DERIVASI-(α, β) PADA RING MATRIKS $M_n(R)$

Skripsi

Oleh

DANIA AZZAHRA
NPM. 2117031111

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

ABSTRACT

(α, β)-DERIVATION ON RING MATRIX $M_n(R)$

By

Dania Azzahra

In ring theory, a derivation is an additive mapping $d : R \to R$ that satisfies Leibniz's rule. One generalization of derivation is (α, β)-derivation, which depends on two ring endomorphisms α and β. This research discusses the (α, β)-derivation of the ring matrix $M_n(R)$ and its subsets, such as diagonal, scalar, and upper and lower triangular matrices. The purpose of this research is to construct (α, β)-derivation in the matrix ring $M_n(R)$ based on (α, β)-derivation in the ring R. The results show that, without changing its basic properties, the (α, β)-derivation can be applied to various subsets of matrices in $M_n(R)$. Moreover, this research also analyzes the composition of (α, β)-derivations of the ring $R \times R$ which is proved to satisfy the (α, β)-derivation property, although the linear combination of two (α, β)-derivations on the ring does not always hold.

Keywords: (α, β)-derivation, ring matrix $M_n(R)$, composition of derivations.

ABSTRAK

DERIVASI-(α, β) PADA RING MATRIKS $M_n(R)$

Oleh

Dania Azzahra

Dalam teori ring, derivasi adalah pemetaan aditif $d : R \to R$ yang memenuhi aturan Leibniz. Salah satu generalisasi derivasi adalah derivasi-(α, β), yang bergantung pada dua endomorfisma ring α dan β. Penelitian ini membahas derivasi-(α, β) pada ring matriks $M_n(R)$ dan subset-subsetnya, seperti matriks diagonal, skalar, dan segitiga atas dan bawah. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengkonstruksi derivasi-(α, β) di ring matriks $M_n(R)$ berdasarkan derivasi-(α, β) pada ring R. Hasil penelitian menunjukkan bahwa, tanpa mengubah sifat dasarnya, derivasi-(α, β) dapat diterapkan pada berbagai subset matriks dalam $M_n(R)$. Selain itu, penelitian ini juga menganalisis komposisi derivasi-(α, β) pada ring $R \times R$, yang terbukti memenuhi sifat derivasi-(α, β), meskipun kombinasi linear dua derivasi-(α, β) pada ring ini tidak selalu berlaku.

Kata-kata kunci: derivasi-(α, β), ring matriks $M_n(R)$, komposisi derivasi.

DERIVASI-(α, β) PADA RING MATRIKS $M_n(R)$

DANIA AZZAHRA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

Judul Skripsi	:	**DERIVASI-(α, β) PADA RING MATRIKS $M_n(R)$**
Nama Mahasiswa	:	Dania Azzahra
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2117031111**
Program Studi	:	**Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**
NIP 198406272006042001	NIP 198002062003121003

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr.Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. tim penguji

Ketua : **Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.** .....

Sekretaris : **Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.** .....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D.** .....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **20 Februari 2025**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Dania Azzahra**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2117031111**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Derivasi-(α, β) pada Ring Matriks $M_n(R)$**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 20 Maret 2025

Penulis,

Dania Azzanra

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama nama lengkap Dania Azzahra lahir di kabupaten Tanggamus pada tanggal 10 Februari 2004. Penulis merupakan anak ketiga dari empat bersaudara dari pasangan Purwadi dan Susi Indrayati.

Pendidikan formal penulis dimulai di TK Dharma Wanita pada tahun 2009, lalu melanjutkan pendidikan di SD Negeri 1 Air Naningan dari tahun 2010 hingga 2016. Setelah menyelesaikan pendidikan dasar, penulis melanjutkan studi di SMP Negeri 1 Air Naningan dan lulus pada tahun 2019.

Setelah itu, penulis diterima di SMA Negeri 1 Gading Rejo, salah satu sekolah menengah atas favorit di daerahnya, dan berhasil menyelesaikan pendidikan menengah atas selama dua tahun dalam program akselerasi, serta lulus pada tahun 2021.

Pada tahun 2021, penulis berhasil lulus Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN) dan diterima di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung. Selama masa studi, penulis fokus pada pengembangan akademik. Selain itu, penulis juga aktif dalam berbagai kegiatan yang mendukung pengembangan diri, termasuk mengikuti seminar dan workshop yang berkaitan dengan ilmu pengetahuan dan teknologi.

Penulis juga memiliki pengalaman kerja praktik di Badan Pendapatan Daerah (Bapenda) Provinsi Lampung. Dengan latar belakang pendidikan dan pengalaman tersebut, penulis berharap penelitian ini dapat memberikan kontribusi yang berarti, khususnya di bidang matematika, terutama dalam ranah aljabar.

KATA INSPIRASI

”Dan barang siapa yang bertakwa kepada Allah, niscaya Dia akan memberikan jalan keluar baginya. Dan memberinya rezeki dari arah yang tidak disangka-sangka.”

(Q.S At-Talaq:2-3)

”Sesungguhnya Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya.”

(Q.S Al-Baqarah:286)

”The only way to do great work is to love what you do.”

(Steve Jobs)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucapkan Alhamdulillah dan penuh rasa syukur kepada Allah SWT atas segala nikmat dan petunjuk-Nya, saya dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik dan sesuai dengan waktu yang ditentukan. Dengan hati yang penuh rasa syukur dan kebahagiaan, saya ingin menyampaikan terima kasih saya kepada:

Ayah dan Mamaku Tercinta

Terima kasih yang sebesar-besarnya kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa, ridho, dan dukungannya yang tiada henti selama ini. Terima kasih telah mengajarkan pelajaran hidup yang sangat berharga, yang membuatku memahami makna sejati dari perjalanan hidup, sehingga kelak dapat menjadi pribadi yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terima kasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang telah memberikan bantuan yang sangat besar, memberikan inspirasi, memberikan bimbingan, dan memberikan pengetahuan yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, dorongan, inspirasi, dan doa-doanya, serta yang senantiasa mendukung dalam situasi apa pun.

Almamater Tercinta
Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah memberikan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik dan tepat waktu dengan judul "Derivasi-(α, β) pada Ring Matriks $M_n(R)$". Semoga shalawat dan salam selalu tercurahkan kepada junjungan kita, Nabi Muhammad SAW, yang telah menunjukkan jalan kebenaran bagi umat manusia.

Penyusunan skripsi ini merupakan proses yang penuh dengan tantangan dan pembelajaran. Tanpa bantuan, dukungan, dan dorongan dari berbagai pihak, penulis tidak akan dapat menyelesaikan tugas ini. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih yang tulus kepada:

1. Ibu Dr. Fitriani, S.Si.,M.Sc. selaku Pembimbing 1 yang telah dengan penuh perhatian memberikan arahan, bimbingan, serta dukungan moral dan motivasi yang sangat membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

2. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si.,M.Sc. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan, serta dukungan yang sangat berharga, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

3. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA.,Ph.D. selaku Penguji yang telah memberikan kritik, saran, dan evaluasi yang sangat membantu penulis untuk memperbaiki skripsi ini.

4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

5. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing akademik.

6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Saudara-saudara ku, Kak Diana, Kak Nadia dan adikku Aidan, atas segala dukungan, semangat, dan doa yang tiada henti.
8. Sahabatku sejak SMA, Alda dan Shalsa, atas dukungan, kebersamaan, dan semangat yang selalu kalian berikan.
9. Teman-teman satu bimbingan, Desi, Ditha, Isty, Nadia, Nafdha, Rara, dan Rena, atas segala dukungan, semangat, dan kerja sama yang telah terjalin selama ini.

Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi pembaca dan pihak-pihak yang berkepentingan. Penulis menyadari bahwa masih banyak kekurangan dalam skripsi ini, oleh karena itu, segala kritik dan saran yang membangun sangat diharapkan untuk perbaikan di masa yang akan datang.

Bandar Lampung, 20 Maret 2025

Dania Azzahra

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI . . . . . **xiii**
DAFTAR TABEL . . . . . **xiv**
DAFTAR GAMBAR . . . . . **xv**
I PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang Masalah 1
1.2 Tujuan Penelitian 2
1.3 Manfaat Penelitian 2
II TINJAUAN PUSTAKA **3**
2.1 Matriks 3
2.2 Permutasi 5
2.3 Grup 6
2.4 Ring 10
2.5 Derivasi 17
2.6 Derivasi-(α, β) 18
III METODE PENELITIAN **20**
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian 20
3.2 Metode Penelitian 20
IV HASIL DAN PEMBAHASAN **22**
4.1 Derivasi-(α, β) pada Ring Matriks $M_n(R)$ 22
4.2 Derivasi-(α, β) pada Ring Matriks Diagonal dan Ring Matriks Skalar 31
4.3 Derivasi-(α, β) pada Ring Matriks Segitiga Atas dan Ring Matriks Segitiga Bawah 40
4.4 Sifat-sifat Derivasi-(α, β) pada Ring $R \times R$ 53
V KESIMPULAN DAN SARAN **56**
5.1 Kesimpulan 56
5.2 Saran 56
DAFTAR PUSTAKA **58**

DAFTAR TABEL

2.1 Tabel Cayley S_3 7
2.2 Tabel Cayley H terhadap operasi $+_8$ 9

DAFTAR GAMBAR

3.1 Diagram Tahapan Penelitian 21

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Konsep derivasi pertama kali diperkenalkan dalam kalkulus oleh Isaac Newton (1687) dengan konsep fluks, dan oleh Gottfried Wilhelm Leibniz dengan konsep diferensial. Konsep derivasi terus berkembang setelah tahun 1687 dan digunakan dalam banyak bidang, seperti aljabar dan analisis matematika. Cauchy (1821) memberikan definisi formal derivasi sebagai limit dari rasio perubahan fungsi, yang menjadi dasar teori kalkulus modern.

Pada abad ke-20 derivasi dalam aljabar mulai digunakan secara lebih luas dalam struktur ring. Ring adalah himpunan yang memenuhi aksioma tertentu dan memiliki dua operasi biner, penjumlahan dan perkalian. Dalam studi aljabar, derivasi pada ring adalah suatu pemetaan $d : R \to R$ yang memenuhi $d(a + b) = d(a) + d(b)$ dan $d(ab) = d(a)b + ad(b)$, untuk setiap $a, b \in R$ (Ernanto, 2018).

Kemudian, Bell dan Mason (1987) mendefinisikan derivasi sebagai pemetaan yang memenuhi aksioma tertentu, yang dapat digunakan pada mendekati ring dan mendeka ti ring prima. Dalam sepuluh tahun terakhir, konsep tentang derivasi telah berkembang menjadi derivasi tergeneralisasi. Ali dan Shujat (2014) membahas tentang derivasi tergeneralisasi dari ring semiprima. Lalu, Huang dan Rehman (2016) membahas terkait derivasi tergeneralisasi pada ring prima dan ring semiprima. Kemudian, Prihatin (2018) membahas pemetaan derivasi tergeneralisasi dan derivasi tergenerali sasi pada ring dengan involusi. Penelitian ini menunjukkan bagaimana derivasi dan sifat komutatif ring berinteraksi satu sama lain. Penelitian terbaru oleh Ali dkk. (2024) membahas mengenai berbagai jenis derivasi pada ring. Ada beberapa jenis derivasi yang dibahas dalam penelitian tersebut, salah satu contohnya yaitu derivasi-(α, β).

Dalam aljabar abstrak, konsep derivasi-(α, β) pada ring berperan menggabungkan pemetaan derivasi dengan struktur ring. Suatu pemetaan aditif $d : R \to R$ disebut

derivasi-(α, β) apabila terdapat dua endomorfisma $\alpha, \beta \in R$ sedemikian sehingga $d(xy) = d(x)\alpha(y) + \beta(x)d(y)$, untuk setiap $x, y \in R$ (Ali dkk., 2024).

Penelitian tentang derivasi-(α, β) telah berkembang seiring dengan penekanan pada struktur aljabar yang lebih kompleks. Sebagai contoh, Hongan (2017) membahas tentang derivasi-(α, β) pada ring semiprima. Kemudian, Rasheed dkk. (2020) memba has mengenai derivasi-(α, β) pada semiring prima.

Hingga saat ini, belum ada penelitian mengenai derivasi-(α, β) pada ring yang berfokus pada ring matriks $M_n(R)$. Oleh sebab itu, penelitian ini akan membahas sifat-sifat derivasi-(α, β) dalam konteks ring matriks tersebut. Penelitian ini akan mencakup teorema baru dan temuan yang diharapkan memperluas penelitian terkait derivasi-(α, β) dalam struktur ring matriks.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini yaitu:

1. mengkonstruksi contoh-contoh derivasi-(α, β) pada ring matriks $M_n(R)$;
2. menyelidiki sifat-sifat derivasi-(α, β) pada ring matriks $M_n(R)$, matriks diagonal, matriks skalar, matriks segitiga atas, dan matriks segitiga bawah;
3. memberikan contoh ilustrasi dari sifat-sifat yang didapat.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini yaitu:

1. memberikan pemahaman yang lebih baik tentang sifat-sifat derivasi-(α, β) pada ring matriks $M_n(R)$;
2. menciptakan dasar untuk penelitian aljabar lebih lanjut, terutama dalam hal aplikasi derivasi-(α, β) pada ring matriks $M_n(R)$.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Matriks

Pada bagian ini, akan dibahas terkait matriks, termasuk jenis-jenis matriks dalam matematika beserta contoh-contohnya.

Definisi 2.1.1 Matriks adalah himpunan skalar yang terdiri dari bilangan riil atau kompleks yang disusun atau dijajarkan sepanjang empat persegi panjang berdasarkan baris dan kolom (Indriati, 2019).

Berikut ini merupakan contoh dari matriks.

Contoh 2.1.1 Salah satu contoh matriks dengan 2 baris dan 3 kolom yaitu $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 5 & 2 & -4 \end{bmatrix}$.

Selanjutnya akan dibahas mengenai matriks bujur sangkar yang merupakan salah satu jenis dari matriks.

Definisi 2.1.2 Matriks bujur sangkar adalah matriks yang baris dan kolomnya berjumlah sama yaitu n (Indriati, 2019).

Diberikan contoh matriks bujur sangkar sebagai berikut.

Contoh 2.1.2 Matriks bujur sangkar dengan $n = 2$ yaitu $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$ dan matriks bujur sangkar dengan $n = 3$ yaitu $\begin{bmatrix} -2 & 5 & 9 \\ 6 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Berikutnya akan dijelaskan terkait salah satu jenis matriks yaitu matriks diagonal.

Definisi 2.1.3 Matriks diagonal adalah matriks bujur sangkar yang elemen di luar diagonal utamanya bernilai 0 (Indriati, 2019).

Setelah mengetahui definisi matriks diagonal, berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.1.3 Matriks diagonal dengan $n = 2$ yaitu $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ dan matriks diagonal dengan $n = 3$ yaitu $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Berikut ini akan dibahas terkait matriks skalar yang merupakan bentuk khusus matriks diagonal.

Definisi 2.1.4 Matriks skalar adalah matriks diagonal dengan semua elemen diagonal utama bernilai sama yaitu k (Indriati, 2019).

Berikut ini merupakan contoh matriks skalar.

Contoh 2.1.4 Salah satu contoh matriks skalar $n = 3$ dengan diagonal utama $k = 7$ yaitu $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

Selanjutnya akan dibahas terkait matriks segitiga atas sebagai berikut.

Definisi 2.1.5 Matriks segitiga atas adalah matriks bujur sangkar dengan elemen-elemen di bawah diagonal utamanya bernilai 0 (Indriati, 2019).

Berikut ini merupakan contoh matriks segitiga atas.

Contoh 2.1.5 Salah satu contoh matriks segitiga atas dengan $n = 3$ yaitu $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Pada bagian ini, akan dijelaskan mengenai matriks segitiga bawah yang berkebalikan dengan matriks segitiga atas.

Definisi 2.1.6 Matriks segitiga bawah adalah matriks bujur sangkar dengan elemen-elemen di atas diagonal utamanya bernilai 0 (Indriati, 2019).

Berikut ini merupakan salah satu contoh dari matriks segitiga bawah

Contoh 2.1.6 Salah satu contoh matriks segitiga bawah dengan $n = 4$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

2.2 Permutasi

Pada bagian ini, akan dibahas mengenai permutasi, yaitu elemen-elemen dari suatu himpunan yang disusun ulang dalam urutan yang berbeda. Diberikan definisi dan contoh permutasi sebagai berikut.

Definisi 2.2.1 Diberikan suatu himpunan tak kosong S, pemetaan dari S ke S yang satu-satu disebut permutasi dari himpunan S. Misalkan himpunan $S = \{1, 2, 3, ..., n\}$, permutasi dinotasikan dengan S_n dapat ditulis sebagai berikut

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) & ... & \alpha(n) \end{pmatrix}.$$

Pada baris kedua matriks, yaitu $\alpha(n)$ merupakan pemetaan dari elemen pada baris pertama (n) oleh pemetaan α (Wahyuni dkk., 2023).

Berikut ini diberikan contoh untuk memudahkan pemahaman mengenai konsep permutasi.

Contoh 2.2.1 Diberikan himpunan $S = \{1, 2, 3\}$. Permutasi yang mungkin pada himpunan S yaitu:

1. $\alpha(1) = 1, \alpha(2) = 2, \alpha(3) = 3.$
2. $\alpha(1) = 1, \alpha(2) = 3, \alpha(3) = 2.$
3. $\alpha(1) = 2, \alpha(2) = 1, \alpha(3) = 3.$
4. $\alpha(1) = 2, \alpha(2) = 3, \alpha(3) = 1.$
5. $\alpha(1) = 3, \alpha(2) = 1, \alpha(3) = 2.$
6. $\alpha(1) = 3, \alpha(2) = 2, \alpha(3) = 1.$

Jumlah permutasinya adalah $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.
Permutasi S_3 dapat ditulis sebagai berikut: $\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Penulisan tersebut dapat dipersingkat dalam bentuk satu baris, sebagai contoh yaitu $\alpha_1 = (2\ 3)$ dan $\beta_2 = (1\ 3\ 2)$.

2.3 Grup

Pada bagian ini, akan dijelaskan tentang grup, yang merupakan kumpulan elemen yang memiliki operasi biner dan karakteristik tertentu. Struktur grup adalah dasar aljabar, yang digunakan dalam banyak bidang ilmu, termasuk matematika.

Definisi 2.3.1 Sistem matematika $\langle G, * \rangle$ disebut grup apabila memenuhi aksioma-aksioma berikut.

(i) Operasi biner $*$ bersifat asosiatif di G, sehingga untuk setiap $a, b, c \in G$, berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.

(ii) Terdapat elemen identitas $e \in G$, untuk setiap $a \in G$, berlaku $e * a = a * e = a$.

(iii) Untuk setiap $a \in G$, terdapat $b \in G$, sedemikian sehingga $a * b = e = b * a$

(Fitriani dan Faisol, 2022).

Berikut ini merupakan contoh dari grup.

Contoh 2.3.1 Diberikan himpunan $\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan. Akan ditunjukkan $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup.

(i) Akan ditunjukkan $+$ bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$. Diberikan sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}$, berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$.

(ii) Akan ditunjukkan terdapat elemen identitas di $\mathbb{Z}$ terhadap operasi $+$. Diberikan sebarang $a \in \mathbb{Z}$, terdapat $0 \in \mathbb{Z}$, sedemikian sehingga $0 + a = a + 0 = a$.

(iii) Akan ditunjukkan untuk setiap elemen di $\mathbb{Z}$ memiliki invers terhadap operasi $+$. Diberikan sebarang $a \in \mathbb{Z}$, terdapat $-a \in \mathbb{Z}$, sedemikian sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Jadi, $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup.

Berikut ini diberikan contoh yang bukan grup.

Contoh 2.3.2 Diberikan himpunan bilangan $\mathbb{Z}^+$ dengan operasi perkalian. Akan ditunjukkan $\langle \mathbb{Z}^+, \cdot \rangle$ bukan grup. Karena setiap elemen di $\mathbb{Z}^+$ tidak memiliki invers, maka $\mathbb{Z}^+$ bukan grup terhadap operasi $\cdot$.

Selanjutnya, akan dibahas tentang grup permutasi, yaitu grup yang terdiri dari semua permutasi. Grup permutasi dalam teori grup memberi pemahaman bagaimana elemen dapat berubah tanpa mengubah sifat dasar himpunan.

Definisi 2.3.2 Diberikan N himpunan tak kosong dan S_N adalah koleksi semua permutasi pada N terhadap operasi permutasi, maka S_N adalah grup (Fitriani dan Faisol, 2022).

Berikut ini adalah contoh grup permutasi.

Contoh 2.3.3 Diberikan himpunan $N = \{1, 2, 3\}$ dan S_N adalah himpunan semua permutasi pada N. Himpunan semua permutasi pada N adalah $S_3 = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, dengan $\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Tabel 2.1 Tabel Cayley S_3

$\circ$	α_0	α_1	α_2	β_1	β_2	β_3
α_0	α_0	α_1	α_2	β_1	β_2	β_3
α_1	α_1	α_2	α_0	β_3	β_1	β_2
α_2	α_2	α_0	α_1	β_2	β_3	β_1
β_1	β_1	β_2	β_3	α_0	α_1	α_2
β_2	β_2	β_3	β_1	α_2	α_0	α_1
β_3	β_3	β_1	β_2	α_1	α_2	α_0

Berdasarkan Tabel 2.2, α_0 jika dioperasikan dengan setiap elemen S_3 menghasilkan elemen itu sendiri. Oleh sebab itu, α_0 adalah elemen identitas terhadap operasi permutasi. Selanjutnya, akan ditentukan invers dari setiap elemen di S_3, yaitu jika elemen S_3 dioperasikan dengan inversnya dari kiri maupun kanan maka akan menghasilkan elemen identitas α_0. Dari Tabel 2.2 didapat $\alpha_0 \circ \alpha_0 = \alpha_0$, sehingga $\alpha_0^{-1} = \alpha_0$. Kemudian, karena $\alpha_1 \circ \alpha_2 = \alpha_2 \circ \alpha_1 = \alpha_0$ maka diperoleh $\alpha_1^{-1} = \alpha_2$ dan $\alpha_2^{-1} = \alpha_1$. Selanjutnya, akan ditentukan invers dari β_1. Karena $\beta_1 \circ \beta_1 = \alpha_0$, didapat

$\beta_1^{-1} = \beta_1$. Kemudian, karena $\beta_2 \circ \beta_2 = \alpha_0$ dan $\beta_3 \circ \beta_3 = \alpha_0$, didapat $\beta_2^{-1} = \beta_2$ dan $\beta_3^{-1} = \beta_3$. Dapat dilihat bahwa setiap elemen S_3 memiliki invers di S_3. Jadi, himpunan S_3 dengan operasi permutasi merupakan grup.

Selanjutnya akan dijelaskan tentang grup komutatif, yang merupakan jenis grup dengan sifat operasi yang lebih sederhana. Grup komutatif, juga dikenal sebagai grup Abel.

Definisi 2.3.3 Grup $\langle G, * \rangle$ disebut grup komutatif jika untuk setiap $a, b \in G$, berlaku $a * b = b * a$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Berikut ini merupakan contoh grup komutatif.

Contoh 2.3.4 Diberikan grup $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ berdasarkan Contoh 2.3.1. Akan ditunjukkan $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup komutatif. Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$, berlaku $a+b = b+a$. Jadi, $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ grup komutatif.

Berikut ini merupakan contoh yang bukan grup komutatif.

Contoh 2.3.5 Diberikan suatu grup permutasi S_3 berdasarkan Contoh 2.3.3. Akan ditunjukkan S_3 bukan grup komutatif. Pilih permutasi $(1\ 2), (1\ 2\ 3) \in S_3$. Berlaku $(1\ 2)(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\ 3)$ dan $(1\ 2\ 3)(1\ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3)$. Karena $(2\ 3) \neq (1\ 3)$, maka grup permutasi S_3 bukan grup komutatif.

Subgrup adalah konsep dalam teori grup yang akan dibahas pada bagian ini. Akan dijelaskan mengenai definisi, teorema, dan contoh dari subgrup sebagai berikut.

Definisi 2.3.4 Jika H disertai dengan operasi biner yang sama di G, himpunan bagian H dari grup G disebut subgrup dari G (Fitriani dan Faisol, 2022).

Teorema 2.3.5 Himpunan bagian H dari grup G disebut subgrup jika memenuhi:

(i) $H \neq \emptyset$;

(ii) $ab^{-1} \in H$, untuk setiap $a, b \in H$.

(Fitriani dan Faisol, 2022).

Bukti. Diberikan subgrup H di G, akan ditunjukkan bahwa sifat (i) dan (ii) terpenuhi. Karena H adalah subgrup G, elemen identitas e termuat di H. Oleh karena itu, H bukan merupakan himpunan kosong, sehingga sifat (i) terpenuhi. Selanjutnya, diberikan sebarang $x, y \in H$ karena H adalah subgrup G, $y^{-1} \in H$, dan H tertutup terhadap operasi biner di G, yang menghasilkan $xy^{-1} \in H$, sehingga sifat (ii) terpenuhi.

Di sisi lain, asumsikan bahwa sifat (i) dan (ii) terpenuhi. Seperti yang ditunjukkan oleh sifat (i), $H \neq \emptyset$. Misalkan $x \in H$. Pilih $y = x$ dan gunakan sifat (ii), didapat $xx^{-1} = e \in H$, yang menunjukkan bahwa H memuat elemen identitas. Selain itu, karena H memuat elemen identitas e dan x, dari sifat (ii) didapat $ex^{-1} = x^{-1} \in H$. Dengan cara yang sama, didapat bahwa jika $y \in H$, maka $y^{-1} \in H$, dan dengan menggunakan sifat (ii), didapat $x(y^{-1})^{-1} = xy \in H$. Jadi, H adalah subgrup G karena tertutup terhadap operasi biner di G.

■

Berikut ini merupakan contoh dari subgrup.

Contoh 2.3.6 Diberikan grup $\langle \mathbb{Z}_8, +_8 \rangle$ dan $H = \{\overline{0}, \overline{4}\}$. Akan ditunjukkan H subgrup $\langle \mathbb{Z}_8, +_8 \rangle$. Berdasarkan Teorema 2.3.5, cukup tunjukkan bahwa $H \neq \emptyset$ dan $a -_8 b \in H$, untuk setiap $a, b \in H$. Perhatikan tabel Cayley berikut.

Tabel 2.2 Tabel Cayley H terhadap operasi $+_8$

$+_8$	$\overline{0}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$

Berdasarkan tabel Cayley tersebut, berlaku $a +_8 b \in H$ untuk setiap $a, b \in H$. Jadi, H adalah subgrup $\mathbb{Z}_8$.

Selanjutnya, diberikan contoh himpunan bagian suatu grup yang bukan subgrup.

Contoh 2.3.7 Diberikan himpunan $A = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ dan grup $\langle \mathbb{Z}_6, +_6 \rangle$. Akan ditunjukkan A bukan subgrup $\mathbb{Z}_6$. Pilih $\overline{1} \in A$. Karena $\overline{1} +_6 \overline{1} = \overline{2} \mod 6 = \overline{2} \notin A$, maka A bukan subgrup $\mathbb{Z}_6$.

2.4 Ring

Ring yang merupakan struktur dasar aljabar, akan dibahas dalam bagian ini. Akan diberikan contoh ring dan contoh yang bukan ring untuk menjelaskan ring sesuai dengan definisi.

Definisi 2.4.1 Himpunan R yang tak kosong disebut ring jika terdapat dua operasi biner tertutup, yaitu operasi penjumlahan dan perkalian, yang memenuhi syarat-syarat berikut.

1. $\langle R, + \rangle$ merupakan grup komutatif.
2. Untuk setiap $a, b, c \in R$, berlaku $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (R bersifat asosiatif pada operasi $\cdot$).
3. Untuk setiap $a, b, c \in R$, berlaku:
   (i) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$, (sifat distributif kiri);
   (ii) $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$, (sifat distributif kanan)

   (Wahyuni dkk., 2021).

Berikut diberikan beberapa contoh ring.

Contoh 2.4.1 Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_7 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\}$. Akan ditunjukkan $\langle \mathbb{Z}_7, +_7, \cdot \rangle$ merupakan ring.

1. Akan dibuktikan $\langle \mathbb{Z}_7, +_7 \rangle$ merupakan grup komutatif.
   (i) Akan ditunjukkan $+_7$ bersifat tertutup di $\mathbb{Z}_7$. Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{Z}_7$, berlaku $a +_7 b \in \mathbb{Z}_7$.
   (ii) Akan ditunjukkan $+$ bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}_7$. Diberikan sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}_7$, berlaku $(a +_7 b) +_7 c = a +_7 (b +_7 c)$.
   (iii) Akan ditunjukkan terdapat elemen identitas di $\mathbb{Z}_7$ terhadap operasi $+_7$. Diberikan sebarang $a \in \mathbb{Z}_7$, terdapat $\overline{0} \in \mathbb{Z}_7$ sedemikian sehingga $\overline{0} +_7 a = a +_7 \overline{0} = a$.
   (iv) Akan ditunjukkan setiap elemen di $\mathbb{Z}_7$ memiliki invers terhadap operasi $+_7$. Diberikan sebarang $a \in \mathbb{Z}_7$, terdapat $-a \in \mathbb{Z}_7$, sedemikian sehingga $a +_7 (-a) = (-a) +_7 a = \overline{0}$.

(v) Akan ditunjukkan $+_7$ bersifat komutatif di $\mathbb{Z}_7$. Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{Z}_7$, berlaku $a +_7 b = b +_7 a$.

Hal ini berarti, $\langle \mathbb{Z}_7, +_7 \rangle$ merupakan grup komutatif.

2. Akan ditunjukkan $\cdot$ bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}_7$. Diberikan sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}_7$, berlaku $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

3. Diberikan sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}_7$. Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_7$ bersifat distributif kiri dan kanan. Berlaku:

   (i) $a \cdot (b +_7 c) = (a \cdot b) +_7 (a \cdot c)$;

   (ii) $(a +_7 b) \cdot c = (a \cdot c) +_7 (b \cdot c)$.

Jadi, $\langle \mathbb{Z}_7, +_7, \cdot \rangle$ merupakan ring.

Contoh 2.4.2 Diberikan himpunan matriks $M_2(\mathbb{Z})$. Akan ditunjukkan $\langle M_2(\mathbb{Z}), +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

1. Akan dibuktikan $\langle M_2(\mathbb{Z}), + \rangle$ merupakan grup komutatif.

   (i) Akan ditunjukkan $+$ bersifat tertutup di $M_2(\mathbb{Z})$.
   Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h & i \\ j & k \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$, dengan $a, b, c, d, h, i, j, k \in \mathbb{Z}$.
   Berlaku $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h & i \\ j & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+h & b+i \\ c+j & d+k \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$.

   (ii) Akan ditunjukkan $+$ bersifat asosiatif di $M_2(\mathbb{Z})$.
   Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h & i \\ j & k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$, dengan $a, b, c, d, h, i, j, k, w, x, y, z \in \mathbb{Z}$.
   Berlaku

   $$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h & i \\ j & k \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} h & i \\ j & k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \right).$$

   (iii) Akan ditunjukkan terdapat elemen identitas di $M_2(\mathbb{Z})$ terhadap operasi $+$. Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$, terdapat $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$, sedemikian sehingga $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

(iv) Akan ditunjukkan setiap elemen di $M_2(\mathbb{Z})$ memiliki invers terhadap operasi $+$. Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$, terdapat $\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$, sedemikian sehingga $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(v) Akan ditunjukkan $+$ bersifat komutatif di $M_2(\mathbb{Z})$. Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h & i \\ j & k \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$. Berlaku $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h & i \\ j & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & i \\ j & k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Artinya, $\langle M_2(\mathbb{Z}), + \rangle$ merupakan grup komutatif.

2. Akan ditunjukkan $\cdot$ bersifat asosiatif di $M_2(\mathbb{Z})$. Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h & i \\ j & k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$.
   Berlaku $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} h & i \\ j & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h & i \\ j & k \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$.
3. Diberikan sebarang $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z})$. Akan ditunjukkan $M_2(\mathbb{Z})$ bersifat distributif kiri dan kanan. Berlaku
   (i) $A(B + C) = (AB) + (AC)$,
   (ii) $(A + B)C = (AC) + (BC)$.

Jadi, $\langle M_2(\mathbb{Z}), +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

Setelah mengetahui contoh-contoh dari ring, berikut ini diberikan contoh yang bukan ring.

Contoh 2.4.3 Diberikan $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$. Akan ditunjukkan $\langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$ bukan ring. Karena dalam $\mathbb{N}$ tidak terdapat 0 yang merupakan elemen identitas pada operasi penjumlahan, maka $\langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$ bukan ring.

Berikut ini merupakan penjelasan tentang ring komutatif. Karakteristiknya yang lebih sederhana membuat ring komutatif lebih mudah dipahami dan dianalisis.

Definisi 2.4.2 Diberikan suatu ring $\langle R, +, \cdot \rangle$. Jika R komutatif terhadap perkalian, yaitu untuk setiap $r, s \in R$ berlaku $rs = sr$, maka ring R disebut ring komutatif (Wahyuni dkk., 2021).

Berikut ini merupakan contoh dari ring komutatif.

Contoh 2.4.4 Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_7 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\}$. Akan ditunjukkan $\langle \mathbb{Z}_7, +_7, \cdot \rangle$ merupakan ring komutatif. Berdasarkan Contoh 2.4.1, $\mathbb{Z}_7$ merupakan ring. Diberikan sebarang $r, s \in \mathbb{Z}_7$, berlaku $rs = sr$. Jadi, $\mathbb{Z}_7$ ring komutatif.

Setelah mengetahui contoh dari ring komutatif, berikut diberikan contoh yang bukan ring komutatif.

Contoh 2.4.5 Diberikan ring matriks $M_2(\mathbb{Z})$ berdasarkan Contoh 2.4.2. Akan ditunjukkan $\langle M_2(\mathbb{Z}), +, \cdot \rangle$ bukan ring komutatif.
Pilih $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$. Berlaku $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$. Karena $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$, diperoleh $M_2(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ bukan ring komutatif.

Konsep ideal pada ring R digunakan untuk memahami struktur aljabar. Ideal dapat dianggap sebagai kelompok khusus dari ring yang mempertahankan beberapa sifat. Berikut diberikan definisi dan contoh ideal untuk mendapatkan pemahaman yang lebih baik.

Definisi 2.4.3 Diberikan R ring dan $I \subseteq R$. Himpunan I disebut ideal kiri, ideal kanan, atau ideal jika memenuhi syarat berikut.

1. Himpunan I disebut ideal kiri jika

   (i) $s_1 - s_2 \in I$, untuk setiap $s_1, s_2 \in I$;

   (ii) $rs_1 \in I$, untuk setiap $s_1 \in I$ dan untuk setiap $r \in R$.

2. Himpunan I disebut ideal kanan jika

   (i) $s_1 - s_2 \in I$, untuk setiap $s_1, s_2 \in I$;

   (ii) $s_1 r \in I$, untuk setiap $s_1 \in I$ dan untuk setiap $r \in R$.

3. Himpunan I disebut ideal jika

   (i) $s_1 - s_2 \in I$, untuk setiap $s_1, s_2 \in I$;

   (ii) $s_1 r, rs_1 \in I$, untuk setiap $s_1 \in I$ dan untuk setiap $r \in R$

(Wahyuni dkk., 2021).

Berikut ini diberikan contoh ideal kiri dari ring R.

Contoh 2.4.6 Diberikan ring matriks $M_2(\mathbb{Z})$ dan $I = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix} | x, y \in \mathbb{Z} \right\}$. Akan ditunjukkan I adalah ideal kiri dari ring $M_2(\mathbb{Z})$.

(i) Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix} \in I$.

Berlaku $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c & 0 \\ b-d & 0 \end{bmatrix} \in I$.

(ii) Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \in I$ dan $\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$.

Berlaku $\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} wa+xb & 0 \\ ya+zb & 0 \end{bmatrix} \in I$.

Jadi, I merupakan ideal kiri dari ring $M_2(\mathbb{Z})$.

Selanjutnya, diberikan contoh ideal kanan dari ring R.

Contoh 2.4.7 Diberikan ring matriks $M_2(\mathbb{R})$ dan $I = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} | x, y \in \mathbb{R} \right\}$. Akan ditunjukkan I adalah ideal kanan dari ring $M_2(\mathbb{R})$.

(i) Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$.

Berlaku $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c & b-d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$.

(ii) Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$ dan $\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Berlaku $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw+by & ax+bz \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$.

Jadi, I merupakan ideal kanan dari ring $M_2(\mathbb{R})$.

Untuk lebih memahami konsep ideal dari ring R, berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.4.8 Diberikan matriks $M_2(2\mathbb{Z}) \subseteq M_2(\mathbb{Z})$. Akan ditunjukkan $M_2(2\mathbb{Z})$ adalah ideal dari ring $M_2(\mathbb{Z})$.

(i) Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in M_2(2\mathbb{Z})$, dengan $a, b, c, d, e, f, g, h \in 2\mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in M_2(2\mathbb{Z})$. Berlaku $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix} \in M_2(2\mathbb{Z})$.

(ii) Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(2\mathbb{Z})$, dengan $a, b, c, d \in 2\mathbb{Z}$ dan $\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ dengan $e, f, g, h \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(2\mathbb{Z})$. Berlaku $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} \in M_2(2\mathbb{Z})$ dan $\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{bmatrix} \in M_2(2\mathbb{Z})$.

Jadi, $M_2(2\mathbb{Z}) \subseteq M_2(\mathbb{Z})$ merupakan ideal dari ring $M_2(\mathbb{Z})$.

Berikut merupakan contoh yang bukan ideal dari ring.

Contoh 2.4.9 Diberikan $\mathbb{Z}^+ \subseteq \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}^+$ bukan merupakan ideal dalam ring $\mathbb{Z}$. Pilih $1, 2 \in \mathbb{Z}^+$. Akan ditunjukkan $1 - 2 \in \mathbb{Z}^+$. Berlaku $1 - 2 = -1 \notin \mathbb{Z}^+$. Karena $1 - 2 \notin \mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^+$ bukan merupakan ideal dalam ring $\mathbb{Z}$.

Selanjutnya, pembahasan tentang homomorfisma ring. Dengan menggunakan homomorfisma, elemen dapat dipetakan ke dalam ring lain tanpa kehilangan sifat dasar dari operasi perkalian dan penjumlahan.

Definisi 2.4.4 Diberikan ring $\langle R_1, +_1, \cdot_1 \rangle$ dan ring $\langle R_2, +_2, \cdot_2 \rangle$. Suatu pemetaan $f : R_1 \to R_2$ disebut homomorfisma ring jika untuk setiap $x, y \in R$ berlaku:

(i) $f(x +_1 y) = f(x) +_2 f(y)$;

(ii) $f(x \cdot_1 y) = f(x) \cdot_2 f(y)$

(Wahyuni dkk., 2021).

Berikut ini adalah contoh dari homomorfisma ring untuk memperjelas pemahaman terkait konsep homomorfisma ring.

Contoh 2.4.10 Diberikan pemetaan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = x$. Akan ditunjukkan f adalah homomorfisma ring. Diberikan sebarang $x, y \in \mathbb{Z}$, berlaku:

(i) $f(x + y) = (x + y) = (x) + (y) = f(x) + f(y)$;

(ii) $f(x \cdot y) = (x \cdot y) = (x) \cdot (y) = f(x) \cdot f(y)$.

Oleh karena itu, f adalah homomorfisma ring.

Setelah mengetahui contoh homomorfisma ring, berikut adalah contoh yang bukan homomorfisma ring.

Contoh 2.4.11 Diberikan pemetaan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 2x$. Akan ditunjukkan f bukan homomorfisma ring. Pilih $6, 8 \in \mathbb{Z}$. Berlaku $f(6 \cdot 8) = 2(6 \cdot 8) = 2(48) = 96$ dan $f(6) \cdot f(8) = 2(6) \cdot 2(8) = 12 \cdot 16 = 192$. Karena $96 \neq 192$, maka f bukan homomorfisma ring.

Selanjutnya, pembahasan tentang endomorfisma ring. Endomorfisma berkaitan dengan homomorfisma ring sebagai berikut.

Definisi 2.4.5 Suatu homomorfisma dari ring R ke dirinya sendiri disebut endomorfisma (Wahyuni dkk., 2021).

Untuk lebih memahami tentang endomorfisma, berikut diberikan contoh dari endomorfisma.

Contoh 2.4.12 Diberikan pemetaan $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dengan $f(a, b) = (0, a)$. Akan ditunjukkan f homomorfisma ring. Diberikan sebarang $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, berlaku:

(i) $f[(a, b) + (c, d)] = f[(a + c, b + d)] = (0, a + c) = (0, a) + (0, c) = f(a, b) + f(a, c)$;

(ii) $f[(a, b) \cdot (c, d)] = f(ac, bd) = (0, ac) = (0, a) \cdot (0, c) = f(a, b) \cdot f(c, d)$.

Oleh karena itu, f merupakan homomorfisma ring. Karena f homomorfisma ke dirinya sendiri, maka f merupakan endomorfisma.

Setelah mengetahui contoh dari endomorfisma, berikut diberikan contoh yang bukan endomorfisma.

Contoh 2.4.13 Diberikan homomorfisma ring dari Contoh 2.4.10. Karena f homomorfisma dari ring tidak ke dirinya sendiri, maka f bukan endomorfisma.

2.5 Derivasi

Konsep derivasi pada ring akan dibahas pada bagian ini. Derivasi ring adalah generalisasi dari derivasi dalam kalkulus ke dalam struktur aljabar abstrak. Teori ini relevan dalam banyak bidang, termasuk teori kontrol, geometri aljabar, dan aljabar diferensial.

Definisi 2.5.1 Diberikan ring R. Suatu pemetaan $d : R \to R$ disebut derivasi jika:

(i) $d(a+b) = d(a) + d(b)$;

(ii) $d(ab) = d(a)b + ad(b)$

untuk setiap $a, b \in R$ (Ernanto, 2018).

Berikut ini merupakan contoh derivasi pada ring untuk memperjelas pemahaman terkait derivasi pada ring.

Contoh 2.5.1 Diberikan ring $M_2(\mathbb{Z})$ dengan pemetaan $d : M_2(\mathbb{Z}) \to M_2(\mathbb{Z})$ dan $d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix}$, untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$. Akan ditunjukkan d derivasi pada ring $M_2(\mathbb{Z})$. Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$. Berlaku

(i)

$$\begin{aligned} d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}\right) &= d\left(\begin{bmatrix} a+w & b+x \\ c+y & d+z \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(b+x) \\ c+y & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -x \\ y & 0 \end{bmatrix} \\ &= d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) + d\left(\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}\right) &= d\left(\begin{bmatrix} aw+by & ax+bz \\ cw+dy & cx+dz \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(ax+bz) \\ cw+dy & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -by & -bz \\ cw & cx \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} by & -ax \\ dy & -cx \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{bmatrix} \\ &= d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} d\left(\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Jadi, d merupakan derivasi pada ring $M_2(\mathbb{Z})$.

Berikut ini diberikan contoh yang bukan derivasi pada ring.

Contoh 2.5.2 Diberikan ring $\mathbb{Z}$ dengan pemetaan $d : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dan $d(a) = 3a$. Akan ditunjukkan d bukan derivasi pada ring $\mathbb{Z}$. Pilih $1, 2 \in \mathbb{Z}$. Berlaku $d(1 \cdot 2) = d(2) = 3(2) = 6$ dan $d(1)2 + 1d(2) = 3(1)2 + 1 \cdot 3(2) = 6 + 6 = 12$. Karena $6 \neq 12$, maka d bukan derivasi pada ring.

2.6 Derivasi-(α, β)

Selanjutnya, akan dibahas mengenai derivasi-(α, β) yang merupakan generalisasi dari derivasi ring. Derivasi ini mencakup dua endomorfisma α dan β, yang mempengaruhi bagaimana derivasi diproses dalam struktur aljabar.

Definisi 2.6.1 Diberikan ring R. Suatu pemetaan aditif $d : R \to R$ disebut derivasi-(α, β) apabila terdapat dua endomorfisma $\alpha, \beta \in R$ sedemikian sehingga

$$d(xy) = d(x)\alpha(y) + \beta(x)d(y)$$

untuk setiap $x, y \in R$ (Ali dkk., 2024).

Berikut ini merupakan contoh derivasi-(α, β).

Contoh 2.6.1 Diberikan ring $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Didefinisikan $d : R \to R$ dengan $d(a, b) = (0, a)$ dan dua endomorfisma $\alpha(a, b) = (a, 0)$, $\beta(a, b) = (b, a)$. Akan ditunjukkan d adalah derivasi-(α, β) berdasarkan Definisi 2.6.1. Diberikan sebarang $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Berlaku:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd).$$

Jadi, $d((a, b), (c, d)) = (0, ac)$.
Selanjutnya,

$$d(a, b)\alpha(c, d) = (0, a)(c, 0) = (0, 0).$$

Kemudian,

$$\beta(a, b)d(c, d) = (b, a)(0, c) = (0, ac).$$

Diperoleh:

$$d(a, b)\alpha(c, d) + \beta(a, b)d(c, d) = (0, 0) + (0, ac) = (0, ac).$$

Karena $d(a, b) = d(a, b)\alpha(c, d) + \beta(a, b)d(c, d)$, maka d merupakan derivasi-(α, β).

BAB III

METODE PENELITIAN

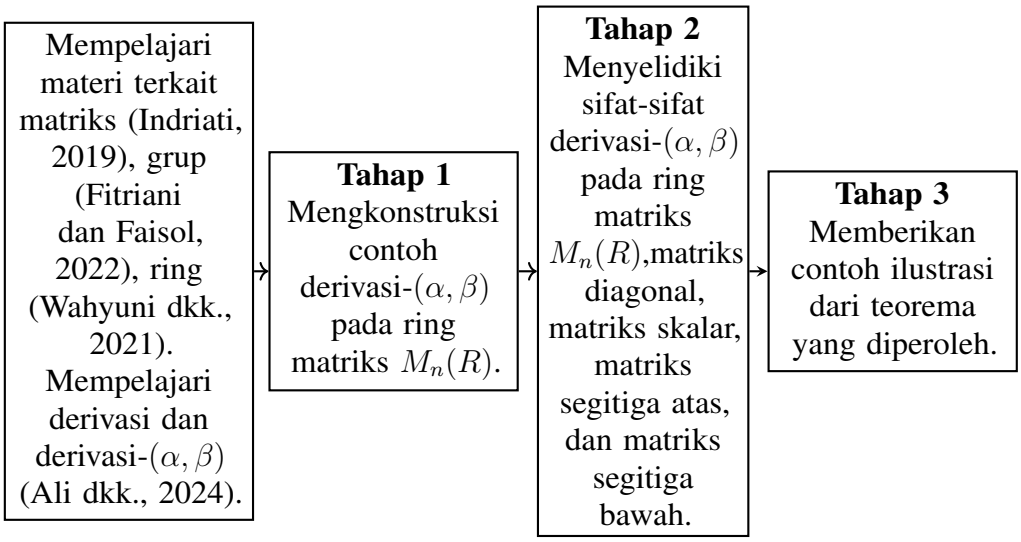
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Waktu penelitian dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2024/2025 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamat di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Penulis menggunakan studi literatur untuk mengumpulkan dan mengolah informasi penelitian dengan menggunakan referensi terkait seperti jurnal dan buku. Secara umum, prosedur yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mempelajari materi matriks, grup, ring, derivasi pada ring, dan derivasi-(α, β).
2. Mengkonstruksi contoh derivasi-(α, β) pada ring matriks $M_n(R)$.
3. Menyelidiki sifat-sifat derivasi-(α, β) pada ring matriks $M_n(R)$, matriks diagonal, matriks skalar, matriks segitiga atas, dan matriks segitiga bawah.
4. Memberikan contoh ilustrasi dari teorema yang diperoleh.



Gambar 3.1 Diagram Tahapan Penelitian

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Hasil analisis derivasi-(α, β) pada ring matriks $M_n(R)$ menunjukkan bahwa jika $d : R \to R$ merupakan derivasi-(α, β) pada ring R, maka derivasi tersebut dapat diterapkan pada setiap entri matriks untuk diperluas ke $M_n(R)$. Terdapat beberapa subset matriks $M_n(R)$ yaitu matriks diagonal yang hanya memiliki elemen bukan nol pada diagonal utama, matriks skalar yaitu bentuk khusus matriks diagonal dengan semua elemen diagonal bernilai sama, matriks segitiga atas yang semua elemen di bawah diagonal utamanya bernilai nol, dan matriks segitiga bawah yang semua elemen di atas diagonal utamanya bernilai nol.

Dalam matriks diagonal dan skalar, derivasi-(α, β) hanya memetakan elemen diagonal ke elemen diagonal lainnya. Dalam matriks segitiga atas dan segitiga bawah, derivasi-(α, β) hanya memengaruhi elemen yang berada di atas atau di bawah diagonal utama sesuai dengan sifat perkalian matriks. Sifat derivasi-(α, β) dalam ring R dapat diperluas ke berbagai subset dalam $M_n(R)$ tanpa kehilangan sifat dasarnya. Penelitian ini juga menyelidiki komposisi derivasi-(α, β) pada ring $R \times R$. Hasilnya menunjukkan bahwa komposisi derivasi-(α, β) terbukti di $R \times R$. Namun, pembuktian tidak dapat dilakukan pada penjumlahan dari derivasi-(α, β).

5.2 Saran

Dalam penelitian ini telah dibahas mengenai derivasi-(α, β) pada ring matriks $M_n(R)$ dan beberapa subsetnya. Penelitian lebih lanjut dapat dilakukan pada jenis matriks yang lebih kompleks. Diperlukan penelitian lebih lanjut memahami kondisi yang menyebabkan ketidakterbuktian dalam penjumlahan derivasi-(α, β) pada ring $R \times R$. Penelitian ini dapat mencakup analisis tentang karakteristik khusus dari α dan

β, bagaimana struktur ring mempengaruhi penjumlahan antara derivasi-(α, β), dan batasan-batasan atau kondisi tambahan yang mungkin diperlukan untuk mempertahan kan sifat derivasi-(α, β) dalam penjumlahan.

DAFTAR PUSTAKA

Ali, A., & Shujat, F. (2014). On generalized derivations of semiprime rings. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 93(1), 1-5.

Ali, S., Rafiquee, N. N., & Varshney, V. (2024). Certain Types of Derivations in Rings: A Suvey. *Journal Indonesia Math. Soc*. Vol 30. 2:256-306.

Bell, H. E., & Mason, G. (1987). On derivations in near-rings. In *North-Holland Mathematics Studies* (Vol. 137, pp. 31-35). North-Holland.

Cauchy, A. L. B. (1821). *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique*. Imprimerie royale.

Ernanto, I. (2018). Sifat-sifat Ring Faktor yang Dilengkapi Derivasi. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, 1(1), 12-21.

Fitriani & Faisol, A. 2022. *Grup*. Matematika, Yogyakarta. 132 hlm.

Hongan, M. (2017). Remarks on generalized (α, β)-derivations in semiprime rings. *Communications of the Korean Mathematical Society*, 32(3), 535-542.

Huang, S., & Rehman, N. (2016). Generalized derivations in prime and semiprime rings. *Bol. Soc. Paran. Mat*, 34, 29-34.

Indriati, K. (2019). *Matriks, Vektor, dan Program Linier*. Penerbit Unika Atma Jaya Jakarta.

Newton, I. (1687). *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. London: Joseph Streater.

Prihatin, B. Y. (2018). *Derivasi Tergeneralisasi dan*-Derivasi Tergeneralisasi pada Ring dengan Involusi* (Doctoral dissertation, Universitas Gadjah Mada).

Rasheed, M. K., Hameed, F. A., & Majeed, A. H. (2020, July). On Generalized (α, β) Derivation on Prime Semirings. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1591, No. 1, p. 012080). IOP Publishing.

Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., & Munandar, A. (2023). *Teori Representasi Grup Hingga*. UGM PRESS.

Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., Yuwaningsih, D. A., & Hartanto, A. D. (2021). *Teori ring dan modul*. UGM PRESS.