi *Broyden*. Dengan $A_i^{-1}$ didefinisikan sebagai

$$A_i{}^{-1} = A_{i-1}^{-1} + \frac{(s_i - A_{i-1}^{-1} y_i) s_i^t A_{i-1}^{-1}}{s_i^t A_{i-1}^{-1} y_i} \tag{2.19}$$

Dengan $y_i = F\left(x^{(i)}\right) - F(x^{(i-1)})$ dan $s_i = x^{(i)} - x^{(i-1)}$ (Walia, 2022).

Kemudian dideskripsikan langkah-langkah dalam metode *Broyden*:

1. Misalkan $\vec{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ merupakan vektor permulaan
2. Hitung fungsi $F(x^{(0)})$
3. Hitung $A_0^{-1}$. Dengan persamaan $A_0^{-1} = J(\vec{x}^{(0)})^{-1}$.
4. Hitung $\vec{x}^{(1)} = \vec{x}^{(0)} - A_0^{-1} F(\vec{x}^{(0)})$
5. Hitung $F(x^{(1)})$
6. Hitung $\vec{y}_1 = F\left(\vec{x}^{(1)}\right) - F(\vec{x}^{(0)})$. Kemudian hitung $\vec{s}_1 = \vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)}$.
7. Hitung $\vec{s}_1^t A_0^{-1} y_1$

8. Hitung $A_1^{-1} = A_0^{-1} + \frac{1}{\vec{s}_1^t A_0^{-1} y_1} [(\vec{s}_1 - A_0^{-1} y_1) \vec{s}_1^t A_0^{-1}]$

9. Ulangi langkah 4 hingga 8 sampai ditemukan akar-akar yang konvergensi ke $\underline{\vec{x}}$ (ketika $\vec{x}^{(i)} = \vec{x}^{(i+1)} = \underline{x}$. Ini menandakan bahwa telah ditemukan solusi dari sistem (Courtney, 2013).

### 2.9.3 Metode *Quadrature Gauss*

Metode ini berdasarkan dari *Gauss quadrature rule* yang memiliki orde konvergensi enam. Metode ini menyelesaikan sistem persamaan nonlinear dalam jumlah iterasi yang sedikit dan tingkat ketepatan yang tinggi.

Misalkan $f: D \subseteq R^n \to R^n$, merupakan fungsi terdiferensiasi Frechet s-times pada himpunan $D \subseteq R^n$. Dengan menggunakan Teorema Nilai Rata-Rata dari fungsi vektor multivariabel $f(x^{(k)})$, didapatkan

$$f(x) - f(x^k) = \int_0^1 P'\left(x^{(k)} + r\left(x - x^{(k)}\right)\right)(x - x^{(k)})\, dr \qquad (2.20)$$

(Atkinson, 1987).

Dalam mendapatkan metode *Gauss quadrature rule*, diperkirakan persamaan (2.20) dengan rumus integrasi tiga titik Gauss Legendre. Sehingga didapatkan:

$$\int_0^1 f'\left(x^{(k)} + r\left(x - x^{(k)}\right)\right)(x - x^{(k)})\, dr \approx \frac{x - x^{(k)}}{9}\left[4f'\left(\frac{x + x^{(k)}}{2}\right) + \frac{5}{2} f'\left(\left(x - x^{(k)}\right)\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{x + x^{(k)}}{2}\right) + \frac{5}{2} f'\left(\left(x - x^{(k)}\right)\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{x + x^{(k)}}{2}\right)\right] \qquad (2.21)$$

Kemudian, dengan menggunakan iterasi dari metode *Newton* berdasarkan persamaan, didapatkan skema iteratif yang baru. Kemudian dideskripsikan langkah-langkah dalam metode *Gauss quadrature rule*:

1. Misalkan $\vec{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ merupakan vektor permulaan

2. Hitung $J(\vec{x}^{(0)})$ dan $F\left(\vec{x}^{(0)}\right)$
3. Kemudian hitung vektor $\vec{o}^{(1)}$, dimana

$$\vec{o} = [y_1\, y_2\, \vdots\, y_n\,]$$

Untuk menemukan $\vec{o}^{(1)}$, perlu diselesaikan sistem linear dari $J(\vec{x}^{(0)})\vec{o}^{(1)} = -F(\vec{x}^{(0)})$ menggunakan Eliminasi Gaussian

4. Hitung $\vec{z}^{(1)} = \vec{x}^{(0)} + \vec{o}^{(1)}$
5. Hitung $J(\vec{z}^{(1)})$ dan $F\left(\vec{z}^{(1)}\right)$
6. Kemudian hitung vektor $p^{(1)}$, dimana

$$\vec{p} = [y_1\, y_2\, \vdots\, y_n\,]$$

Untuk menemukan $p^{(1)}$, perlu diselesaikan sistem linear dari $J(\vec{z}^{(1)})\vec{p}^{(1)} = -F(\vec{x}^{(0)})$ menggunakan Eliminasi Gaussian

7. Hitung $\vec{t}^{(1)} = \vec{z}^{(1)} + \vec{p}^{(1)}$
8. Kemudian dari $\vec{z}^{(1)}$ dan $\vec{t}^{(1)}$, dihitung

$$\vec{h}^{(1)} = \frac{z^{(1)} + t^{(1)}}{2},$$

$$\vec{j}^{(1)} = \left(t^{(1)} - z^{(1)}\right)\sqrt{\frac{3}{5}},$$

$$\vec{w}^{(1)} = \left(t^{(1)} - z^{(1)}\right)\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

9. Hitung $\vec{x}^{(1)} = t^{(1)} - 9\left[4f'(h^1) + \frac{5}{2}f'(h^1 + w^1) + \frac{5}{2}f'(h^1 + j^1)\right]^{-1} f(t^{(1)})$

Ulangi langkah 2 hingga 9 sampai ditemukan akar-akar yang konvergensi ke $\underline{x}$ (ketika $\vec{x}^{(i)} = \vec{x}^{(i+1)} = \underline{x}$. Ini menandakan bahwa telah ditemukan solusi dari sistem (Srivastava, dkk., 2021).

## 2.10 Fungsi Polinomial

Bentuk umum fungsi polinom order atau pangkat n (n bilangan bulat positif) dinyatakan sebagai berikut:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \; dengan \; a_n \neq 0$$

Bentuk khusus dari fungsi polinom, yaitu:

a. Fungsi Konstan: $f(x) = a_0$

b. Fungsi Linear: $f(x) = a_0 + a_1x$ ( $f(x) = x$ merupakan fungsi identitas )

c. Fungsi Kuadrat: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

Misal $f(x)$ merupakan fungsi polinom order $n$ maka mempunyai paling banyak $n$ buah pembuat nol yang berbeda (Marsitin dan Sesanti, 2019).

## 2.11 Konvergensi

Dua vektor x dan y dikatakan konvergensi jika $\|x - y\| = 0$. Dimana

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = 0 \quad (2.22)$$

(Courtney, 2013).

## 2.12 Sistem Persamaan pada *Heat Exchanger*

*Heat exchanger* memiliki empat variabel dalam saluran masuk dan dua variabel dalam saluran keluar. Variabel dari saluran masuk yaitu temperatur dan laju aliran untuk cairan dingin dan temperatur dan laju aliran untuk cairan panas. Variabel dari saluran keluar yaitu temperatur dari cairan dingin dan temperatur dari cairan panas. berikut adalah sistem persamaan nonlinear untuk *heat exchanger*:

$$\begin{cases} f_1 = Q_{hot}C_{hot}(T_{h1} - T_{h2}) - Q_{cold}C_{cold}(T_{c2} - T_{c1}) = 0 \\ f_2 = Q_{hot}C_{hot}(T_{h1} - T_{h2}) - kA\dfrac{(T_{h1} - T_{c2}) - (T_{h2} - T_{c1})}{ln\dfrac{T_{h1} - T_{c2}}{T_{h2} - T_{c1}}} = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Keterangan:

$Q_{hot}$ = Laju aliran cairan panas (kg/h)

$Q_{cold}$ = Laju aliran cairan dingin (kg/h)

$C_{hot}$ = Kalor jenis zat cairan panas (J/kg$^o$C)

$C_{cold}$ = Kalor jenis zat cairan dingin (J/kg$^o$C)

$T_{h1}$ = Temperatur cairan panas pada saluran masuk ($^o$C)

$T_{c1}$ = Temperatur cairan dingin pada saluran masuk ($^o$C)

$T_{h2}$ = Temperatur cairan panas pada saluran keluar ($^o$C)

$T_{c2}$ = Temperatur cairan dingin pada saluran keluar ($^o$C)

k = Konduktivitas termal (W/m.K)

A = Daerah perpindahan panas (m$^2$)

(Patrascioiu dan Marinoiu, 2010).

## 2.13 *Continuosly Stirred Tank Reactors* (CSTR)

Dalam reactor CSTR, reaktan terus menerus dialirkan ke dalam reactor, Dimana reaktan tersebut mengalami reaksi kimia. Secara bersamaan, aliran keluar diekstraksi dari reactor pada laju aliran yang sama dengan aliran masuk untuk mempertahankan volume konstan di dalam reactor. CSTR memungkinkan produksi bahan kimia yang diinginkan secara menerus tanpa perlu mengosongkan dan mengisi tangki berulang kali.

Keseimbangan massa untuk jenis j di dalam CSTR dapat ditulis sebagai

$$V\frac{d[j]}{dt} = v([j]_0 - [j]) + Vv_j[j]^{v_j} \tag{2.24}$$

Keterangan:

$v$ = laju aliran volumetric ($m^3/s$)

V = volume reactor ($m^3$)

$v_j$ = koefisien stoikiometri dari j

$[j]_0$ = konsentrasi jenis j yang masuk

$[j]$ = konsentrasi jenis j dalam keadaan stabil

$\pm[j]^{v_j}$ = $r_j$ = laju reaksi dari jenis j (mol/ $m^3s$)

Setelah beberapa saat memulai CSTR, dapat asumsikan bahwa reactor sedang beroperasi dalam keadaan stabil, sehingga $\frac{d[j]}{dt} = 0$. Maka persamaan dapat ditulis sebagai

$$v([j]_0 - [j]) + Vv_j[j]^{v_j} = 0 \tag{2.25}$$

(Beers, 2007).

# III. METODE PENELITIAN

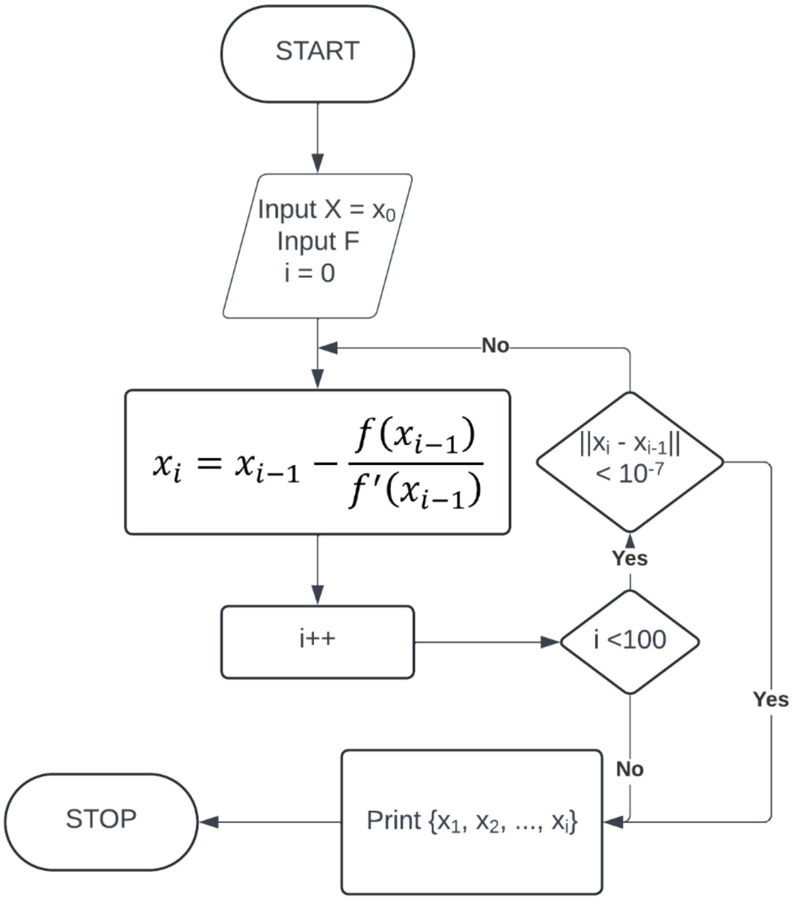
## 3.1 Waktu Penelitian

Penelitian ini mulai dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2023/2024 bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

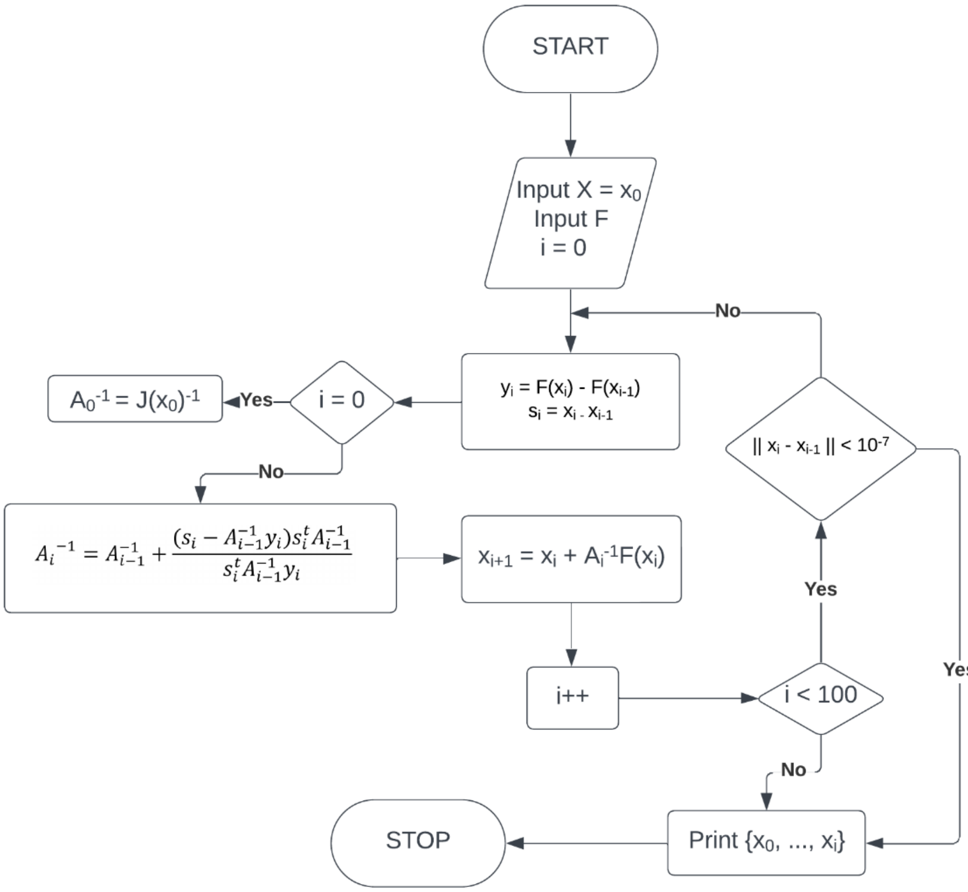
## 3.2 Metode Penelitian

Pada penelitian ini, metode yang digunakan adalah studi literature dan penerapan program Mathematica. Adapun langkah-langkah yang digunakan adalah sebagai berikut:

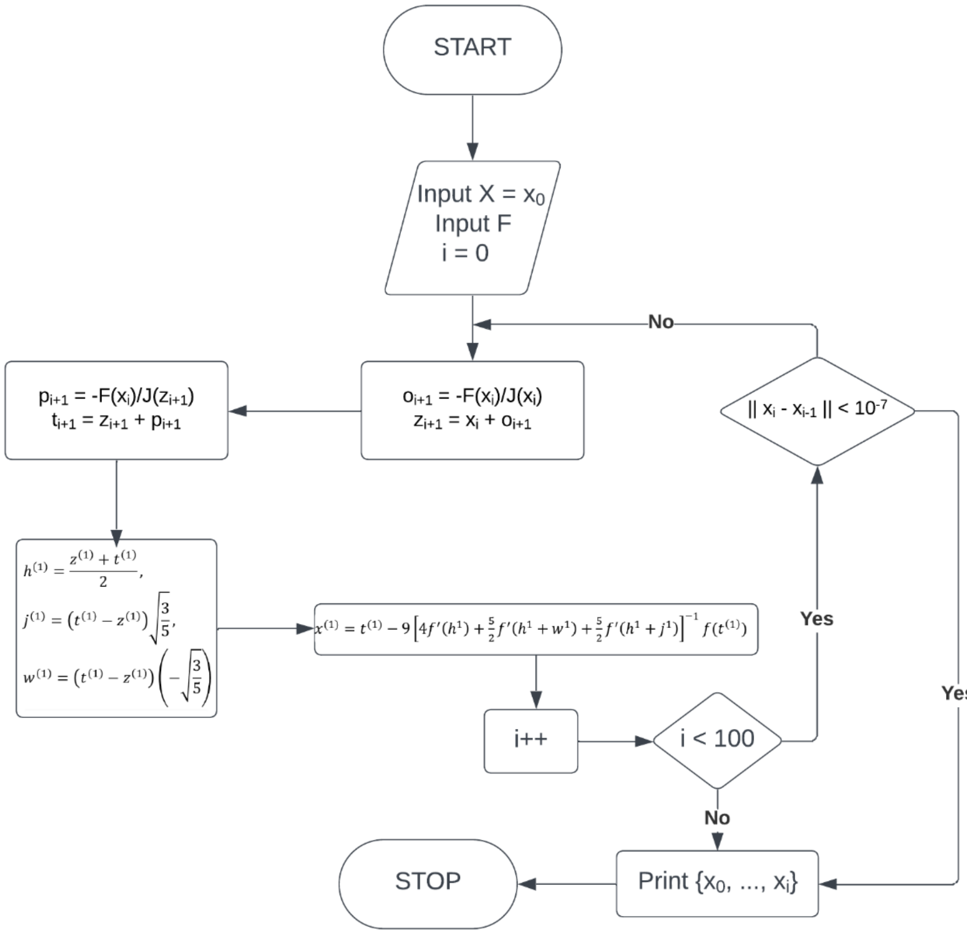
1. Mempelajari definisi dan teorema yang menjadi landasan pada penelititan ini.
2. Menentukan kasus untuk memulai membandingkan metode.
3. Membuat program komputer menggunakan *software* Mathematica berdasarkan definisi dan teorema yang telah ditentukan.
4. Analisis keakuratan, iterasi dan galat dari metode *Newton*, *Broyden* dan *Quadrature Gauss*.
5. Menentukan kesimpulan




Gambar 1. Flow Chart Metode *Newton*




Gambar 2. Flow Chart Metode *Broyden*




Gambar 3. Flow Chart Metode *Quadrature Gauss*

# V. KESIMPULAN

## 5.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil bab pembahasan diperoleh kesimpulan terhadap metode *Newton*, metode *Broyden* dan metode *Quadrature Gauss* dalam menyelesaikan sistem persamaan nonlinear. Hasil penelitian dari ketiga meteode yang digunakan memperlihatkan bahwa dalam tingkat keakuratan, metode *Quadrature Gauss* merupakan metode yang paling akurat terhadap penyelesaian keempat sistem persamaan nonlinear yang dibahas. Dalam tingkat jumlah iterasi, metode *Quadrature Gauss* juga merupakan metode yang memiliki jumlah iterasi yang minimal terhadap penyelesaian keempat sistem persamaan nonlinear. Sedangkan dalam waktu penyelesaian terhadap keempat sistem persamaan nonlinear, metode *Broyden* merupakan metode yang memiliki *running-time* yang paling singkat.

## 5.2. Saran

Berdasarkan penelitian yang dilakukan, maka terdapat beberapa saran untuk kemajuan penelitian ini di masa mendatang antara lain :

1. Penelitian ini hanya membahas dua aplikasi sistem persamaan nonlinear yaitu pada *heat exchanger* dan CSTR. Diharapkan penelitian selanjutnya dapat mengaplikasikannya dalam permasalahan yang lainnya
2. Metode dalam penyelesaian sistem persamaan nonlinar hanya digunakan metode *Newton*, metode *Broyden* dan metode *Quadrature Gauss*. Diharapkan penelitian selanjutnya dapat menggunakan metode yang lainnya.

# DAFTAR PUSTAKA


Atkinson, K. E. (1989). *An Introduction to Numerical Analysis*. New York: John Wiley & Sons.

Atmika, I. Ketut Adi. (2016). *Diktat Mata Kuliah Metode Numerik*. Universitas Udayana.

Azizah, N. L., dan Ariyanti, N. (2021). Buku Ajar Mata Kuliah Dasar-Dasar Aljabar Linear. Umisida Press.

Beers, K.J. (2007). Numerical Methods for Chemical Engineering: Applications in MATLAB. Cambridge University Press.

Courtney, R. (2012). Numerical Methods for Solving Systems of Nonlinear Equations. *A project submitted to the Department of Mathematical Sciences in conformity with the requirements for Math, 4301*.

Kou J, Li Y, dan Wang X. (2006). A Modification of Newton Method with Third-Order Convergence, *Appl. Math. Comput*, 181(2): 1106-1111.

Leon, S.J. (2001). *Aljabar Linear dan Aplikasinya*. Ed. ke-5. Erlangga, Jakarta

Marsitin, R. dan Sesanti, N. R. (2019). *Dasar-Dasar Kalkulus*. Ediide Infografika, Malang.

Munir, R. (2015). *Metode Numerik*. Informatika, Bandung.

Patrascioiu, C., dan Marinoiu, C. (2010). The Applications Of The Non-linear Equations Systems Algorithms For The Heat Transfer Processes. *In Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Mathematical Methods, Computational Techniques And Intelligent Systems*

(MAMECTIS'10). World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), Stevens Point, Wisconsin, USA, (30–35).

Purcell, E.J., Verberg, D., Ridgon, S.E. (2008). *Kalkulus Edisi Kesembilan*. Jilid 2, Erlangga, Jakarta.

Rosidi, M. (2019). *Metode Numerik Menggunakan R Untuk Teknik Lingkungan*. Piktochart: Bandung.

Sinaga, G. Persamaan. https://gilbertsinaga.wordpress.com/2013/09/26/8.html. 9 Oktober 2023.

Srivastava, Hari M., Javed Iqbal, Muhammad Arif, Alamgir Khan, Yusif S. Gasimov, dan Ronnason Chinram. (2021). A New Application of Gauss Quadrature Method for Solving Systems of Nonlinear Equations. *Symmetry* 13, no. 3: 432.

Sunandar, E., dan Indrianto. (2020). Perbandingan Metode Newton-Raphson dan Metode Secant Untuk Mencari Akar Persamaan Dalam Sistem Persamaan Non-Linier. PETIR, Vol 13, no. 1, 72-79.

Triatmodjo, B. (2002). *Metode Numerik*. Beta Offset, Yogyakarta.

Utami N.N.R, Widana I.N, dan Asih N.M. (2013). Perbandingan Solusi Sistem Persamaan Nonlinear Menggunakan Metode Newton dan Metode Jacobian, E-Jurnal Matematika, 2(2):11-17.

Walia, A. (2022). Solution of Non Linear Equation Using Newton Raphson and Quasi Newton Method and Application in Engineering Field. *Mathematical Statistician and Engineering Applications*, *71*(4), 2164-2181.