PENERAPAN METODE DEKOMPOSISI *ADOMIAN LAPLACE* DALAM MENENTUKAN SOLUSI PERSAMAAN *KORTEWEG-DE VRIES*

(Skripsi)

Oleh

ARLINDA FEBRIYANTI
2017031050

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

ABSTRACT

APPLICATION OF THE *ADOMIAN* LAPLACE DECOMPOSITION METHOD IN DETERMINING THE SOLUTION OF THE *KORTEWEG-DE VRIES* EQUATION

By

ARLINDA FEBRIYANTI

The *Adomian* Laplace decomposition method is a semi-analytic method that combines the Laplace transformation and the *Adomian* decomposition method in solving nonlinear differential equations. The *Korteweg-de Vries (KdV)* equation is an example of a nonlinear partial differential equation. This equation models water surface waves in channel. In this research, the *Adomian* Laplace decomposition method is applied to the *KdV* equation and solves a case study of several initial conditions. Then, the solution obtained was compared with the exact solution taken from previous research by Yassein & Aswhad (2019). Calculations using the *Adomian* Laplace decomposition method show that the solution obtained is the same as the exact solution.

Kata kunci: *Adomian* Laplace Decomposition Method, nonlinear partial differential equations, *Korteweg-de Vries* Equation, intial conditions.

ABSTRAK

PENERAPAN METODE DEKOMPOSISI *ADOMIAN LAPLACE* DALAM MENENTUKAN SOLUSI PERSAMAAN *KORTEWEG-DE VRIES*

Oleh

ARLINDA FEBRIYANTI

Metode dekomposisi *Adomian Laplace* merupakan metode semi analitik yang menggabungkan antara transformasi *Laplace* dan metode dekomposisi *Adomian* dalam menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier. Persamaan *Korteweg-de Vries (KdV)* adalah salah satu contoh persamaan diferensial parsial nonlinier. Persamaan ini memodelkan gelombang permukaan air dalam suatu saluran. Dalam penelitian ini, metode dekomposisi *Adomian Laplace* diterapkan pada persamaan *KdV* serta menyelesaikan studi kasus beberapa kondisi awal. Kemudian, solusi yang diperoleh dibandingkan dengan solusi eksak yang diambil dari studi sebelumnya oleh Yassein & Aswhad (2019). Dari perhitungan menggunakan metode dekomposisi *Adomian Laplace* menunjukkan bahwa solusi yang diperoleh sama dengan solusi eksaknya.

Kata kunci: Metode Dekomposisi *Adomian Laplace*, persamaan diferensial parsial nonlinier, persamaan *Korteweg-de Vries*, kondisi awal.

PENERAPAN METODE DEKOMPOSISI *ADOMIAN LAPLACE* DALAM MENENTUKAN SOLUSI PERSAMAAN *KORTEWEG-DE VRIES*

Oleh
ARLINDA FEBRIYANTI
2017031050

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
2024

Judul Skripsi	: **PENERAPAN METODE DEKOMPOSISI *ADOMIAN LAPLACE* DALAM MENENTUKAN SOLUSI PERSAMAAN *KORTEWEG-DE VRIES*.**
Nama Mahasiswa	: **Arlinda Febriyanti**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **2017031050**
Jurusan/Program Studi	: **Matematika/S1 Matematika**
Fakultas	: **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.	**Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si.**
NIP. 19740316 200501 1 001	NIP. 19930601 201903 2 021

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **27 Mei 2024**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Arlinda Febriyanti**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2017031050**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Penerapan Metode Dekomposisi *Adomian Laplace* dalam Menentukan Solusi Persamaan *Korteweg-de Vries***

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, 27 Mei 2024

Penulis

Arlinda Febriyanti

NPM. 2017031050

RIWAYAT HIDUP

Arlinda Febriyanti, dilahirkan di Palembang pada hari Jum'at tanggal 22 Februari 2002 sebagai anak tunggal dari pasangan suami istri bapak Satar Zuhri dan ibu Nuraida. Penulis menempuh pendidikan sekolah dasar di SD Negeri 1 Sinar Semendo pada tahun 2009-2014, kemudian penulis melanjutkan sekolah menengah pertama di SMP Negeri 1 Talang Padang pada tahun 2015-2017. Untuk menempuh jenjang pendidikan menengah atas, penulis melanjutkan sekolah di SMA Negeri 1 Pringsewu pada tahun 2018-2020.

Pada tahun 2020, penulis melanjutkan Pendidikan S1 di Universitas Lampung Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Jurusan Matematika melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN). Selama menjadi mahasiswa, penulis aktif di kegiatan kampus yaitu Himpunan Mahasiswa Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam sebagai Anggota Bidang Minat dan Bakat tahun 2021 dan Sekretaris Bidang Minat dan Bakat pada tahun 2022.

Pada bulan Januari-Februari tahun 2023, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di AJB Bumiputera 1912 Kantor Wilayah Lampung dan pada tahun yang sama penulis melakukan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Sribasuki, Kecamatan Kalirejo, Kabupaten Lampung Tengah, Provinsi Lampung.

KATA INSPIRASI

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"

(QS. Al-insyirah 94:5)

"Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya"

(Al-Baqarah : 286)

"Barang siapa keluar rumah untuk menuntut ilmu, makai a berada di jalan Allah hingga ia pulang"

(HR.Tirmidzi)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillah

Puji syukur kehadirat Allah Subhanahu Wata'ala atas limpahan nikmat dan karunia yang diberikan, sholawat serta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad Shallallahu 'Alaihi Wasallam.

Kupersembahkan Skripsi ini untuk :

Papa, Mama, dan Keluarga Tercinta

Terima kasih kepada Papa, Mama, dan Keluargaku tercinta yang senantiasa selalu mendoakan, memberi dukungan, dan kasih sayang yang tiada henti dalam perjalanan menempuh pendidikan dan pencapaianku.

Sahabat dan Orang Terdekatku

Terima kasih kepada para sahabat dan orang terdekatku yang selalu menemani, memberikan semangat, doa, dan motivasi serta kenangan yang indah selama ini.

Almamaterku Tercinta

UNIVERSITAS LAMPUNG

SANWACANA

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT. yang telah melimpahkan rahmat, taufiq, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **”**Penerapan Metode Dekomposisi *Adomian Laplace* dalam Menentukan Solusi Persamaan *Korteweg-de Vries***”.** Tidak lupa pula shalawat serta salam yang selalu tercurahkan kepada junjungan kita Nabi besar Muhammad SAW, serta keluarga-Nya, sahabat-Nya, dan para pengikut-Nya.

Dalam proses penulisan skripsi ini tentunya penulis menyadari bahwa tanpa adanya bantuan, bimbingan, serta kerja sama dari berbagai pihak sangatlah sulit bagi penulis untuk menyelesaikan laporan ini. Oleh karena itu, dengan ketulusan hati penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si, M.Si., selaku dosen pembimbing satu yang telah memberikan arahan dan masukan dalam proses pembuatan serta penyelesaian skripsi ini dengan baik.
2. Ibu Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si. selaku dosen pembimbing dua yang telah memberikan arahan dan masukan dalam proses pembuatan serta penyelesaian skripsi ini dengan baik.
3. Bapak Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku dosen pembahas pada sidang skripsi.
4. Ibu Dr. Khoirin Nisa, M.Si., selaku Pembimbing Akademik.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si, M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Dr. Eng Suripto Dwi Yuwono, M.T., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Bapak dan Ibu Dosen serta staf Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Orang tua tercinta yang telah memberikan dorongan secara moral maupun spiritual kepada penulis.
9. Keluarga tersayang yang selalu memberi doa dan dukungan kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.
10. Syahreza selaku *support system* saya yang selalu memberikan semangat, dorongan, dan motivasi untuk menyelesaikan skripsi.
11. Teman baik penulis, Devanisa, Anggita, Arinda, Demi, Micelle, dan Rani yang selalu mendengarkan keluh kesah penulis, memberi bantuan, dukungan, serta motivasi kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
12. Seluruh pimpinan HIMATIKA periode 2022 yang telah memberi warna di kehidupan kuliah penulis dan perjalanan dalam menyelesaikan skripsi ini.
13. Seluruh anggota bidang minat dan bakat periode 2022 yang telah membersamai penulis hingga akhir.
14. Seluruh pihak terkait lainnya yang telah banyak membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Serta berbagai pihak yang bersedia dengan senang hati membantu dalam menyelesaikan skirpsi dan masa studi penulis yang tidak dapat disebutkan satu-persatu. Penulis menyadari masih banyak kekurangan dalam penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis sangat mengharapkan krtitik dan saran untuk penyempurnaan skripsi ini. Akan tetapi, penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan informasi yang bermanfaat bagi penelitian selanjutnya.

Bandar Lampung, 27 Mei 2024
Penulis

Arlinda Febriyanti

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat turunan fungsi dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas. Berdasarkan jumlah variabelnya, persamaan diferensial dibagi menjadi dua jenis yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa hanya memuat satu variabel bebas. Sedangkan persamaan diferensial parsial memuat dua atau lebih variabel bebas (Sari, 2022). Persamaan diferensial parsial diklasifikasikan menjadi linier dan nonlinier. Persamaan diferensial parsial dikatakan linier jika pangkat variabel terikat dan setiap turunan parsial dalam persamaan tersebut adalah satu, serta koefisien variabel terikat dan koefisien dari setiap turunan parsial merupakan konstanta atau variabel bebas. Namun, jika salah satu dari kondisi tersebut tidak terpenuhi maka persamaan tersebut disebut nonlinier (Wazwaz, 2009).

Dalam berbagai disiplin ilmu seperti biologi matematika, matematika fluida, fisika matematika, dan berbagai bidang lainnya, terkadang muncul berbagai permasalahan yang perlu dipecahkan. Permasalahan tersebut dapat dimodelkan dengan menggunakan persamaan diferensial parsial nonlinier (Fathonah, dkk., 2017). Salah satu contoh persamaan diferensial parsial nonlinier adalah Persamaan *Korteweg-de Vries (KdV)*. Persamaan *KdV* pertama kali diturunkan oleh *Korteweg* dan *de Vries* pada tahun 1895. Persamaan ini merupakan model gelombang permukaan air dalam suatu saluran (Ahmad, 2016).

Persamaan *KdV* telah mendapat banyak perhatian dan dipelajari secara luas. Akan tetapi, persamaan nonlinier seperti persamaan *KdV* ini sulit untuk dipecahkan secara efektif baik secara analitik maupun numerik (Fathonah dkk, 2017). Meskipun demikian, sudah banyak diterapkan beberapa teknik analitik untuk memperkirakan solusi dari beberapa masalah nonlinier antara lain *Adomian Decomposition Method* (Younis & Hayani, 2023), *the Laplace Transform* (Bara, 2023), *Aboodh Iterative Method* (Almardy, dkk., 2023), *Modified Adomian Decomposition Method* (Salim et al, 2023).

Dari beberapa teknik yang telah digunakan oleh para peneliti terdahulu, terdapat salah satu teknik yang digunakan untuk mencari solusi persamaan diferensial parsial nonlinier yaitu metode dekomposisi *Adomian Laplace*. Metode ini merupakan salah satu metode yang akurat dan efektif untuk mencari penyelesaian dari persamaan diferensial nonlinier (Gaxiola, 2017). Dalam metode ini, persamaan diferensial ditulis sebagai persamaan operator diferensial. Kemudian, operator diferensial metode dekomposisi *Adomian* digantikan oleh operator transformasi *Laplace* $\mathcal{L}$ dan invers dari operator $\mathcal{L}$ adalah invers transformasi *Laplace* $\mathcal{L}^{-1}$ (Jaradat, 2008).

Beberapa penelitian sebelumnya telah banyak membahas mengenai penerapan metode dekomposisi *Adomian Laplace*. Pada tahun 2023, Omame & Zaman menerapkan metode dekomposisi *Adomian Laplace* dalam menentukan solusi persamaan Burger *coupled* fraksional waktu yang dimodifikasi. Kemudian, Andini dkk. (2020) melakukan studi dalam menentukan solusi untuk persamaan diferensial fraksional Riccati dan menganalisis kekonvergenannya menggunakan metode dekomposisi *Adomian Laplace*. Dengan metode yang sama, Sari, dkk., (2023) telah menyelesaikan solusi semi analitik untuk persamaan Burgers.

Yassein & Aswhad (2019) mengkaji solusi hampiran secara analitik untuk persamaan *KdV* menggunakan *efficient iterative method*. Kemudian, Satsanit & Arnuphap (2019) membahas tentang penyelesaian persamaan *KdV* dengan metode pertubasi homotopi *Laplace*, serta Akdi & Sedra (2013) melakukan pendekatan numerik dari solusi persamaan *KdV* menggunakan metode dekomposisi *Adomian*. Penelitian sebelumnya, solusi hampiran persamaan *KdV* dengan menggunakan metode dekomposisi *Adomian Laplace* belum ada yang melakukan. Oleh karena itu, pada penelitian ini penulis akan menerapkan metode dekomposisi *Adomian Laplace* dalam menyelesaikan persamaan *KdV*.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah mengkonstruksi dan mengaplikasikan metode dekomposisi *Adomian Laplace* dalam menentukan solusi hampiran persamaan *KdV*. Kemudian, membandingkan hasilnya dengan solusi persamaan *KdV* menggunakan metode iteratif semi analitik dari Yassein & Aswhad (2019).

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Menambah pengetahuan tentang metode dekomposisi *Adomian Laplace* dalam menyelesaikan persamaan *Korteweg-de Vries*.
2. Sebagai alternatif untuk memecahkan masalah yang berkaitan dengan persamaan lainnya.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaaan yang melibatkan satu atau lebih turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui dengan dua atau lebih variabel bebas (Kreyszig, 2006). Persamaan diferensial parsial disebut linier jika variabel terikat (*dependent variable*) dan turunannya mempunyai orde satu atau tidak terdapat perkalian antara variabel terikat dengan turunannya. Sebaliknya, persamaan diferensial parsial disebut tidak linier. Jika setiap suku dari persamaan diferensial parsial merupakan variabel terikat atau jika salah satu suku tersebut merupakan turunan maka disebut persamaan homogen dan jika terjadi sebaliknya maka persamaan diferensial disebut persamaan tak homogen.

Contoh.

1. Persamaan diferensial parsial linier :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \tag{2.2}$$

2. Persamaan diferensial parsial tidak linier :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.3}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 = w \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \tag{2.4}$$

(Makrup, 2015).

2.2 Operator Diferensial

Operator diferensial atau operator turunan secara umum dapat direpresentasikan dengan $\frac{\partial}{\partial t}(u) = L_t(u)$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u) = L_{tt}(u)$, $\frac{\partial^2}{\partial t \partial x}(u) = L_{tx}(u)$, $\frac{\partial}{\partial x}(u) = L_x(u)$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u) = L_{xx}(u)$. Jika L_t menyatakan operator turunan suatu fungsi, maka untuk inversnya (integral suatu fungsi) dinotasikan sebagai $\frac{1}{L_t}$ atau ${L_t}^{-1}$ yang didefinisikan oleh hubungan ${L_t}^{-1} = \int_0^t (u) dt$ (Cheniguel & Ayadi, 2011).

2.3 Persamaan *Korteweg-de Vries (KdV)*

Persamaan *KdV* merupakan representasi matematis dari gelombang permukaan air pada suatu saluran. Persamaan ini menggambarkan pergerakan dari suatu gelombang soliter (*soliton*) yang mempertahankan bentuknya ketika merambat di permukaan air pada saluran berdasarkan kondisi inisial/awal. Selain itu, persamaan ini juga dapat menggambarkan interaksi antar *soliton* yang diberikan pada kondisi awal tertentu. Persamaan ini digunakan untuk menggambarkan model gelombang air dangkal lemah pada suatu saluran dan model gelombang air panjang satu arah. Selanjutnya, persamaan ini juga ditemukan di berbagai bidang seperti perambatan gelombang pada nadi, serat optik, plasma, dan lain sebagainya.

Persamaan *KdV* terdiri atas tiga suku yaitu suku nonlinier, suku disipatif, dan suku yang melibatkan turunan terhadap waktu t. *Korteweg-de Vries* dkk. melakukan analisis dan menyajikan deskripsi penjalaran gelombang satu arah pada permukaan kanal yang dangkal dengan menyajikan persamaan matematis pada persamaan (2.6). Namun, secara umum persamaan *KdV* berbentuk sebagai berikut

$$u_t + \alpha u u_x + s u_{xxx} = 0 \tag{2.5}$$

dengan suku nonlinier $(\alpha u u_x)$ dan suku dispersif $s u_{xxx}$

$$u_t - 6 u u_x + u_{xxx} = 0 \tag{2.6}$$

dengan masalah nilai awal :

$$u(x, 0) = f(x) \tag{2.7}$$

(Ahmad, 2016).

2.4 Transformasi *Laplace*

Transformasi *Laplace* adalah metode transformasi integral yang ditemukan oleh *Pierre-Simon Laplace*. Metode ini merupakan pendekatan yang efektif dan praktis untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa dan parsial.

Definisi 1.

Diberikan fungsi $f(t)$ untuk setiap $t \geq 0$;

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{2.8}$$

Untuk semua nilai *s* yang dimana integralnya konvergen (Merdan & Atasoy, 2023).

Beberapa bentuk transformasi *Laplace* dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Rumus dasar transformasi *Laplace*

$\boldsymbol{f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}}$	$\boldsymbol{F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}}$
a	$\frac{a}{s}$
$t^n;\ \ n = 1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$

(Sari, 2022).

Teorema 1.

Jika c_1 dan c_2 adalah sebarang konstanta sedangkan $F_1(t)$ dan $F_2(t)$ adalah fungsi-fungsi dengan transformasi *Laplace*-nya masing-masing $F_1(t)$ dan $F_2(t)$, maka

$$\mathcal{L}\{c_1F_1(t) + c_2F_1(t)\} = c_1\mathcal{L}\{F_1(t)\} + c_2\mathcal{L}\{F_2(t)\} = c_1f_1(s) + c_2f_2(s) \quad (2.9)$$

Teorema 2.

Jika $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, maka

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = sf(s) - f(0) \quad (2.10)$$

Teorema 3.

Jika $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, maka

$$\mathcal{L}\{\int_0^t F(u)du\} = \frac{f(s)}{s} \quad (2.11)$$

(Sari, 2022).

2.5 Invers Transformasi *Laplace*

Definisi 2.

Diketahui fungsi kontinu $f(t)$, jika $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ maka $f(t)$ disebut invers transfromasi *Laplace* dari $F(s)$ dan dapat ditulis sebagai

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \quad (2.12)$$

Fungsi invers transformasi *Laplace* tunggal (Merdan & Atasoy, 2023).

Beberapa bentuk invers transformasi *Laplace* dapat dilihat pada Tabel 2.1.

2.6 Dekomposisi *Adomian*

Metode dekomposisi *Adomian* adalah salah satu metode penyelesaian persamaan diferensial parsial berdasarkan nilai awal dan hasil yang diperoleh cukup efektif untuk menghampiri solusi eksak. Metode ini diperkenalkan oleh seorang ahli ilmu matematika dari Amerika yaitu *George Adomian* pada tahun 1922-1996. Pada metode ini, persamaan diferensial yang diberikan ditulis dalam bentuk persamaan operator (Wartono & Muhajir, 2013).

Adapun persamaan diferensial ditulis dalam bentuk persamaan operator pada persamaan (2.13).

$$L_tu(x,t) + Ru(x,t) + Nu(x,t) = g(x,t) \quad (2.13)$$

dengan N adalah operator nonlinier dan L_t adalah operator diferensial linier orde lebih tinggi dari R dan diasumsikan dapat dibalik (*invertible*), R adalah adalah operator linier yang mencakup turunan parsial terhadap x dan g adalah suku nonhomogen. Persamaan (2.13) dapat ditulis sebagai

$$L_t u(x,t) = g(x,t) - Ru(x,t) - Nu(x,t) \tag{2.14}$$

Kemudian, jika persamaan (2.14) menggunakan operator ${L_t}^{-1}$ diperoleh :

$$u(x,t) = h + {L_t}^{-1} g(x,t) - {L_t}^{-1} Ru(x,t) - {L_t}^{-1} Nu(x,t) \tag{2.15}$$

dengan h adalah solusi persamaan homogen $L_t u(x,t) = 0$ dengan nilai awal atau nilai batas yang diketahui. Kemudian, metode dekomposisi *Adomian* mengasumsikan solusi $u(x,t)$ sebagai jumlah deret tak hingga yang dinyatakan sebagai :

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \tag{2.16}$$

Pada dekomposisi suku nonlinier $Nu(x,t)$, dapat diuraikan menjadi :

$$Nu(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{2.17}$$

dengan

$$A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N \sum_{k=0}^{\infty} u_k \lambda^k\right]_{\lambda=0}$$

A_n disebut polinomial *Adomian* yang didefinisikan sebagai:

$A_0 = N(u_0)$

$A_1 = u_1 N'(u_0)$

$A_2 = u_2 N'(u_0) + \frac{{u_1}^2}{2!} N''(u_0)$

$A_3 = u_3 N'(u_0) + u_1 u_2 N''(u_0) + \frac{{u_1}^3}{3!} N'''(u_0)$

$A_4 = u_4 N'(u_0) + \left(\frac{1}{2!}{u_2}^2 + u_1 u_3\right) N''(u_0) + \frac{1}{2!}{u_1}^2 u_2 N''(u_0) + \frac{{u_1}^4}{4!} N'''(u_0)$

$A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N \sum_{k=0}^{\infty} u_k \lambda^k\right]_{\lambda=0}$

Dengan melakukan substitusi persamaan (2.16) dan (2.17) ke persamaan (2.15) diperoleh :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = h + {L_t}^{-1} g(x,t) - {L_t}^{-1} R \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) - {L_t}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{2.18}$$

Dengan demikian, dari persamaan (2.18) diperoleh relasi rekursif :

$$u_0(x,t) = h + L_t^{-1} g(x,t) \tag{2.19}$$

dan

$$u_n(x,t) = -L_t^{-1}(Ru(x,t)_{n-1}) - L_t^{-1}(A_{n-1}), n = 1,2,3,\ldots \tag{2.20}$$

(Abdy, dkk., 2018).

2.7 Dekomposisi *Adomian Laplace*

Metode dekomposisi *Adomian Laplace* adalah pendekatan gabungan dari metode dekomposisi *Adomian* dan metode transformasi *Laplace*. Metode ini diterapkan untuk menentukan solusi perkiraan persamaan diferensial biasa dan parsial yang bersifat nonlinier. Metode ini telah diaplikasikan untuk menyelesaikan berbagai masalah, dapat dianggap juga sebagai metode ideal untuk persamaan diferensial biasa dan parsial yang mewakili model nonlinier. Dibandingkan dengan metode lain, dekomposisi *Adomian Laplace* ditandai dengan penggunaan parameter yang lebih sedikit, sehingga metode ini merupakan metode yang efektif tanpa memerlukan proses diskritisasi dan liniearitas yang rumit.

Diberikan persamaan diferensial parsial atau biasa

$$Fu(x,t) = g(x,t) \tag{2.21}$$

dengan kondisi awal

$$u(x,0) = f(x) \tag{2.22}$$

dengan F adalah operator diferensial yang mencakup suku linier dan nonliner.
Dari persamaan (2.13) diperoleh $L_t u(x,t)$ pada persamaan (2.23)

$$L_t u(x,t) = g(x,t) - Ru(x,t) - Nu(x,t) \tag{2.23}$$

Metode dekompososisi *Adomian Laplace* bekerja dengan memadukan metode dekomposisi *Adomian* dengan transformasi *Laplace*. Sehingga langkah selanjutnya adalah menerapkan transformasi *Laplace* pada kedua ruas persamaan (2.23)

$$\mathcal{L}\{L_t u(x,t)\} = \mathcal{L}\{g(x,t)\} - \mathcal{L}\{Ru(x,t)\} - \mathcal{L}\{Nu(x,t)\} \tag{2.24}$$

Bentuk matematika yang ekuivalen dengan (2.24) adalah

$$s\mathcal{L}\{u(x,t)\} - u(x,0) = \mathcal{L}\{g(x,t) - Ru(x,t) - Nu(x,t)\} \tag{2.25}$$

Substitusi nilai awal $u(x,0) = f(x)$

$$s\mathcal{L}\{u(x,t)\} - f(x) = \mathcal{L}\{g(x,t) - Ru(x,t) - Nu(x,t)\} \tag{2.26}$$

$$\mathcal{L}\{u(x,t)\} = \frac{f(x)}{s} + \frac{1}{s}\mathcal{L}\{g(x,t) - Ru(x,t) - Nu(x,t)\} \tag{2.27}$$

Dalam kasus homogen, $g(x,t) = 0$, sehingga diperoleh

$$\mathcal{L}\{u(x,t)\} = \frac{f(x)}{s} - \frac{1}{s}\mathcal{L}\{Ru(x,t) + Nu(x,t)\} \tag{2.28}$$

Sekarang, terapkan invers transformasi *Laplace* ke persamaan (2.28) :

$$u(x,t) = f(x) - \mathcal{L}^{-1}[\tfrac{1}{s}\mathcal{L}\{Ru(x,t) + Nu(x,t)\}] \tag{2.29}$$

Metode dekomposisi *Adomian* mengasumsikan solusi $u(x,t)$ dalam deret fungsi pada persamaan (2.30).

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \tag{2.30}$$

Bagian nonlinier $Nu(x,t)$ diuraikan menjadi

$$Nu(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) \tag{2.31}$$

dengan A_n adalah polinomial *Adomian*.

Wazwaz (2000) telah mengembangkan teknik alternatif untuk menghitung polinomial *Adomian* dengan cara yang lebih sederhana, yaitu :

$A_0 = u_{0_x}u_0$

$A_1 = u_{0_x}u_1 + u_0u_{1_x}$

$A_2 = u_{0_x}u_2 + u_{1_x}u_1 + u_{2_x}u_0$

$A_3 = u_{0_x}u_3 + u_{1_x}u_2 + u_{2_x}u_1 + u_{3_x}u_0$

$A_4 = u_{0_x}u_4 + u_{0_x}u_{4x} + u_{1_x}u_3 + u_1u_{3_x} + u_2u_{2_x}$

$\vdots$

$A_n = \sum_{i=0}^{n} u_{i_x} u_{n-i}$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.30) dan (2.31) ke dalam persamaan (2.29) diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = f(x) - \mathcal{L}^{-1}[\tfrac{1}{s}\mathcal{L}\{R\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n)\}] \tag{2.32}$$

Dari persamaan (2.32) diperoleh formula rekursif

$$u_0(x,t) = f(x) \tag{2.33}$$

dan

$$u_{n+1}(x,t) = -\mathcal{L}^{-1}[\tfrac{1}{s}\mathcal{L}\{R\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0,u_1,\dots,u_n)\}], n = 0,1,2,\dots \tag{2.34}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.33) dan (2.34) diperoleh solusi perkiraan dari persamaan diferensial (2.21) dan kondisi awal (2.22) menggunakan:

$$u(x,t) \approx \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \tag{2.35}$$

dengan

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} u_n(x,t) = u(x,t).$$

Metode dekomposisi *Adomian Laplace* memerlukan lebih sedikit pekerjaan dibandingkan dengan metode dekomposisi *Adomian* tradisional. Metode ini mengurangi volume perhitungan secara signifikan. Prosedur dekomposisi *Adomian* akan mudah diatur, tanpa harus linierisasi permasalahan. Dalam pendekatan ini, solusi ditemukan dalam bentuk deret konvergen dengan komponen yang mudah dihitung. Dalam banyak kasus, konvergensi deret ini sangat cepat dan hanya diperlukan beberapa suku untuk mendapatkan gambaran tentang perilaku solusi (Merdan & Atasoy, 2023).

2.8 Deret Taylor dan Maclaurin

Teorema 4. Teorema ketunggalan (*Uniqueness Theory*)
Andaikan f memenuhi

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots \tag{2.36}$$

untuk semua x dalam suatu interval di sekitar a maka,

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{2.37}$$

Jika $a = 0$, maka deret yang berpadanan disebut deret Maclaurin.

Berikut merupakan deret Maclaurin yang penting.

1. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \qquad -1 < x < 1$
2. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots \qquad -1 < x \le 1$

3. $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \ldots \qquad -1 \leq x \leq 1$
4. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \ldots$
5. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots$
6. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots$
7. $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots$
8. $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots$
9. $(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1} x + \binom{p}{2} x^2 + \binom{p}{3} x^3 + \binom{p}{4} x^4 + \ldots \qquad -1 < x < 1$

(Varberg, dkk., 2007).

2.9 Induksi Matematika

Induksi matematika adalah metode pembuktian untuk proposisi bilangan bulat. Metode ini merupakan sebuah teknik pembuktian yang baku dalam matematika. Proses induksi matematika umumnya terbagi menjadi tiga langkah, yaitu basis induksi, langkah induksi, dan kesimpulan. Berdasarkan jenisnya dapat digolongkan menjadi induksi sederhana (induksi lemah), induksi yang dirampatkan (induksi yang diperumum), dan induksi kuat.

Teorema 5. Prinsip induksi sederhana

Misalkan $p(n)$ adalah suatu pernyataan tentang bilangan bulat positif dan ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n. Maka untuk membuktikan teorema ini perlu menunjukkan bahwa :

1. $p(1)$ benar, dan
2. Jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq 1$,
3. $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Teorema 6. Prinsip induksi yang dirampatkan

Jika $p(n)$ adalah proposisi tentang bilangan bulat dan ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat postif $n \geq n_0$ yang artinya tidak hanya bilangan bulat yang dimulai dari 1 saja. Maka untuk membuktikan teorema ini perlu menunjukkan bahwa :

1. $p(n_0)$ benar, dan
2. Jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq n_0$,
3. $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat postif $n \geq n_0$.

Teorema 7. Prinsip induksi kuat

Misalkan $p(n)$ adalah proposisi perihal bilangan bulat dan ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Untuk membuktikan teorema ini perlu menunjukkan bahwa :

1. $p(n_0)$ benar, dan
2. Jika $p(n_0)$ benar, $p(n_0+1)$, …, $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq n_0$,
3. $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat postif $n \geq n_0$.

(Munir, 2010).

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada Semester Ganjil tahun ajaran 2023/2024 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

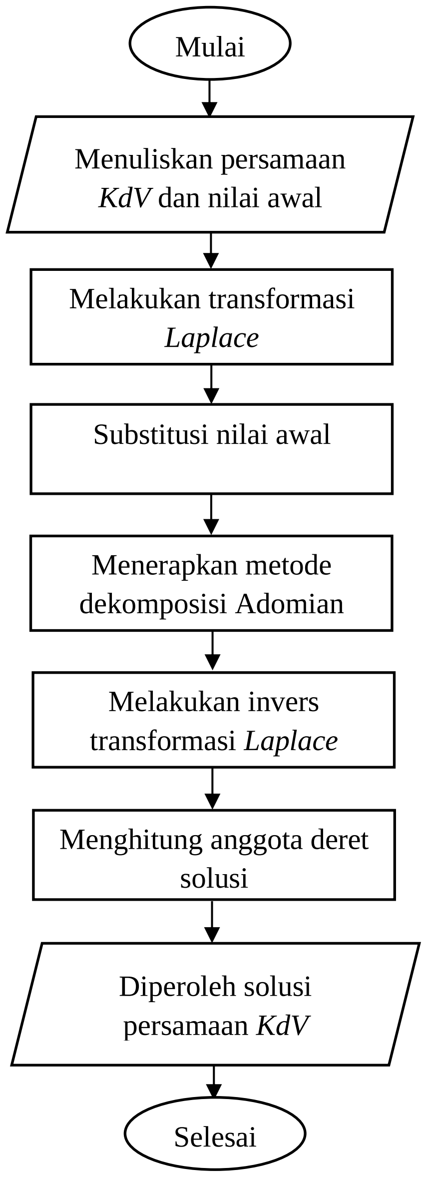
3.2 Metode Penelitian

Adapun metode penelitian pada penelitian ini :

1. Menentukan solusi hampiran persamaan *KdV* dengan kondisi awal secara umum yaitu $u(x,0) = f(x)$ menggunakan dekomposisi *Adomian Laplace* dengan langkah sebagai berikut :
   a. Menuliskan bentuk lengkap persamaan *KdV* dengan kondisi awal.
   b. Menerapkan transformasi *Laplace* pada kedua ruas pada persamaan *KdV*.
   c. Mensubstitusi nilai awal.
   d. Menerapkan metode dekomposisi *Adomian* dengan mensubstitusi asumsi penyelesaian dalam bentuk deret tak hingga dan polinomial *Adomian* ke dalam persamaan awal. Kemudian dilakukan manipulasi aljabar hingga diperoleh relasi rekursif.
   e. Menerapkan invers transformasi *Laplace* pada relasi rekursif sehingga terbentuk rumus untuk menghitung anggota dari deret solusi.
   f. Menghitung anggota-anggota dari deret solusi.
   g. Diperoleh solusi hampiran persamaan *KdV*.
2. Menyelesaikan studi kasus untuk persamaan *KdV* menggunakan metode dekomposisi *Adomian Laplace* dengan kondisi awal $u(x,0) = 6x$ dan

$u(x, 0) = \frac{1}{6}(x - 1)$ serta membandingkan solusinya dengan metode iteratif semi analitik dari Yassein & Aswhad (2019).

Adapun *flowchart* penyelesaian persamaan *KdV* dengan metode dekomposisi *Adomian Laplace* disajikan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 *Flowchart* penyelesaian persamaan *KdV*.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa solusi persamaan *KdV* menggunakan metode dekomposisi *Adomian Laplace* dengan syarat awal $u(x,0) = 6x$ dan $u(x,0) = \frac{1}{6}(x-1)$ adalah $u(x,t) = \frac{6x}{1-36t}$, $|36t| < 1$ dan $u(x,t) = \frac{1}{6}\left(\frac{x-1}{1-t}\right)$, $|t| < 1$. Solusi ini memiliki hasil yang sama dengan solusi menggunakan metode iteratif semi analitik dari Yassein & Aswhad (2019).

5.2 Saran

Adapun saran untuk penelitian selanjutnya yaitu menyelesaikan persamaan *KdV* tak homogen dengan menggunakan metode dekomposisi *Adomian Laplace* atau dengan metode lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdy, M., Side, S., & Arisandi, R. 2018. Penerapan Metode Dekomposisi *Adomian Laplace* dalam Menentukan Solusi Persamaan Panas. *Journal of Mathematics, Computations, and Statistics*. 1(2): 206-211.

Ahmad, D. 2016. Solusi Numerik Persamaan *Korteweg-de Vries* Burgers dengan Metode Spektral. *Jurnal Eksakta*. 2: 92-98.

Akdi, M. & Sedra, M. B. 2013. Numerical *KdV* Equation by the *Adomian* Decomposition Method. *American Journal of Modern Physics*. 2(3): 111-115.

Almardy, I. A., Farah, R., Ahmed, M. Y., Alkeer, M. A., Mohammed, M. A., & Osman, A. K. 2023. Application of the Aboodh Iterative Method to Fractional Partial Differential Equations. *International Journal of Advanced Research in Science Communication and Technology*. 3(1): 139-144.

Andini, H. M., Djauhari, E., & Johansyah, M. D. 2020. Solusi Persamaan Diferensial Fraksional Riccati Menggunakan Metode Dekomposisi *Adomian Laplace* dan Analisis Kekonvergenannya. *Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika.* 3(2): 109-119.

Bara, A. U. B. 2023. The Application of the *Laplace* Transform in the Heat Equation. *International Journal of Health Engineering and Technology*. 1(6): 696-701.

Cheniguel, A. & Ayadi, A. 2011. Solving Non Homogeneous Heat Equation by the *Adomian* Decomposition Method. *Journal of International Mathematical Forum.* 6(13): 639-649.

Fathonah, F. S., Zulkarnaen, D., & Sukaesih, E. 2017. Pencarian Solusi Persamaan Diferensial Parsial Nonlinier Menggunakan Metode Transformasi Pertubasi Homotopi dan Metode Dekomposisi *Adomian*. *Jurnal Kubik*. 2(1): 35-42.

Gaxiola, O. G. 2017. The *Laplace Adomian* Decomposition Method Applied to the Kundu-Eckhaus Equation. *International Journal of Mathematics and its Aplications.* 5: 1-12.

Jaradat, O, K. 2008. *Adomian* Decomposition Method for Solving Abelian Differential Equations. *Journal of Applied Sciences*. 8(10): 1962-1966.

Kreyszig, E. 2006. *Advanced Engineering Mathematics 9th Edition.* Singapore : Jhon Wiley and Sons.

Makrup, L. 2015. *Model Sistem Fisik dengan Persamaan Diferensial Parsial dan Aplikasinya dalam keteknikan.* Yogyakarta : Pustaka Belajar.

Merdan, M. & Atasoy, N. 2023. On Solution of Random Partial Differential Equations with *Laplace Adomian* Decomposition Method. *Journal of Cumhuriyet Science*. 44(1): 160-169.

Munir, R. 2010. *Matematika Diskrit Edisi 3*. Bandung : Informatika Bandung.

Omame, A. & Zaman, F. D. 2023. Solution of the Modified Time Fractional Coupled Burgers Equations Using *Laplace Adomian* Decomposition Method. *Journal of Acta Mechanica Et Automatica*. 17(1): 124-132.

Salim, B. J., Thanoon, S. R., & Qasim, A. F. 2023. Modified *Adomian* Decomposition Method with Genetic Algorithm for Solving Nonlinier Belousov-Zhabonfikii System. *College of Basic Education Researches Journal*. 19(2): 846-857.

Sari, H. K. 2022. Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial Menggunakan Transformasi *Laplace. Buletin Ilmiah Matematika Statistika dan Terapannya*. 11(1): 139-148.

Sari, B., Ambarwati, L., & Wiraningsih, E. D. 2023. Solusi Semi Analitik Persamaan Burgers Menggunakan Metode Dekomposisi *Adomian* Lalpace. *Jurnal Matematika dan Terapan*. 5(2): 67-77.

Satsanit, W. & Arnuphap, K. 2019. On the Solution of *Korteweg-de Vries* Equation by *Laplace* Homotopy Pertubation Method. *Journal of Mathematics Reasearch.* 11(4): 77-85.

Varberg, D., Purcell, E. J., & Rigdon, S. E. 2007. *Kalkulus Edisi Kesembilan Jilid 2*. Jakarta : Erlangga.

Wartono & Muhajir, M. N. 2013. Penyelesaiaan Persamaan Riccati dengan menggunakan Metode Dekomposisi *Adomian Laplace*. *Jurnal Sains, Teknologi, dan Industri.* 10(2).

Wazwaz, A. M. 2000. A New Algorithm for Calculating *Adomian* Polynomials for Nonlinear Operators. *Journal of Applied Mathematics and Computation*. 111: 53-69.

Wazwaz, A. M. 2009. *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory.* Beijing : Higher Education Press.

Yassein, S. M. & Aswhad A. A. 2019. Efficient Iterative Method for Solving *Korteweg-de Vries* Equations. *Iraqi Journal of Science*. 60(7): 1575-1583.

Younis, T. M. & Hayani A. W. 2023. A Numerical Study for Solving the System of Fuzzy Fredholm Integral Equation of the Second Kind Using the *Adomian* Decomposition Method. *Iraqi Journal of Science*. 64(7): 3507-3530.