SIFAT-SIFAT HOMOMORFISMA SEMIRING PADA KOLEKSI HIMPUNAN *ROUGH* MENGGUNAKAN KONSEP PRABA

Tesis

Oleh

RETNO NOVITA SARI
2227031008

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

ABSTRAK

THE PROPERTIES OF SEMIRING HOMOMORPHISM IN ROUGH SETS USING THE CONCEPT OF PRABA

By

Retno Novita Sari

An information system is formed based on the universal set U and the attributes A, which are expressed with the notation (U, A) and the membership value of the set. The fuzzy and form equivalence classes are based on $IND(P)$. If given set $X \subseteq U$, the set of ordered pairs of upper approximations of $\overline{P}(X)$ and the lower approximation of $\underline{P}(X)$ is called a rough set if $\overline{P}(X) - \underline{P}(X) \neq \emptyset$, then given the set of all defined rough sets $T = \{RS(X)|X \subseteq U\}$. In this study, homomorphism in rough sets rough semirings were constructed using the Praba concept with operations meet ($\triangle$) and join ($\triangledown$) and provided construction the properties of homomorphism in rough sets semirings using the Praba concept, as well as a program to prove semirings in rough sets with operations meet ($\triangle$) and join ($\triangledown$) using the Praba concept.

Keywords: *Indiscernibility relation, approximation space, rough set, semirings in rough sets, Praba concept*

ABSTRAK

SIFAT-SIFAT HOMOMORFISMA SEMIRING PADA KOLEKSI HIMPUNAN *ROUGH* MENGGUNAKAN KONSEP PRABA

Oleh

Retno Novita Sari

Suatu sistem informasi dibentuk berdasarkan himpunan semesta U dan atribut A yang dinyatakan dengan notasi (U, A) dengan nilai keanggotaan himpunan *fuzzy* membentuk kelas-kelas ekuivalensi berdasarkan $IND(P)$, jika diberikan himpunan $X \subseteq U$, maka himpunan pasangan berurut aproksimasi atas $\overline{P}(X)$ dan aproksimasi bawah $\underline{P}(X)$ disebut himpunan *rough* jika $\overline{P}(X) - \underline{P}(X) \neq \emptyset$, selanjutnya diberikan himpunan dari semua himpunan *rough* yang didefinisikan $T = \{RS(X)|X \subseteq U\}$. Pada penelitian ini dikonstruksi homomorfisma semiring pada koleksi himpunan *rough* menggunakan konsep Praba dengan operasi *meet* ($\triangle$) dan *join* ($\triangledown$) serta diberikan konstruksi sifat-sifat homomorfisma semiring pada koleksi himpunan *rough* menggunakan konsep Praba, selanjutnya dibuat program untuk menentukan semiring pada koleksi himpunan *rough* dengan operasi *meet* ($\triangle$) dan *join* ($\triangledown$) menggunakan konsep Praba.

Kata-kata kunci: *Relasi indiscernibility, ruang aproksimasi, himpunan rough, semiring pada himpunan rough, konsep praba*

SIFAT-SIFAT HOMOMORFISMA SEMIRING PADA KOLEKSI HIMPUNAN *ROUGH* MENGGUNAKAN KONSEP PRABA

RETNO NOVITA SARI

Tesis

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
MAGISTER MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

Judul Tesis	:	**SIFAT-SIFAT HOMOMORFISMA SEMIRING PADA KOLEKSI HIMPUNAN *ROUGH* MENGGUNAKAN KONSEP PRABA**
Nama Mahasiswa	:	**Retno Novita Sari**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2227031008**
Program Studi	:	**Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.
NIP 19840627 200604 2 001

Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.
NIP 19800206 200312 1 003

2. Ketua Program Studi Magister Matematika

Dr. Fitriani,S.Si., M.Sc.
NIP. 19840627 200604 2 001

MENGESAHKAN

1. tim penguji

Ketua	:	**Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**	....
Sekretaris	:	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**1. Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.**	....
	:	**2. Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 19711001 200501 1 002

3. Direktur Program Pasca Sarjana

Prof. Dr. Ir. Murhadi, M.Si.
NIP. 19640326 199802 1 001

Tanggal Lulus Ujian Tesis: **31 Januari 2025**

PERNYATAAN TESIS MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Retno Novita Sari**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2227031008**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Sifat-Sifat Homomorfisma Semiring Pada Koleksi Himpunan *Rough* Menggunakan Konsep Praba**

Dengan ini menyatakan bahwa tesis ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa tesis ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 31 Januari 2025

Penulis,

Retno Novita Sari

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Retno Novita Sari yang lahir di Gunung Madu, Lampung Tengah pada tanggal 5 November 1986. Penulis merupakan anak kedua dari tiga bersaudara yang terlahir dari pasangan Subarjo dan Sujiati.

Penulis menyelesaikan pendidikan Sekolah Dasar di SD Negeri 4 Gunung Madu pada tahun 1998, menyelesaikan Pendidikan Sekolah Menengah Pertama di SMP Satya Dharma Sudjana Gunung Madu pada tahun 2001, dan menyelesaikan Sekolah Menengah Atas di SMA Negeri 6 Yogyakarta pada tahun 2004. Selanjutnya, penulis menyelesaikan Sarjana Strata-1 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung pada tahun 2008. Pada tahun 2022, penulis terdaftar sebagai mahasiswa Program Magister di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.

KATA INSPIRASI

”Apapun juga yang kamu perbuat, perbuatlah dengan segenap hatimu seperti untuk Tuhan dan bukan untuk manusia”

(Kolose 3:23)

”Pertolonganku ialah dari Tuhan, yang menjadikan langit dan bumi”

(Mazmur 121:2)

”Hargailah dan Syukurilah apa yang kita miliki saat ini karena tanpa kita sadari kita sangat beruntung telah memilikinya”

(Retno Novita Sari)

”Untuk berhasil dalam hidup, kita harus tetap berada dalam zona kekuatan kita, terus-menerus keluar dari zona nyaman kita”

(John C.Maxwell)

PERSEMBAHAN

Dalam Nama Bapa, Putera dan Roh Kudus, Amin.
Puji dan syukur kehadirat Allah Yang Maha Esa atas kasih, berkat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini dengan baik.

Dengan penuh syukur, kupersembahkan karya ini kepada:

Keluarga Tercinta

Terimakasih kepada keluargaku terkasih untuk semua do'a, kasih sayang, nasehat dan dukungan yang diberikan dalam segala hal dan selalu memberikan semangat dan motivasi yang baik.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat berjasa dalam membantu, memberikan masukan, arahan, serta ilmu yang berharga.

Sahabat – Sahabatku

Terimakasih kepada sahabat – sahabatku atas semua do'a, dukungan, semangat, serta canda tawa keceriaan selama masa perkuliahan ini.

Almamater Tercinta Universitas Lampung

SANWACANA

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yesus Kristus atas limpahan kasih, berkat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini yang berjudul ”Sifat-Sifat Homomorfisma Semiring pada Koleksi Himpunan *Rough* Menggunakan Konsep Praba” dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan.

Dalam kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing I sekaligus pembimbing akademik atas kesediaan waktu dalam memberikan arahan, motivasi, bimbingan, serta saran kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini.

2. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan, serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan tesis ini.

3. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D. selaku Penguji I yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi yang membangun kepada penulis selama proses penyusunan tesis ini.

4. Ibu Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si. selaku Penguji II yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi yang membangun kepada penulis selama proses penyusunan tesis ini.

5. Ibu Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku Ketua Prodi Magister Matematika yang telah memberikan arahan, motivasi, bimbingan, serta saran kepada penulis selama pendidikan ini.

6. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang telah memberikan arahan kepada penulis selama pendidikan ini.

7. Bapak Prof. Drs. Mustofa, M.A., Ph.D. selaku dosen pembimbing akademik atas bimbingan dan saran kepada penulis selama menjalani pendidikan ini.

8. Seluruh dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam Universitas Lampung.

9. Bapakku, Alm. Ibuku, Suamiku tersayang, Bapak, Mama, Keluarga Adekku Wening, Keluarga Adekku Antonius, keponakan-keponakanku Denja, Damar, Nathan, adekku Fanny, Jovi, Abel, Etha dan keluarga besar yang selalu memotivasi, memberikan dukungan dan do'a kepada penulis.

10. Terimakasih kepada diriku sendiri karena sudah berjuang dan melangkah sejauh ini.

11. Teman – teman satu bimbingan yaitu Kak Dona, Salsa, Bidari, dan Evi yang telah memberikan semangat, motivasi maupun saran kepada penulis.

12. Teman – teman Jurusan Magister Matematika angkatan 2022 yaitu Nana, Ayu, Astri, Jani, Akmal, Putri, Feri yang sudah banyak membantu selama masa perkuliahan ini.

13. Keluarga Besar PKMI Immanuel Bandar Lampung, KPP Ibu Dame Truly Gultom, Bapak Darwin Pangaribuan, Pimpinan Perguruan Pdt. Eirene Marheni laluba atas doa dan dukungan kepada penulis selama pendidikan ini.

14. Keluarga besar SMA Immanuel terkhusus Kepala Sekolah Bapak Markus Sampe Bangun, sahabat-sahabat Ibu Meita, Bapak Yoko, Bapak Thomas, Ibu Ines, Ibu Sri, Ibu Novi, Ibu Yuli, Ibu Getri, Ibu Marsel, Ibu Atta dan semua keluarga besar SMA Immanuel yang telah memberikan dukungan selama pendidikan ini.

15. Semua pihak yang membantu dalam proses penyusunan tesis ini yang tidak dapat penulis sebut satu persatu.

Semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa tesis ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan tesis ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung,

Retno Novita Sari

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Konsep teori himpunan *rough* (*rough set theory*) dikenalkan pertama kali oleh Zdzislaw Pawlak pada tahun 1982 (Praba dkk., 2015). Teori himpunan *rough* merupakan perluasan dari teori himpunan dan didefinisikan sebagai sepasang himpunan aproksimasi bawah dan aproksimasi atas yang digunakan untuk membantu mengelompokkan dan menganalisa data yang memiliki informasi yang tidak pasti dan tidak lengkap. Konsep dasar dari teori himpunan *rough* yang dikemukakan oleh Pawlak adalah relasi ekuivalensi yang bersifat refleksif, simetris, dan transitif yang membentuk kelas-kelas ekuivalensi serta membangun aproksimasi bawah dan aproksimasi atas.

Diberikan suatu himpunan tak kosong berhingga S yang disebut himpunan semesta dan θ adalah relasi ekuivalensi di S. Pasangan berurut himpunan semesta S dan relasi ekuivalensi θ yang dinyatakan dengan notasi (S, θ) disebut sebagai ruang aproksimasi (Miao dkk., 2005). Jika terdapat himpunan $X \subseteq S$, aproksimasi atas dari X pada suatu ruang aproksimasi (S, θ) dinyatakan dengan notasi $\overline{P}(X)$ dan aproksimasi bawah dari X pada suatu ruang aproksimasi (S, θ) dinyatakan dengan notasi $\underline{P}(X)$. Selanjutnya himpunan pasangan berurut aproksimasi atas dan aproksimasi bawah yang dinotasikan dengan $P(X)$ merupakan himpunan *rough* jika $\overline{P}(X) - \underline{P}(X) \neq \emptyset$.

Proses-proses yang dimodelkan dalam dunia nyata seringkali tidak eksak. Biasanya, realitas yang terkait dengan ketidakpastian tidak dapat dimodelkan sebagaimana adanya dan ada keterbatasan dalam melakukan pemodelan. Himpunan *fuzzy* memungkinkan seseorang untuk bekerja dalam situasi yang tidak pasti dan ambigu dan memecahkan masalah yang tidak diharapkan atau masalah dengan informasi yang tidak lengkap. Himpunan *fuzzy* adalah himpunan yang elemen-elemennya memiliki derajat keanggotaan. Himpunan *fuzzy* telah diperkenalkan oleh Zadeh (1965) sebagai perluasan dari pengertian himpunan klasik.

Dalam teori himpunan klasik, keanggotaan unsur-unsur dalam suatu himpunan dinilai berdasarkan kondisi bivalen yaitu suatu unsur termasuk milik suatu himpunan atau bukan. Sebaliknya, teori himpunan *fuzzy* mengijinkan penilaian bertahap dari keanggotaan elemen dalam himpunan, hal ini dijelaskan dengan bantuan fungsi keanggotaan yang dinilai dalam interval bilangan real [0,1]. Himpunan *fuzzy* menggeneralisasi himpunan klasik, karena fungsi karakteristik himpunan klasik adalah kasus khusus dari fungsi keanggotaan himpunan *fuzzy*, jika himpunan *fuzzy* hanya mengambil nilai 0 atau 1.

Berbagai penelitian telah dilakukan mengenai teori himpunan *rough* dan penerapannya. Pada tahun 2013, Praba dkk. pertama kali mengembangkan konsep himpunan *rough lattice* lalu pada tahun yang sama Praba dkk. juga meneliti mengenai penerapan himpunan *rough* pada monoid regular komutatif. Pada tahun 2015, Sinha dan Prakas meneliti modul proyektif *rough*. Pada tahun 2015, penelitian dikembangkan lagi oleh Praba dkk. dengan mengkaji penerapan himpunan *rough* pada semiring. Tahun 2016, Praba dkk. meneliti graf total dan graf komplemen dari semiring *rough*. Pada tahun yang sama, Wang dan Zhan melanjutkan penelitian mengenai *rough* semigrup dan *rough fuzzy* berdasarkan ideal *fuzzy*, lalu pada tahun 2017 Jesmalar mengkaji homomorfisma dan isomorfisma dari grup *rough*. Pada tahun 2022, penelitian dilanjutkan oleh Nugrah dkk. mengenai penerapan konsep himpunan *rough* pada struktur grup. Pada tahun yang sama, Hafifullah dkk. meneliti mengenai sifat-sifat barisan V-Koeksak *rough* dalam grup *rough*, dan tahun 2023 Dwiyanti dkk. membahas penerapan konsep himpunan *rough* pada struktur modul proyektif.

Berdasarkan perkembangan dari penelitian-penelitian yang telah diuraikan sebelumnya, pada penelitian ini akan diteliti tentang homomorfisma semiring pada koleksi himpunan *rough* serta menyelidiki sifat-sifat homomorfisma semiring pada koleksi himpunan *rough* menggunakan konsep Praba serta membuat program *Phyton* untuk menentukan suatu koleksi himpunan *rough* merupakan semiring.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah:

1. mengkonstruksi homomorfisma semiring pada koleksi himpunan *rough*;
2. menyelidiki sifat-sifat homomorfisma semiring pada koleksi himpunan *rough*;
3. membuat program penentuan semiring pada koleksi himpunan *rough* menggunakan bahasa pemograman *Phyton*.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah:

1. memberikan pengetahuan tentang sifat-sifat homomorfisma semiring pada koleksi himpunan *rough*;
2. menambah wawasan mengenai homomorfisma semiring pada koleksi himpunan *rough* dengan himpunan *fuzzy* menggunakan konsep Praba.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan definisi-definisi beserta contoh yang berkaitan dan mendukung pembahasan dalam tesis ini yaitu tentang himpunan, relasi, operasi biner, grup, semigrup, ring, semiring, homomorfisma, himpunan *fuzzy*, himpunan *rough*, grup *rough*, ring *rough*, dan homomorfisma pada *rough*.

2.1 Semiring

Istilah himpunan dikembangkan pada tahun 1945-1918 oleh George Cantor yang merupakan seorang matematikawan asal Jerman. Himpunan merupakan salah satu konsep dasar matematika. Adapun definisi himpunan akan dijelaskan sebagai berikut.

Definisi 2.1.1 Himpunan adalah koleksi objek-objek yang didefinisikan dengan jelas. Objek-objek ini selanjutnya disebut elemen atau anggota himpunan. Himpunan S yang memiliki sebanyak berhingga elemen disebut dengan himpunan berhingga, sedangkan himpunan S yang memiliki elemen sebanyak tak hingga dinamakan himpunan tak hingga. Selanjutnya, $|S|$ menyatakan banyaknya elemen S (Fitriani dan Faisol, 2022).

Untuk membentuk suatu himpunan, beberapa cara yang dapat digunakan adalah menyebutkan anggota-anggotanya, menyebutkan syarat anggota- anggotanya, dan dengan notasi pembentuk himpunan.

Contoh 2.1.2 Dengan menyebutkan anggota-anggotanya: $A = \{2, 4, 6, 8\}$. Dengan menyebutkan syarat anggota-anggotanya: A adalah himpunan empat bilangan genap pertama. Dengan notasi pembentuk himpunan: $A = \{2x \mid x = 1, 2, 3, 4,\ x \in \mathbb{N}\}$

Definisi 2.1.3 Diberikan himpunan S. Notasi $x \in S$ menyatakan x elemen S, sedangkan $x \notin S$ menyatakan x bukan elemen S (Fitriani dan Faisol, 2022).

Contoh 2.1.4 Diberikan himpunan $A = \{2, 4, 6, 8\}$. Diperoleh 2 adalah anggota himpunan A, dapat ditulis $2 \in A$ dan 3 bukan anggota A, ditulis $3 \notin A$.

Definisi 2.1.5 Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan S jika setiap elemen A merupakan elemen S dan dinotasikan dengan $A \subseteq S$. Himpunan A dikatakan himpunan bagian sejati (*proper subset*) jika $A \subset S$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Contoh 2.1.6 Jika diberikan himpunan bilangan asli yang dinotasikan dengan $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ termuat di dalam himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, ...\}$, maka $\mathbb{N}$ merupakan himpunan bagian sejati $\mathbb{Z}$.

Definisi 2.1.7 Dua himpunan dikatakan sama jika dan hanya jika keduanya memuat elemen yang sama. Hal ini berarti bahwa $A = B$ jika dan hanya jika setiap anggota A juga menjadi anggota B dan sebaliknya setiap anggota B juga menjadi anggota A (Munir, 2012).

Untuk membuktikan $A = B$ maka haruslah dibuktikan bahwa $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

Contoh 2.1.8 Diketahui himpunan $P = \{2, 3, 5\}$ dan Q yang merupakan himpunan bilangan prima kurang dari 7. Dari kedua bilangan tersebut, harus diselidiki bilangan mana saja yang menjadi anggotanya yaitu $P = \{2, 3, 5\}$ dan $Q = \{2, 3, 5\}$. Karena setiap anggota himpunan P dan Q sama, diperoleh $P \subseteq Q$ dan $Q \subseteq P$, sehingga $P = Q$.

Definisi 2.1.9 Diberikan himpunan A. Komplemen himpunan A adalah semua anggota dalam semesta yang bukan anggota A. Notasi komplemen A adalah A^c. Secara matematika, komplemen A dapat ditulis sebagai $A^c = \{x \mid x \in U \, \text{dan} \, x \notin A\}$ (Munir, 2012).

Contoh 2.1.10 Diketahui $S = \{x \mid x < 10, x \in \mathbb{N}\}$ dan $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Komplemen himpunan A adalah $A' = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Jika diberikan dua himpunan yaitu A dan B, maka dapat diperoleh suatu himpunan yang diperoleh dengan cara menggabungkan himpunan A dan himpunan B seperti dijelaskan dalam definisi berikut ini.

Definisi 2.1.11 Diberikan himpunan A dan B. Gabungan himpunan A dan B dinotasikan dengan $A \cup B$ didefinisikan sebagai: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Contoh 2.1.12 Diberikan himpunan $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Gabungan himpunan A atau B yaitu $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Definisi 2.1.13 Diberikan himpunan A dan B. Irisan himpunan A dan B, dinotasikan dengan $A \cap B$ didefinisikan sebagai berikut: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Contoh 2.1.14 Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Irisan himpunan A dan B yaitu $A \cap B = \{2, 4, 6\}$.

Definisi 2.1.15 Himpunan yang tidak memiliki elemen disebut himpunan kosong $(emptyset)$ dan dinotasikan dengan $\emptyset$ atau $\{\}$ (Munir, 2012).

Contoh 2.1.16 Himpunan bilangan ganjil yang habis dibagi 2 merupakan himpunan kosong.

Pada bagian ini, dibahas mengenai relasi yang meliputi pengertian relasi, contoh-contoh relasi, sifat-sifat relasi, relasi ekuivalensi, dan kelas-kelas ekuivalensi.

Definisi 2.1.17 Relasi R dari himpunan A ke himpunan B adalah himpunan bagian dari $A \times B$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Diberikan relasi R dari himpunan A ke himpunan B. Jika $(x, y) \in R$ maka ditulis xRy, dibaca x berelasi dengan y terhadap relasi R, Jika $A = B$ maka relasi R disebut relasi biner pada A.

Contoh 2.1.18 Diberikan $A = \{2, 4, 6, 8\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$. Jika didefinisikan $R = \{(2, a), (4, b), (6, b), (8, d)\} \subseteq A \times B$, maka R adalah relasi dari himpunan A

ke B. Karena $(2, a) \in R$, dapat dikatakan bahwa 2 berelasi dengan a ditulis $2Ra$. Dalam relasi, dikenalkan istilah daerah asal *(domain)* dan daerah hasil *(range)* dari suatu relasi R.

Definisi 2.1.19 Diberikan relasi R dari himpunan A ke himpunan B. Daerah asal *(domain)* dari R, dinotasikan dengan $D(R)$ didefinisikan sebagai berikut: $D(R) = \{x \in A \mid \exists y \in B, \text{sehingga}(x, y) \in R\}$. Daerah hasil *(range)* dari R, dinotasikan dengan $Y(R)$ didefinisikan sebagai berikut: $Y(R) = \{y \in B \mid \exists y \in A, \text{sehingga}$ $(x, y) \in R\}$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Contoh 2.1.20 Berdasarkan relasi R yang diberikan pada Contoh 2.1.18, diperoleh daerah asal R adalah adalah $D(R) = \{2, 4, 6, 8\}$ dan daerah hasil R adalah $Y(R) = \{a, b, d\}$.

Definisi 2.1.21 Suatu relasi R dari A ke A dikatakan relasi ekuivalensi jika dan hanya jika memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $(a, a) \in R$ untuk setiap $a \in A$. Ini dinamakan sifat refleksif R.
2. jika $(a, b) \in R$, maka $(b, a) \in R$. Ini dinamakan sifat simetris dari R.
3. jika $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$, maka $(a, c) \in R$. Ini dinamakan sifat transitif R.

Syarat tersebut juga dapat dinyatakan dengan R bersifat refleksif jika aRa untuk setiap $a \in A$, R bersifat simetris jika aRb maka bRa, dan R bersifat transitif jika dan hanya jika aRb dan bRc maka aRc (Usman, 2022).

Contoh 2.1.22 Diberikan relasi R pada himpunan $C = \{1, 2, 3, 4\}$ sebagai berikut. $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3)\}$. Akan ditentukan apakah relasi R bersifat refleksif, simetris dan transitif.

1. Relasi R bersifat refleksif karena $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\} \subset R$ yang berarti xRx, untuk setiap $x \in A$.
2. Relasi R tidak bersifat simetris karena $(1, 2) \in R$, tetapi $(2, 1) \notin R$.

3. Relasi R bersifat transitif, karena $(1,2) \in R$ dan $(2,3) \in R$, berakibat $(1,3) \in R$. Jadi, relasi R bersifat refleksif dan transitif tetapi tidak simetris.

Definisi 2.1.23 Diberikan relasi biner E pada himpunan A. Relasi E disebut relasi ekuivalensi jika relasi E bersifat refleksif, simetris, dan transitif (Wibisono, 2008).

Contoh 2.1.24 Didefinisikan relasi R pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ sebagai berikut: aRb jika dan hanya jika $|a| = |b|$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$. Akan ditentukan apakah relasi R merupakan relasi ekuivalensi.

1. Diberikan sebarang $a \in \mathbb{Z}$. Karena $|a| = |a|$, diperoleh aRa. Oleh karena itu, relasi R bersifat refleksif.

2. Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$ dengan aRb. Oleh karena itu, $|a| = |b|$ yang berakibat $|b| = |a|$, sehingga diperoleh bRa. Jadi, relasi R bersifat simetris.

3. Diberikan sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}$ dengan $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$. Oleh karena itu, $|a| = |b|$ dan $|b| = |c|$. Akibatnya, $|a| = |c|$ atau aRc. Jadi, $(a, c) \in R$ yang menunjukkan relasi R bersifat transitif.

Jadi, relasi R bersifat refleksif, simetris dan transitif, sehingga R merupakan relasi ekuivalensi.

Definisi 2.1.25 Diberikan relasi ekuivalensi R pada himpunan tak kosong A. Untuk suatu $x \in A$, kelas ekuivalensi dari x yang ditentukan oleh relasi R adalah himpunan:

$$[x]_R = \{y \in A \mid (x, y) \in R\}.$$

Himpunan semua kelas ekuivalensi pada A disebut A modulo R didefinisikan sebagai:

$$A\backslash\text{R} = \{[x]_R \mid x \in A\}$$

(Wibisono, 2008).

Contoh 2.1.26 Diberikan himpunan $A = \{-2, -1, 0, 1\}$. Didefinisikan $R = \{(a, b) \mid a = b \text{ atau } a = -b, \text{ dengan } a, b \in A\}$.

Diperoleh $R = \{(-2,-2),(-1,-1),(-1,1),(0,0),(1,1),(1,-1)\}$.
Akibatnya, kelas- kelas ekuivalensi yang terbentuk adalah : $[-1]_R = \{-1,1\}, [1]_R$ $= \{-1,1\}$ sehingga $[1] = [-1]$, berarti 1 dan -1 ekuivalen. $[0]_R = \{0\}, [2]_R = \{2\}$.
Jadi, $A\backslash$R= $\{-1,0\}$.

Sebelum membahas pengertian grup dan sifat-sifatnya, berikut ini dibahas pengertian operasi biner. Jika a dan b merupakan bilangan asli, maka hasil operasi penjumlahan $a+b$ juga merupakan bilangan asli dan hasilnya unik (tunggal). Jadi, operasi $+$ merupakan operasi dua bilangan asli yang menghasilkan secara tunggal elemen himpunan yang sama yaitu himpunan bilangan asli. Hal ini terkait dengan definisi operasi biner.

Definisi 2.1.27 Operasi biner $*$ pada himpunan A adalah fungsi dari $S \times S$. Untuk setiap $(a,b) \in S \times S, *(a,b)$ di S dinotasikan dengan $a * b$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Definisi 2.1.28 Diberikan operasi biner $*$ dan himpunan bagian tak kosong H di S. Himpunan H dikatakan tertutup terhadap operasi biner $*$ jika untuk setiap $a, b \in H$, berlaku $a * b \in H$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Contoh 2.1.29 Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ beserta operasi penjumlahan bilangan pada $\mathbb{Z}$. Telah diketahui bahwa operasi penjumlahan bilangan merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$. Lalu, $3\mathbb{Z} = \{3z | z \in \mathbb{Z}\}$ merupakan himpunan bagian dari $\mathbb{Z}$. Untuk setiap dua elemen di $3\mathbb{Z}$, hasil penjumlahan kedua bilangan tersebut berada di dalam himpunan $3\mathbb{Z}$. Dapat dikatakan himpunan $3\mathbb{Z}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan bilangan.

Operasi penjumlahan dan perkalian pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ bersifat komutatif yaitu $a + b = b + a$ dan bersifat asosiatif yaitu $(a + b) + c = a + (b + c)$, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Berikut diberikan definisi mengenai sifat komutatif dan asosiatif operasi biner pada suatu himpunan.

Definisi 2.1.30 Operasi biner $*$ pada himpunan S dikatakan komutatif jika dan hanya jika $a * b = b * a$, untuk setiap $a * b \in S$. Operasi biner $*$ pada himpunan S dikatakan asosiatif jika dan hanya jika $(a*b)*c = a*(b*c)$, untuk setiap $a, b, c \in S$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Contoh 2.1.31 Pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$, akan diselidiki apakah $*$ yang didefinisikan dengan $x * y = x + y + 3$, untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Akan ditunjukkan $\mathbb{R}$ bersifat komutatif dan assosiatif terhadap operasi biner $*$.
Diberikan sebarang $x, y \in \mathbb{R}$. Berlaku $x * y = x + y + 3$. Sesuai Definisi 2.1.30, maka terbukti untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}, \quad x * y = x + y + 3 = y + x + 3 = y * x$.
Jadi, terbukti operasi biner $*$ bersifat komutatif di $\mathbb{R}$.
Diberikan sebarang $x, y, z \in \mathbb{R}$. Diperoleh $(x * y) * z = (x + y + 3) * z = (x + y + 3) + z + 3 = x + y + z + 6$.
Berdasarkan Definisi 2.1.30, $x * (y * z)$ = $x + (y + z + 3) + 3$ = $x + y + z + 6$ = $x * (y * z)$. Jadi, terbukti bahwa $(x * y) * z = x * (y * z)$, untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}$
Dengan demikian, operasi $*$ di $\mathbb{R}$ bersifat komutatif dan asosiatif.

Pasangan suatu himpunan dan beberapa operasi biner himpunan dinamakan sistem matematika. Berikut diberikan definisinya.

Definisi 2.1.32 Sistem matematika adalah $n + 1$-tupel terurut $\langle S, *_1, *_2, \ldots, *_n \rangle$, dengan S himpunan tak kosong dan $*_i$ operasi biner pada S, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Contoh 2.1.33 Pasangan $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$, dengan $\mathbb{Z}$ himpunan bilangan bulat dan $+$ operasi penjumlahan bilangan merupakan sistem matematika.

Struktur aljabar adalah suatu himpunan S yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi biner. Struktur aljabar yang paling sederhana adalah grupoid. Himpunan yang tidak kosong dengan satu operasi biner disebut grupoid. Grupoid yang operasi binernya bersifat asosiatif disebut semigrup, sedangkan semigrup yang mempunyai elemen identitas disebut monoid.

Definisi 2.1.34 Grupoid atau magma adalah struktur aljabar yang paling sederhana yaitu himpunan yang dilengkapi dengan satu operasi biner. Dapat ditulis dengan simbol sistem matematika $\langle S, *\rangle$ (Wibisono, 2008).

Contoh 2.1.35 Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$. Didefinisikan operasi biner $a * b = a + b + ab$. Akan ditunjukkan bahwa $\langle \mathbb{N}, *\rangle$ adalah suatu grupoid.
Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{N}$. Diperoleh $a * b = a + b + ab \in \mathbb{N}$. Jadi, $\mathbb{N}$ bersifat tertutup terhadap operasi $*$, sehingga $\langle \mathbb{N}, *\rangle$ merupakan grupoid.

Definisi 2.1.36 Suatu grupoid atau magma $\langle S, *\rangle$ dikatakan semigrup jika memenuhi syarat operasi $*$ bersifat asosiatif (Wibisono, 2008).

Contoh 2.1.37 Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$. Didefinisikan operasi biner $a * b = a + b + ab$. Akan ditunjukkan $\langle \mathbb{N}, *\rangle$ merupakan semigrup.
Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{N}$,

1. Karena untuk setiap $a, b \in \mathbb{N}$ berlaku $a * b = a + b + ab \in \mathbb{N}$. Jadi, $\mathbb{N}$ tertutup terhadap operasi biner $*$.

2. Diberikan sebarang $a, b, c \in \mathbb{N}$, berlaku :

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= (a + b + ab) * c \\ &= (a + b + ab) + c + (a + b + ab)c \\ &= a + b + ab + c + ac + bc + abc,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a * (b * c) &= a * (b + c + bc) \\ &= a + (b + c + bc) + a(b + c + bc) \\ &= a + b + c + bc + ab + ac + abc.\end{aligned}$$

Jadi, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{N}$, berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$. Oleh karena itu, $\langle \mathbb{N}, *\rangle$ merupakan semigrup.

Identitas kiri dari semigrup S adalah elemen e sedemikian rupa sehingga untuk setiap $x \in S$, berlaku $ex = x$. Demikian pula identitas kanan adalah elemen f sedemikian sehingga untuk setiap $x \in S$, berlaku $xf = x$. Identitas kiri dan kanan sama-sama disebut identitas sepihak.

Semigrup memiliki satu atau lebih identitas kiri tetapi tidak memiliki identitas kanan dan sebaliknya. Identitas dua sisi (identitas) adalah elemen yang merupakan identitas kiri dan kanan. Semigrup dengan identitas dua sisi disebut monoid.

Definisi 2.1.38 Suatu grupoid $\langle S, + \rangle$ dikatakan monoid terhadap penjumlahan jika memenuhi syarat-syarat:

1. $\langle S, + \rangle$ tertutup terhadap penjumlahan,
2. bersifat asosiatif terhadap penjumlahan,
3. mempunyai elemen identitas terhadap penjumlahan.

Dengan kata lain, semigrup terhadap penjumlahan yang mempunyai unsur satuan atau identitas $(e = 0)$ disebut monoid terhadap penjumlahan (Cain, 2012).

Contoh 2.1.39 Grupoid – grupoid $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ dan $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ merupakan monoid karena selain memiliki sifat asosiatif terhadap penjumlahan, semuanya memiliki elemen identitas yaitu bilangan 0.

Definisi 2.1.40 Suatu grupoid $\langle S, \cdot \rangle$ dikatakan monoid terhadap perkalian jika memenuhi syarat-syarat:

1. $\langle S, \cdot \rangle$ tertutup terhadap perkalian,
2. bersifat asosiatif terhadap perkalian,
3. mempunyai elemen identitas terhadap perkalian.

Semigrup terhadap perkalian yang mempunyai elemen identitas $(e = 1)$ disebut monoid terhadap perkalian (Cain, 2015).

Contoh 2.1.41 Grupoid – grupoid $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \cdot \rangle$ dan $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$ merupakan monoid, karena selain memiliki sifat asosiatif terhadap perkalian, semuanya juga memiliki elemen identitas yaitu 1.

Selanjutnya akan dijelaskan tentang grup. Sistem matematika yang terdiri atas satu himpunan dan satu operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu dinamakan grup. Berikut diberikan definisi grup sebagai berikut.

Definisi 2.1.42 Sistem matematika $\langle G, * \rangle$ adalah grup jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. operasi biner $*$ bersifat assosiatif, yaitu $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk setiap $a, b, c \in G$,
2. terdapat elemen identitas $e \in G$ untuk operasi biner $*$ sehingga untuk setiap $x \in G$, berlaku $e * x = x * e = x$,
3. untuk setiap $a \in G$, terdapat elemen invers dari a di G, dinotasikan dengan a^{-1} sehingga $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = e$.

(Fitriani dan Faisol, 2022).

Contoh 2.1.43 Himpunan $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ dan $\mathbb{R}$ merupakan grup terhadap operasi penjumlahan. Himpunan $\mathbb{R}^*$ (Himpunan bilangan real yang tidak nol), $\mathbb{Q}^*$ (Himpunan bilangan rasional yang tidak nol), $\mathbb{C}^*$ (Himpunan bilangan kompleks yang tak nol) merupakan grup terhadap operasi perkalian.

Berdasarkan sifat komutatif dari operasi biner pada suatu grup, maka didefinisikan grup komutatif sebagai berikut.

Definisi 2.1.44 Grup G dikatakan grup komutatif (grup Abel) jika operasi biner $*$ bersifat komutatif, yaitu $a * b = b * a$, untuk setiap $a, b \in G$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Contoh 2.1.45 Diberikan himpunan matriks $M_2(\mathbb{Z})$ dengan entri-entri anggotanya bilangan bulat. Diberikan $M_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$.
Akan ditunjukkan bahwa $\langle M_2(\mathbb{Z}), + \rangle$ merupakan grup.

1. Akan ditunjukkan $+$ operasi biner pada $M_2(\mathbb{Z})$.
   Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$.
   Karena $(a+e), (b+f), (c+g), (d+h) \in M_2(\mathbb{Z})$ diperoleh
   $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}.$$
   Oleh karena itu, $+$ merupakan operasi biner pada $M_2(\mathbb{Z})$.

2. Diberikan sebarang$A, B, C \in M_2(\mathbb{Z})$. Operasi penjumlahan pada $M_2(\mathbb{Z})$ bersifat asosiatif yaitu $(A + B) + C = A + (B + C)$.

3. Diberikan sebarang matriks $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$.
   Karena
   $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}).$$
   Diperoleh elemen identitas di $M_2(\mathbb{Z})$ terhadap operasi $+$ adalah $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Diberikan sebarang matriks $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$.
   Karena
   $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}),$$
   elemen invers dari $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ terhadap operasi $+$ adalah $\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$.

Berdasarkan 1, 2, 3 dan 4, terbukti bahwa $\langle M_2(\mathbb{Z}), +\rangle$ merupakan grup.

Pada bagian ini akan diberikan beberapa sifat dasar grup berserta pembuktiannya. Sifat-sifat dasar grup sebagai berikut.

Teorema 2.1.46 Jika G grup dengan operasi biner $*$, maka hukum kanselasi kanan dan hukum kanselasi kiri berlaku di G yaitu $a * b = a * c$, berakibat $b = c$ dan $b * a = c * a$, berakibat $b = c$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Bukti. Diberikan $a * b = a * c$. Karena G merupakan grup, terdapat $a^{-1} \in G$ sehingga $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$. Dengan mengoperasikan a^{-1} dari kiri diperoleh sebagai berikut:

$$a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c),$$

$$(a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c,$$

$$e * b = e * c.$$

Sehingga, diperoleh $b = c$.
Selanjutnya, $b * a = c * a$. Karena G grup, terdapat $a^{-1} \in G$ sehingga $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$. Dengan mengoperasikan a^{-1} dari kanan diperoleh sebagai berikut:

$$(b * a) * a^{-1} = (c * a) * a^{-1},$$

$$b * (a * a^{-1}) = c * (a * a^{-1}),$$

$$b * e = c * e.$$

Sehingga, diperoleh $b = c$.
Jadi, terbukti bahwa hukum kanselasi kiri dan kanselasi kanan berlaku pada suatu grup. ■

Teorema 2.1.47 Jika G grup dengan operasi biner $*$ dan a, b sebarang elemen di G, maka persamaan linear $a * x = b$ dan $y * a = b$ mempunyai solusi tunggal di G (Fitriani dan Faisol, 2022).

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa $x = a^{-1} * b$ merupakan solusi dari persamaan linear $a * x = b$ dengan cara mensubstitusi nilai $x = a^{-1} * b$ ke persamaan linear $a * x = b$ sebagai berikut:

$$a * x = a * (a^{-1} * b) = (a * a^{-1}) * b = e * b = b.$$

Hasil ini menunjukkan bahwa $x = a^{-1} * b$ merupakan solusi dari persamaan linear $a * x = b$.

Untuk menunjukkan ketunggalannya, misalkan x_1 dan x_2 merupakan solusi dari persamaan linear $a * x = b$, maka $a * x_1 = b$ dan $a * x_2 = b$. Oleh karena itu, diperoleh $a * x_1 = a * x_2$. Berdasarkan Teorema 2.1.46, diperoleh $x_1 = x_2$. Jadi, dapat disimpulkan $x = a^{-1} * b$ merupakan solusi tunggal dari persamaan linear $a * x = b$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $y = b * a^{-1}$ merupakan solusi persamaan linear $y * a = b$ dengan cara mensubstitusikan nilai $y = b * a^{-1}$ ke persamaan linear $y * a = b$ sebagai berikut. $y * a = (b * a^{-1}) * a = b * (a * a^{-1}) = b * e = b$. Hal ini menunjukkan bahwa $y = b * a^{-1}$ merupakan solusi dari persamaan linear $y * a = b$. Untuk menunjukkan ketunggalannya, misalkan y_1 dan y_2 merupakan solusi dari persamaan linear $y * a = b$, maka $y_1 * a = b$ dan $y_2 * a = b$. Oleh karena itu, diperoleh $y_1 * a = y_2 * a$. Berdasarkan Teorema 2.1.46, diperoleh $y_1 = y_2$. Jadi, dapat disimpulkan $y = b * a^{-1}$ merupakan solusi tunggal dari persamaan linear $y * a = b$. ■

Teorema 2.1.48 Dalam grup G dengan operasi biner $*$, terdapat tepat satu elemen identitas e sehingga $e * x = x * e = x$, untuk setiap $x \in G$ dan untuk setiap $a \in G$ terdapat tepat satu elemen $a^{-1} \in G$, sehingga $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Bukti. Andaikan grup G mempunyai elemen identitas e dan $e^{'}$. Karena e merupakan elemen identitas G, maka $e * e^{'} = e^{'}$. Sebaliknya, karena $e^{'}$ elemen merupakan identitas G, maka $e * e^{'} = e$. Akibatnya diperoleh $e^{'} = e * e^{'} = e$. Jadi, terbukti elemen identitas pada suatu grup G adalah unik atau tunggal. ■

Grup tak hingga $\langle G, * \rangle$ merupakan grup dengan himpunan G yang jumlah elemen-elemennya tak hingga. Jika G merupakan himpunan berhingga, maka grup $\langle G, * \rangle$ dinamakan grup hingga. Grup paling sedikit memiliki 1 elemen yaitu elemen identitas e. Satu-satunya operasi biner yang mungkin didefinisikan pada grup yang hanya memiliki satu anggota yaitu 4 adalah $e * e = e$. Oleh karena itu, invers dari e adalah e sendiri dan semua aksioma grup terpenuhi.
Pada bagian ini dibahas juga tentang subgrup dari suatu grup. Sebelum membahas subgrup, berikut diberikan definisi order suatu grup.

Definisi 2.1.49 Jika G merupakan grup hingga, maka order dari G dinotasikan dengan $|G|$, adalah banyaknya elemen pada G. Secara umum, untuk sebarang himpunan berhingga S, $|S|$ adalah jumlah elemen S (Fitriani dan Faisol 2022).

Contoh 2.1.50 Diberikan grup $\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ terhadap operasi penjumlahan modulo 6. Karena banyaknya elemen dari grup $\mathbb{Z}_6$ adalah 6, diperoleh order dari $\mathbb{Z}_6$ yaitu $|\mathbb{Z}_6| = 6$.

Seringkali ditemukan suatu grup yang termuat dalam grup yang lebih besar. Sebagai contoh, grup $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ termuat dalam $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$. Hal ini mendasari definisi subgrup sebagai berikut:

Definisi 2.1.51 Diberikan himpunan bagian H dari grup G yang tertutup terhadap operasi biner pada G. Himpunan dikatakan subgrup G jika terhadap operasi biner yang sama pada G, H merupakan grup. Selanjutnya, H subgrup G dinotasikan dengan $H \leq G$ atau $H < G$ yang berarti H subgrup G, tetapi $H \neq G$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Contoh 2.1.52 Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ adalah subgrup dari himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ dan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ adalah subgrup dari himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$, terhadap operasi penjumlahan bilangan sehingga dapat ditulis $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}$ dan $\mathbb{Q} \leq \mathbb{R}$.

Terdapat dua subgrup yang pasti dimiliki oleh setiap grup G, yaitu e dan G. Subgrup ini dinamakan subgrup trivial yang diberikan dalam definisi berikut.

Definisi 2.1.53 Diberikan grup G dan $H \subseteq G$ subgrup G. H dikatakan subgrup tak sejati *(improper subgroup)* dari G jika $H = G$. Subgrup *(proper subgroup)* G jika $H \subset G$ dan $H \neq G$. Subgrup e disebut subgrup trivial G, sedangkan subgrup yang lain dari G disebut subgrup nontrivial (Fitriani dan Faisol, 2022).

Teorema 2.1.54 Himpunan bagian H dari grup G merupakan subgrup jika dan hanya jika:

1. $H \neq \emptyset$;
2. untuk setiap $x, y \in H, xy^{-1} \in H$.

Jika H berhingga maka H subgrup G jika dan hanya jika H merupakan himpunan tak kosong dan tertutup terhadap operasi biner di G (Fitriani dan Faisol, 2022)

Bukti. Asumsikan H merupakan subgrup G. Akan ditunjukkan sifat (1) dan (2) terpenuhi. Karena H merupakan subgrup G, elemen identitas e termuat di H. Akibatnya $H \neq \emptyset$, sehingga sifat (1) terpenuhi.
Selanjutnya, diberikan sebarang $x, y \in H$. Karena H merupakan subgrup G, $y^{-1} \in H$. Selain itu, H tertutup terhadap operasi biner di G, berakibat $xy^{-1} \in H$ sehingga sifat (2) terpenuhi. Jadi, H tertutup terhadap operasi biner di G, sehingga terbukti H merupakan subgrup. ■

Pada bagian ini akan didiskusikan mengenai grup hingga yang elemen-elemennya adalah permutasi yang dilakukan pada himpunan berhingga.

Definisi 2.1.55 Permutasi pada himpunan A adalah fungsi $\varphi : A \to A$ yang bijektif (injektif dan surjektif) (Malik dkk., 2007).

Contoh 2.1.56 Diberikan himpunan $I_n = 1, 2, 3, \ldots, n$ dan permutasi σ pada himpunan I_n. σ merupakan fungsi dari I_n ke dirinya sendiri yang bersifat bijektif. Karena σ fungsi, yang berarti $\sigma : I_n \to I_n$ adalah himpunan bagian dari $I_n \times I_n$, σ dapat dituliskan sebagai berikut: $\sigma = \{(1, \sigma(1)), (2, \sigma(2)), (3, \sigma(3)), \ldots, (n, \sigma(n))\}$.
Selanjutnya dinotasikan dengan $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Sebagai contoh, jika $n = 3$, sehingga $I_3 = 1, 2, 3$ dan σ permutasi pada himpunan I_3, dengan $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 1$, maka permutasi dapat dinyatakan sebagai : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 3 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Misalkan A adalah koleksi semua permutasi pada A. Akan ditunjukkan fungsi komposisi $\circ$ merupakan operasi biner pada A. Operasi ini disebut multiplikasi permutasi *(permutation multiplication)*. Misalkan σ dan τ merupakan permutasi pada himpunan A, maka σ dan τ adalah fungsi dari A ke A yang bersifat bijektif (injektif dan surjektif). Komposisi fungsi $\sigma \circ \tau$ merupakan fungsi dari A ke A. Akan ditunjukkan $\sigma \circ \tau$ adalah fungsi satu-satu. Diberikan sebarang $a_1, a_2 \in A$. Diperoleh $(\sigma \circ \tau)(a_1) = (\sigma \circ \tau)(a_2)$ yang berakibat $\sigma(\tau(a_1)) = \sigma(\tau(a_2))$.

Pada bagian ini akan dibahas mengenai orbit dan lingkaran *(cycle)* dari suatu permutasi. Setiap permutasi τ dari himpunan A mendefinisikan partisi natural dari A menjadi sel-sel. Didefinisikan $a, b \in A$ berada dalam sel yang sama jika dan hanya jika $b = \tau^n(a)$ untuk suatu $n \in \mathbb{Z}$. Partisi ini akan dikembangkan dengan relasi ekuivalensi sebagai berikut.

Untuk setiap $a, b \in A$, didefinisikan $a \sim b$ jika dan hanya jika $b = \tau^n(a)$, untuk suatu $n \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan merupakan relasi ekuivalensi.

1. Karena $a = i(a) = \tau^0(a)$, maka $a \sim a$. Jadi, relasi $\sim$ bersifat refleksif,
2. jika $a \sim b$, maka $b = \tau^n(a)$ untuk suatu $n \in \mathbb{Z}$. Jadi, $a = \tau^{-1}(a)$ dan $-n \in \mathbb{Z}$. Diperoleh $b \sim a$. Relasi $\sim$ bersifat simetris,
3. jika $a \sim b$ dan $b \sim c$, maka $b = \tau^n(a)$ dan $c = \tau^m(b)$ untuk suatu $n \in \mathbb{Z}$. Jadi, $c = \tau^m(\tau^n(a)) = \tau^{n+m}(a)$. Diperoleh $a \sim c$. Relasi $\sim$ bersifat transitif.

Dari 1,2 dan 3, terbukti relasi $\sim$ merupakan relasi ekuivalensi.

Definisi 2.1.57 Diberikan permutasi τ permutasi pada himpunan A. Kelas-kelas ekuivalensi di A yang didefinisikan pada relasi ekuivalensi dinamakan orbit dari τ (Malik, 2007).

Contoh 2.1.58 Akan ditentukan orbit-orbit dari permutasi di S_6 berikut.

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Untuk menentukan orbit yang memuat 1, diterapkan permutasi τ terhadap 1 secara berulang sehingga diperoleh $1 \xrightarrow{\tau} 3 \xrightarrow{\tau} 4 \xrightarrow{\tau} 1 \xrightarrow{\tau} 3$ dan seterusnya. Oleh karena itu, orbit yang memuat 1 adalah $\{1, 3, 4\}$. Selanjutnya, dipilih elemen A yang tidak termuat pada orbit yang memuat 1. Misal pilih elemen 2. Dengan cara yang sama, diperoleh $2 \xrightarrow{\tau} 5 \xrightarrow{\tau} 6 \xrightarrow{\tau} 2$ dan seterusnya hingga diperoleh orbit yang memuat 2 adalah $\{2, 5, 6\}$. Jadi, orbit dari permutasi τ adalah $\{1, 3, 4\}$ dan $\{2, 5, 6\}$.

Definisi 2.1.59 Permutasi $\sigma \in S_n$ dikatakan *cycle* jika permutasi tersebut memiliki paling banyak 1 orbit yang memuat lebih dari satu elemen. Panjang dari *cycle* adalah jumlah elemen dalam orbit yang terbesar (Adkins dkk., 1992).

Contoh 2.1.60 Permutasi τ pada Contoh 2.1.56 dapat dituliskan dalam notasi berikut:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} = (1, 3, 4).$$

Dapat diperhatikan bahwa $(1, 3, 4) = (3, 4, 1) = (4, 1, 3)$. Dalam hal ini, permutasi τ merupakan *cycle* karena hanya memuat 1 orbit yang memuat lebih dari 1 elemen. Panjang dari *cycle* pada permutasi ini adalah 3 yaitu banyaknya elemen pada orbit terbesar di τ.

Hasil kali dua *cycle* bukan merupakan *cycle*. Setiap permutasi dapat dinyatakan sebagai hasil kali berhingga dari *cycle* yang saling asing seperti dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.1.61 Setiap permutasi dapat dinyatakan sebagai hasil kali berhingga dari *cycle-cycle* yang saling asing (Adkins dkk., 1992).

Bukti. Diberikan sebarang permutasi σ dari himpunan A dan $O_1, O_2, \ldots, O_r$ adalah orbit-orbit dari σ. Jadi, $O_i \cap O_j = \emptyset$ apabila $i \neq j$. Dibentuk *cycle* μ_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, dengan $\mu_i(x)$ = $\begin{cases} \sigma(x) & \text{untuk } x \in O_i \\ x & \text{untuk } x \notin O_i. \end{cases}$

Akan ditunjukkan $\sigma = \mu_1\mu_2 \ldots \mu_r$. Diberikan sebarang $x \in A$, maka $x \in O_k$ untuk tepat satu nilai k. Diperoleh:

$(\mu_1\mu_2 \ldots \mu_r)(x) = (\mu_1\mu_2 \ldots \mu_{k-1}\mu_k\mu_{k+1} \ldots \mu_r)(x)$ = $\mu_1\mu_2 \ldots \mu_{k-1}((\mu_k)(x)))(x))$ = $\mu_k(x)$ = $\sigma(x)$.

Jadi, $\sigma = \mu_1\mu_2 \ldots \mu_r$. Karena $O_1, O_2, \ldots, O_r$ saling asing maka $\mu_1\mu_2 \ldots \mu_r$ adalah *cycle* yang saling asing. ■

Pada bagian ini akan dibahas mengenai koset dari suatu subgrup H di grup G.

Definisi 2.1.62 Diberikan grup G dan subgrup H di G. Himpunan $aH = \{ah \mid h \in H\}$ dinamakan koset kiri H yang memuat a. Himpunan $Ha = \{ha \mid h \in H\}$ dinamakan koset kanan H yang memuat a (Malik dkk., 2007).

Contoh 2.1.63 Diberikan grup $\mathbb{Z}_6$ terhadap operasi penjumlahan modulo 6. Akan ditentukan semua koset kiri dari subgrup $H = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ di $\mathbb{Z}_6$. Koset-koset kiri dari subgrup $H = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ di $\mathbb{Z}_6$ adalah:

$$\bar{0} + H = \{\bar{0}, \bar{3}\},$$

$$\bar{1} + H = \{\bar{1}, \bar{4}\},$$

$$\bar{2} + H = \{\bar{2}, \bar{5}\}.$$

Karena $\mathbb{Z}_6$ merupakan grup komutatif, maka koset-koset kiri dari H di $\mathbb{Z}_6$ sama dengan koset-koset kanan dari H di $\mathbb{Z}_6$.

Pada bagian ini dibahas mengenai homomorfisma grup, yaitu pemetaan dari grup G ke grup $G^{'}$ yang bersifat mengawetkan operasi biner dari grup tersebut. Berikut definisi homorfisma grup.

Definisi 2.1.64 Diberikan grup G dan $G^{'}$. Pemetaan ϕ disebut homomorfisma jika $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$, untuk setiap $a, b \in G$. Untuk setiap grup G dan $G^{'}$ terdapat

paling sedikit satu homomorfisma, yang dinamakan homomorfisma trivial dengan didefinisikan $\phi(g) = e^{'}$, untuk setiap $g \in G$, dengan $e^{'}$ adalah elemen identitas pada grup $G^{'}$ (Fitriani dan Faisol, 2022).
Untuk membuktikan bahwa ϕ merupakan homomorfisma, perhatikan bahwa untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $\phi(ab) = e^{'} = ee^{'} = \phi(a)\phi(b)$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Contoh 2.1.65 Pada Contoh 2.1.63 berikut akan dibahas bahwa sifat komutatif grup diawetkan oleh homomorfisma grup yang bersifat surjektif. Diberikan grup G dan $G^{'}$, serta homomorfisma yang bersifat surjektif $\phi : G \to G^{'}$. Jika G merupakan grup komutatif, maka dapat dibuktikan bahwa G juga merupakan grup komutatif sebagai berikut. Diberikan sebarang $a^{'}, b^{'} \in G^{'}$. Akan ditunjukan $a^{'}$ $b^{'}$ = $b^{'}$ $a^{'}$ untuk setiap $a^{'}$, $b^{'}$ $\in$G$^{'}$. Berdasarkan hipotesis, ϕ bersifat surjektif. Oleh karena itu, terdapat $a, b \in G$ sedemikian sehingga $\phi(a) = a'$ dan $\phi(b) = b'$. Karena G merupakan grup komutatif, $ab = ba$. Oleh karena itu, diperoleh $a'b' = \phi(a)\phi(b) = \phi(ab) = \phi(ba) = \phi(b)\phi(a) = b'a'$. Hal ini menunjukkan bahwa $G^{'}$ merupakan grup komutatif.

Jika terdapat homomorfisma surjektif dari suatu grup G ke grup $G^{'}$ dan G merupakan grup komutatif, maka $G^{'}$ juga merupakan grup komutatif. Oleh karena itu, homomorfisma grup yang bersifat surjektif mengawetkan sifat komutatif pada grup tersebut.

Definisi 2.1.66 Diberikan pemetaan ϕ dari himpunan X ke himpunan Y, $A \subseteq X$ dan $B \subseteq Y$. Bayangan (*image*) $\phi[A]$ dari A di Y atas ϕ adalah himpunan $\{\phi(a) \mid a \in A\}$. Himpunan $\phi[X]$ adalah jangkauan (*range*) dari ϕ. Bayangan invers *(inverse image)* $\phi^{-1}[B]$ dari 4 di X adalah $\{x \in X \mid \phi(x) \in B\}$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Teorema 2.1.67 Diberikan grup G, $G^{'}$ dan homomorfisma grup $\phi : G \to G^{'}$, berlaku hal-hal sebagai berikut.

1. Jika e adalah elemen identitas di G. maka $\phi(e)$ adalah elemen identitas $e^{'}$ di $G^{'}$.
2. Jika $a \in G$, maka $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$.
3. Jika H adalah subgrup G, maka $\phi[H]$ adalah subgrup $G^{'}$.
4. Jika $K^{'}$ adalah subgrup $G^{'}$, maka $\phi^{-1}[K']$ adalah subgrup G (Fitriani dan Faisol, 2022).

Bukti.

1. Karena $\phi : G \to G^{'}$ adalah homomorfisma grup, maka berlaku: $\phi(a) = \phi(ae) = \phi(a)\phi(e)$. Dengan mengoperasikan kedua ruas dengan

   $$\phi(a)^{-1}\phi(a) = \phi(a)^{-1}\phi(a)\phi(e),$$

   diperoleh

   $$e^{-1} = e'\phi(e);$$

   $$e^{-1} = \phi(e).$$

   Oleh karena itu, $\phi(e)$ adalah elemen identitas $e^{'}$ di $G^{'}$.

2. Perhatikan bahwa $e' = \phi(e) = \phi(aa^{-1}) = \phi(a)\phi(a^{-1})$. Hasil ini menunjukan bahwa invers dari $\phi(a)$ adalah $\phi(a^{-1})$. Jadi, $\phi(\bar{a})^{-1} = \phi(a^{-1})$.

3. Diberikan H subgrup G dan $\phi(a), \phi(b) \in [H]$. Akan ditunjukkan $\phi(H)$ adalah subgrup $G^{'}$. Perhatikan bahwa

   $$2\phi(a)\phi(b) = \phi(ab).$$

   Karena $a, b \in H$ dan H subgrup G, maka $ab \in H$. Akibatnya $ab \in \phi(H)$, sehingga $\phi(ab) \in \phi[H]$ tertutup terhadap operasi dari $G^{'}$. Lalu karena $\phi(e) =$

$e^{'}$, maka $\phi[H]$ memuat elemen identitas $e^{'}$. Kemudian karena $(a^{-1})^{-1} = \phi(a^{-1})$, maka untuk setiap $\phi(a) \in \phi[H]$ terdapat $\phi(a^{-1}) \in \phi[H]$ sehingga, $\phi(a^{-1})\phi(a) = \phi(a)\phi(a^{-1}) = e'$. Oleh karena itu dapat disimpulkan $\phi[H]$ merupakan subgrup G.

4. Diberikan $K^{'}$ subgrup $G^{'}$ dan $a, b \in \phi^{-1}[K]$, berlaku $\phi(a), \phi(b) \in K'$. Karena K' adalah subgrup $G^{'}$, $\phi(a)\phi(b) \in K'$. Perhatikan bahwa $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$. Hal ini menunjukkan bahwa $ab \in \phi^{-1}[K']$. Oleh karena $\phi^{-1}[K]$ tertutup terhadap operasi biner di G'.
   Selanjutnya, akan ditunjukkkan $\phi^{-1}[K']$ memuat elemen identitas e karena $e' = \varphi(e)$, berlaku $e \in \phi^{-1}[K']$. Oleh karena itu, $\phi^{-1}[K']$ memuat elemen identitas e. Diberikan sebarang $a \in \phi^{-1}[K']$. Akan ditunjukan $\phi^{-1}[K']$ memuat invers dari a. Karena $e \in \phi^{-1}[K']$, maka $\phi(a) \in K'$. Berdasarkan hipotesis $K^{'}$ adalah subgrup $G^{'}$. Akibatnya, invers dari $\phi(a)$ yaitu $\phi(a^{-1})$ termuat di dalam $K^{'}$. Telah dibuktikan pada bagian (2) bahwa $\phi(a^{-1}) = \phi(a^{-1})$. Sehingga, diperoleh $a^{-1} \in \phi^{-1}[K]$. Jadi, $\phi^{-1}[K']$ memuat invers dari a. Oleh karena itu, terbukti bahwa $\phi^{-1}[K']$ adalah subgrup G.

$\blacksquare$

Definisi 2.1.68 Diberikan homomorfisma grup $\varphi : G \to G'$. Subgrup $\varphi^{-1}[\{e'\}] = \{x \in G \mid \varphi(x) = e'\}$, dengan e' elemen identitas di G', dinamakan *kernel* dari φ dan dinotasikan dengan $\ker(\varphi)$ (Fitriani dan Faisol 2022).

Contoh 2.1.69 Diberikan fungsi f dari grup $(\mathbb{Z}, +)$ ke grup $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ dengan $f(a) = \overline{a}$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan f merupakan homomorfisma grup sebagai berikut. Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$, berlaku: $f(a + b) = \overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b} = f(a) + f(b)$. Oleh karena itu, f merupakan homomorfisma grup dari $\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}_n$.

Selanjutnya, akan ditentukan *kernel* dari f sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\ker(f) &= \{a \in \mathbb{Z} \mid f(a) = \overline{0} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} \mid \overline{a} = \overline{0}\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a \text{ habis dibagi } n\} \\ &= \{qn \mid q \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

Jadi, diperoleh bahwa $\ker(f)$ =$\{$ qn $\mid q \in \mathbb{Z}\}$.

Definisi 2.1.70 Diberikan homomorfisma grup $f : G \to G'$.

1. Fungsi f disebut monomorfisma grup jika f bersifat injektif yaitu $f(a) = f(b)$ berakibat $a = b$, untuk setiap $a, b \in G$.
2. Fungsi *f* disebut epimorfisma grup jika *f* bersifat surjektif (onto) yaitu *Im(f)* $= G'$.
3. Fungsi f disebut isomorfisma grup jika f bersifat bijektif (injektif dan surjektif) (Fitriani dan Faisol 2022).

Grup G dan G' dikatakan saling isomorfik jika terdapat suatu isomorfisma grup dari G dan G' yang dinotasikan dengan $G \cong G'$.

Pada Contoh 2.1.69, terlihat bahwa suatu grup hingga non trivial yaitu $\mathbb{Z}_n$ merupakan bayangan homomorfisma dari grup tak hingga $\mathbb{Z}$. Homomorfisma ini merupakan epimorfisma, tetapi bukan monomorfisma.

Setelah diberikan definisi mengenai grup dan subgrup, selanjutnya diberikan definisi tentang ring, subring dan semiring.

Definisi 2.1.71 Diberikan suatu himpunan tak kosong R yang dilengkapi dengan dua operasi biner yaitu $+$ (operasi penjumlahan) dan $\cdot$ (operasi perkalian), yang selanjutnya dilambangkan dengan $\langle R, +, \cdot\rangle$. Struktur $\langle R, +, \cdot\rangle$ dinamakan ring jika memenuhi aksioma:

a. $\langle R, +\rangle$ grup abelian, yaitu:

1. operasi $+$ bersifat tertutup yaitu untuk setiap $a, b \in R, a + b \in R$;
2. bersifat assosiatif yaitu untuk setiap $a, b, c \in R, (a + b) + c = a + (b + c)$;
3. terdapat elemen identitas yaitu terdapat $e \in R$, untuk setiap $a \in R$, $a + e = e + a = a$;
4. setiap elemen punya invers yaitu untuk setiap $a \in R$, terdapat $a^{-1} \in R$, a + a$^{-1} = a^{-1} + a = e$;
5. bersifat komutatif yaitu untuk setiap $a, b \in R, a + b = b + a$.

b. $\langle R, \cdot\rangle$ semigrup, yaitu:

1. operasi $\cdot$ bersifat tertutup yaitu untuk setiap $a, b \in R,\ a \cdot b \in R$;
2. operasi $\cdot$ bersifat assosiatif yaitu untuk setiap $a, b, c \in R, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
3. bersifat distributif kiri dan distibutif kanan yaitu:

   (a) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

   (b) $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

   (Golan, 2013).

Contoh 2.1.72 Diberikan F himpunan semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Untuk setiap $f, g \in F$ dan $x \in \mathbb{R}$, didefinisikan $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ dan $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

a. Akan ditunjukkan $\langle F, +\rangle$ grup Abelian.

1. Diberikan sebarang $f, g \in F$ dan $x \in \mathbb{R}$. Berlaku $(f+g)(x) = f(x)+g(x) \in \mathbb{R}$. Jadi, $f+g$ merupakan fungsi dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$. Akibatnya $(f+g) \in F$ sehingga operasi $+$ bersifat tertutup di F.

2. Diberikan sebarang $f, g, h \in F$ dan $x \in \mathbb{R}$. Berlaku:

$$\begin{aligned}((f+g)+h)(x) &= (f+g)(x)+h(x) \in \mathbb{R} \\ &= f(x)+g(x)+h(x) \in \mathbb{R} \\ &= f(x)+(g+h)(x) \in \mathbb{R} \\ &= (f+(g+h))(x) \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

   Jadi, $(f+g)+h = f+(g+h)$ akibatnya operasi penjumlahan bersifat assosiatif di F.

3. Didefinisikan $\theta \in F, \theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $\theta(x) = 0, x \in \mathbb{R}$. Diberikan sebarang $f \in F$, berlaku:

$$\begin{aligned}(f+\theta)(x) = f(x)+\theta(x) = f(x)+0 = f(x) \\ (\theta+f)(x) = \theta(x)+f(x) = 0+f(x) = f(x).\end{aligned}$$

   Jadi, $\theta \in F$ merupakan elemen netral terhadap operasi $+$ di F.

4. Diberikan sebarang $f \in F$ dan $x \in R$ terdapat $-f$ adalah elemen invers dari f dan $-f \in F$, berlaku:
   Invers kanan : $(f+(-f))(x) = (f+(-f))(x)$ =$f(x) - f(x)$ =0 =(x).
   Invers kiri : $((-f)+f)(x) = (-f+f)(x)$ =$-f(x)+f(x)$ =0 =(x).
   Akibatnya $-f(x)$ merupakan elemen invers dari $f(x)$ terhadap $+$.

5. Diberikan sebarang $f, g \in F$ dan $x \in R$. Berlaku:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x).$$

   Jadi, operasi + bersifat komutatif.

II. Akan ditunjukkan $\langle F, \cdot \rangle$ semigrup.

1. Diberikan sebarang $f, g \in F$ dan $x \in R$, berlaku:

$$\begin{aligned}((fg)h)(x) &= (fg)(x)h(x) \\ &= f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \\ &= f(x) \cdot (g \cdot h)(x) \\ &= (f \cdot (g \cdot h))(x).\end{aligned}$$

   Jadi, $(fg)h = f(gh)$ untuk setiap f,$g \in F$ dan $x \in \mathbb{R}$ bersifat assosiatif terhadap operasi perkalian.

2. Diberikan sebarang $f, g, h \in F$ dan $x \in \mathbb{R}$, berlaku:

$$\begin{aligned}(f(g+h))(x) &= f(x)(g+h)(x) \\ &= f(x)g(x) + f(x)h(x) \\ &= (fg)(x) + (fh)(x) \\ &= (fg + fh)(x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((f+g)h)(x) &= (f+g)(x)h(x) \\ &= f(x)g(x) + h(x) \\ &= (f(x) + g(x))h(x) \\ &= f(x)h(x) + g(x)h(x) \\ &= (fh)(x) + (gh)(x) \\ &= (fh + gh)(x).\end{aligned}$$

   Jadi, berlaku hukum distribusi kiri dan distribusi kanan pada F.

Dari pembahasan tersebut, terbukti $\langle F, +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

Definisi 2.1.73 Ring $\langle R, +, \cdot \rangle$ dengan tambahan sifat terdapat elemen $1_R \in R$ sehingga untuk setiap $x \in R$ berlaku $1_R \cdot x = x \cdot 1_R = x$, disebut ring dengan elemen satuan (*ring with identity*) (Setiawan, 2011).

Contoh 2.1.74 Misalkan $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ berturut-turut adalah himpunan semua bilangan bulat (bilangan rasional, bilangan real, bilangan kompleks). Berlaku: $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{C}, +, \cdot \rangle$ masing-masing merupakan ring komutatif dengan elemen satuan.

Definisi 2.1.75 Ring $\langle R, +, \cdot \rangle$ dikatakan komutatif jika untuk setiap $x, y \in R$ berlaku $x \cdot y = y \cdot x$ (Setiawan, 2011).

Sebarang ring dengan elemen satuan dan memenuhi sifat komutatif disebut ring komutatif dengan elemen satuan *(commutative ring with identity).*

Definisi 2.1.76 Ring $\langle R, +, \cdot \rangle$ dengan elemen satuan 1_R disebut ring divisi jika setiap elemen tak nol di R merupakan unit (memiliki invers terhadap operasi perkalian) (Setiawan, 2011).

Dengan kata lain, ring $\langle R, +, \cdot \rangle$ dengan elemen satuan 1_R disebut ring pembagian jika untuk setiap $0_R \neq x \in R$, terdapat $y \in R$ dengan $x \cdot y = y \cdot x = 1_R$. Elemen y ini selanjutnya disebut sebagai invers perkalian x, dan dinotasikan x^{-1}.

Definisi 2.1.77 Ring $\langle R, +, \cdot \rangle$ disebut lapangan jika R merupakan ring divisi yang komutatif (Setiawan 2011).

Definisi 2.1.78 Diberikan ring R, dan himpunan bagian S dari R, dengan $S \neq \emptyset$, maka S adalah subring dari ring R jika dengan operasi-operasi yang sama dengan R, S membentuk struktur ring (Setiawan, 2011).

Contoh 2.1.79 Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ adalah suatu ring dengan operasi penjumlahan dan perkalian bilangan bulat. Subring tak sejati dari $\mathbb{Z}$ adalah $\mathbb{Z}$ dan $\{0\}$. Subring sejati dari $\mathbb{Z}$ adalah $S = \{ka | k \neq 0 \text{ dan } a \in \mathbb{Z}\}$.

Teorema 2.1.80 Diberikan ring R dan himpunan bagian S dari R, dengan $S \neq \emptyset$, S adalah subring dari ring R jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in S$ berlaku:

1. $ab^{-1} \in S$;
2. $ab \in S$;

(Setiawan, 2011).

Bukti. Akan dibuktikan bahwa jika R suatu ring dan S subring dari ring R, maka $a, b \in S$ berlaku $ab^{-1} \in S$ dan $a, b \in S$.

1. Diketahui S subring dari ring R, maka S adalah suatu ring, maka S terhadap operasi pertama merupakan suatu grup Abel. Diberikan sebarang $a, b \in S$, karena S suatu grup Abel, maka untuk setiap $a, b \in S$ terdapat a^{-1} dan $b^{-1} \in S$, berlaku $ab^{-1} \in S$.
2. Karena S suatu ring, maka untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a, b \in S$.

Akan dibuktikan bahwa jika untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $ab^{-1} \in S$ dan $a, b \in S$, maka S subring dari R. Diberikan sebarang $a \in S$ dan $(aa)^{-1} \in S, \quad e \in S$, hal ini menunjukkan S mempunyai elemen identitas. Diberikan sebarang $a \in S$ dan $b^{-1} \in S$ berlaku $a((b^{-1})^{-1}) = ab \in S$. Hal ini menunjukkan bahwa setiap elemen S mempunyai invers.

Selanjutnya karena $S \subset R$, dan R suatu ring, maka S memenuhi sifat-sifat yang dimiliki oleh R yaitu sifat-sifat asosiatif dan sifat komutatif pada operasi pertama, sifat asosiatif pada operasi kedua serta sifat distributif operasi kedua terhadap operasi pertama.

Jadi, semua aksioma ring terpenuhi oleh S, maka S adalah suatu ring. Karena $S \subset R$, maka S adalah subring dari R. ■

Definisi 2.1.81 Diberikan ring R dan himpunan bagian I dari ring R dengan $I \neq \emptyset$, maka I disebut ideal dari R jika dan hanya jika:

1. Untuk setiap $a, b \in I, \ a - b \in I$.
2. Untuk setiap $a \in I$, dan $r \in R$, berlaku $ar \in I$ dan $ra \in I$.

Apabila hanya memenuhi salah satu yaitu untuk setiap a $\in I$, dan $r \in R$, $ar \in I$ maka disebut ideal kanan, sedangkan jika memenuhi untuk setiap a $\in I$, dan $r \in R$, jika $ra \in I$, maka I disebut ideal kiri (Pinontoan, 2019).

Contoh 2.1.82 Diberikan ring $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ dan $2\mathbb{Z} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Akan ditunjukkan $2\mathbb{Z}$ ideal $\mathbb{Z}$.
Diberikan $a, b \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Z}$ dengan $a = 2k_1$, $b = 2k_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ sebagai berikut :

1. $a - b = 2k_1 - 2k_2 = 2(k_1 - k_2) \in 2\mathbb{Z}$,
2. $ra = r(2k_1) = 2(rk_1) \in 2\mathbb{Z}$,
3. $ar = (2k_1)r = 2(k_1 r) \in 2\mathbb{Z}$.

Karena memenuhi 3 syarat ideal maka $2\mathbb{Z}$ ideal $\mathbb{Z}$.

Dalam aljabar, semiring merupakan suatu struktur yang serupa dengan ring tetapi tanpa syarat bahwa setiap elemen harus memiliki invers terhadap operasi penjumlahan.

Definisi 2.1.83 Himpunan tak kosong R terhadap operasi biner "$+$" dan "$\cdot$" disebut semiring jika untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku:

1. operasi $+$ bersifat asosiatif terhadap operasi biner $+$ yaitu $(a + b) + c = a + (b + c)$,
2. operasi $+$ bersifat komutatif terhadap operasi biner $+$ yaitu $(a + b) = (b + a)$,
3. terdapat elemen $0 \in R$, yang memenuhi $r + 0 = 0 + r = r$ dan $r0 = 0r = 0$ untuk sebarang $r \in R$,
4. bersifat asosiatif terhadap operasi biner $\cdot$ yaitu $(ab)c = a(bc)$,
5. bersifat distributif terhadap dua operasi biner $+$ dan $\cdot$ yaitu
   $a(b + c) = ab + ac$
   $(a + b)c = ac + bc$
   (Pinontoan, 2019).

Contoh 2.1.84 Diberikan $\mathbb{R}^0$ adalah himpunan semua bilangan riil positif ditambah nol. Himpunan $\mathbb{R}^0$ merupakan semiring terhadap operasi penjumlahan dan penggandaan bilangan riil biasa, sebab untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}^0$ berlaku :

1. $x + y = y + x$;
   $(x + y) + z = x + (y + z)$;
   $x + 0 = 0 + x = x$, dengan 0 merupakan elemen netral,
2. $(xy)z = z(yz)$ dan $x1 = 1x = x$ dengan 1 merupakan elemen satuan;
3. $x0 = 0x = 0$, dengan 0 merupakan elemen netral,
4. $x(y + z) = (xy) + (xz)$ $(x + y)z = (xz) + (yz)$.

Karena memenuhi syarat-syarat semiring, maka $\mathbb{R}^0$ merupakan semiring terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan bilangan riil biasa.

Definisi 2.1.85 Jika R adalah semiring dan $I \subseteq R$, maka I dikatakan ideal pada semiring R apabila untuk sebarang $x, y \in I$ dan $r \in R$ memenuhi:

1. $x + y \in I$
2. $rx \in I$ dan $xr \in I$
   (Pinontoan, 2019).

2.2 Homomorfisma Ring

Pada bagian ini dibahas mengenai homomorfisma ring, yaitu pemetaan dari ring R_1 ke ring R_2 yang bersifat mengawetkan operasi biner dari ring tersebut. Berikut definisi homorfisma ring.

Definisi 2.2.1 Diberikan sebarang dua ring $\langle R_1, +_1, \cdot_1\rangle$ dan $\langle R_2, +_2, \cdot_2\rangle$. Fungsi $f : R_1 \to R_2$ disebut homomorfisma ring jika memenuhi untuk setiap $x, y \in R$, berlaku:

1. $f(x +_1 y) = f(x) +_2 f(y)$;
2. $f(x \cdot_1 y) = f(x) \cdot_2 f(y)$

(Dummit dkk., 2022).

Contoh 2.2.2 Didefinisikan $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $g(a) = a$. Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$. Berlaku:

1. $g(a+b) = (a+b) = a+b = g(a)+g(b)$
2. $g(ab) = (ab)$ =$g(a)g(b)$

Jadi, g merupakan homomorfisma ring.

Suatu homomorfisma f dari ring R ke R' disebut:

1. monomorfisma jika f merupakan fungsi injektif,
2. epimorfisma jika f merupakan fungsi surjektif,
3. isomorfisma jika f merupakan fungsi bijektif
   (Dummit dkk., 2022).

Definisi 2.2.3 Dua ring R ke R' dikatakan isomorfik, dinotasikan $R \cong R'$, jika terdapat suatu isomorfisma dari R ke R' (Malik, 2007).

Contoh 2.2.4 Diberikan $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Didefinisikan $\phi : C \to R$ dengan $\phi(a+bi) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Diberikan $z_1 = a+bi$ dan $z_2 = x+yi$, dengan $a+bi, x+yi \in \mathbb{C}$ dan $a, b, x, y \in \mathbb{R}$.
Akan ditunjukkan ϕ homomorfisma.
Diberikan sebarang $z_1 = a+bi$ dan $z_2 = x+yi$,

1. $\varphi(z_1+z_2) = \varphi((a+x)+(b+y)i) = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ -(b+y) & a+x \end{bmatrix};$

   $\varphi(z_1) = \varphi(a+bi) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad \varphi(z_2) = \varphi(x+yi) = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix};$

   $\varphi(z_1)+\varphi(z_2) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ -(b+y) & a+x \end{bmatrix}.$

   Jadi, $\varphi(z_1+z_2) = \varphi(z_1)+\varphi(z_2)$.

2. $z_1 \cdot z_2 = (a+bi)(x+yi) = (ax-by)+(ay+bx)i$

   $\varphi(z_1 \cdot z_2) = \varphi((ax-by)+(ay+bx)i) = \begin{bmatrix} ax-by & ay+bx \\ -(ay+bx) & ax-by \end{bmatrix};$

$$\varphi(z_1)\cdot\varphi(z_2) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax-by & ay+bx \\ -(ay+bx) & ax-by \end{bmatrix}.$$

Jadi, $\varphi(z_1 \cdot z_2) = \varphi(z_1)\cdot\varphi(z_2)$.

Karena φ memenuhi sifat homomorfisma ring, maka φ adalah homomorfisma dari ring C ke ring R.

Diberikan sebarang $a+bi, x+yi \in C$ sedemikian sehingga $\phi(a+bi) = \phi(x+yi)$.

Karena itu diperoleh $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$ dan berakibat $a = x$ dan $b = y$.

Dengan demikian $a + bi = x + yi$ yang berarti ϕ bersifat injektif.

Diberikan sebarang $A = \begin{bmatrix} r & s \\ -s & r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}$, yang berarti $r, s \in R$ Dibentuk $c = r + si$, maka jelas bahwa $c \in C$. Selanjutnya, diperhatikan bahwa $\phi(c) = \phi(r + si) = A$. Oleh karena itu, ϕ bersifat surjektif.

Jadi, homomorfisma ϕ merupakan isomorfisma dari ring C ke ring R. Akibatnya, $C \cong R$.

Teorema 2.2.5 Diberikan homomorfisma f dari ring R ke ring R'. Sifat-sifat berikut ini berlaku:

1. $f(0_R) = 0'_R$.
2. $f(-r) = -f(r)$ untuk setiap $r \in R$
   (Malik, 2007).

Definisi 2.2.6 Diberikan sebarang homomorfisma ring $f : R \to R'$. Karena f merupakan fungsi $R \to R'$, bayangan dari f yaitu *Im(f)* $= \{f(r) \,|\, r \in R\}$ merupakan himpunan bagian tak kosong dari R' (Setiawan, 2011).

Definisi 2.2.7 Diberikan sebarang homomorfisma f dari ring R ke ring R'. Kernel dari f, dinotasikan $\ker(f) = \{a \in R \,|\, f(a) = 0_{R'\}}$ (Setiawan, 2011).

Contoh 2.2.8 Diberikan ring $\mathbb{Z}$. Didefinisikan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(a) = 0$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$. Diperoleh Im$(f) = 0$ dan $\ker(f) = \mathbb{Z}$.

2.3 Himpunan *Rough*

Pada bagian ini akan dijelaskan tentang himpunan *fuzzy*, relasi *indicernibility*, ruang aproksimasi dan himpunan *rough*.
Himpunan *fuzzy* pertama kali dikenalkan dan dikembangkan oleh L.A. Zadeh yang berasal dari Amerika Serikat pada tahun 1965. Berikut definisi dari himpunan *fuzzy*.

Definisi 2.3.1 Diberikan F merupakan semua himpunan dengan daerah asal X ke $[0, 1]$. Fungsi keanggotaan $\mu_F(x)$ dari himpunan F adalah sebuah fungsi yang menempatkan nilai atau derajat keanggotaan ke setiap $x \in F$, $\mu : X \to [0, 1]$. Himpunan F disebut himpunan *fuzzy* (Setiawan, 2011).

Definisi 2.3.2 Keanggotaan suatu elemen dalam himpunan fuzzy dinyatakan dengan derajat keanggotaan yang nilainya terletak dalam interval $[0, 1]$.

$$\mu_F : X \to [0, 1].$$

Arti derajat keanggotaan adalah sebagai berikut:

1. jika $\mu_F(x) = 1$, maka x adalah anggota penuh dari himpunan A;
2. jika $\mu_F(x) = 0$, maka x adalah bukan anggota himpunan A;
3. jika $\mu_F(x) = \mu$, dengan $0 < \mu < 1$, maka x adalah anggota himpunan A derajat keanggotaan sebesar μ (Munir, 2012).

Contoh 2.3.3 Diberikan himpunan $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan $F \subset S$ jika $\mu_F(x) = \frac{40-3x}{50}$, dengan $x \in S$. Akan ditentukan himpunan *fuzzy* F. Didefinisikan derajat keanggotaan sebagai berikut:

$$\mu_F(1) = 0,74;$$
$$\mu_F(2) = 0,68;$$
$$\mu_F(3) = 0,62;$$
$$\mu_F(4) = 0,56;$$
$$\mu_F(5) = 0,50;$$
$$\mu_F(5) = 0,44.$$

Oleh karena itu, diperoleh himpunan *fuzzy* F sebagai berikut :

$$F = \{(1|0,74); (2|0,68); (3|0,62); (4|0,56); (5|0,50); (6|0,44)\}.$$

Contoh 2.3.4 Ani ingin mencari lokasi tempat kost saat dia mulai kuliah nanti. Beberapa tempat kost dia kunjungi dan diperoleh hasil sebagai berikut: tempat kost A dekat dari kampus diberi derajat 0,8, ada penjaga kost nya diberi derajat 0,9 namun air kurang lancar diberi derajat 0,4 dan harga lebih mahal diberi derajat 0,2. Tempat kost B lebih jauh jika ke kampus diberi derajat 0,5, tidak ada penjaga kost nya diberi derajat 0,1 air lancar diberi derajat 0,9 dan harga lebih murah diberi derajat 0,6. Tempat kost C semakin dekat jika ke kampus diberi derajat 0,9, ada penjaga kost nya diberi derajat 0,8, air lancar diberi derajat 0,9 dan harga lebih murah diberi derajat 0,8. Buatlah data di atas dalam tabel himpunan *fuzzy*.

Tabel 2.1 Tabel himpunan *fuzzy*

Kost/Derajat	Jarak	Keamanan	Air	Harga
A	$0,8$	$0,9$	$0,4$	$0,2$
B	$0,5$	$0,1$	$0,9$	$0,6$
C	$0,9$	$0,8$	$0,9$	$0,8$

Pada bagian ini akan didefinisikan tentang relasi *indicernibility*.

Definisi 2.3.5 Diberikan himpunan $P \subseteq R$, himpunan universal U, nilai atribut a untuk elemen x yaitu $\mu_a(x)$ dan nilai atribut a untuk elemen y yaitu $\mu_a(y)$. Kelas ekuivalen *IND(P)* didefinisikan sebagai berikut.

$$\text{IND}(P) = \{(x, y) \in U^2 \mid \forall a \in P, \mu_a(x) = \mu_a(y)\}$$

IND (P) atau relasi *indicernibility* ini berhubungan dengan kelas ekuivalen yang mana dua objek ekuivalen jika dan hanya jika keduanya memiliki kesamaan vektor nilai atribut untuk atribut di P. Partisi U yang ditentukan oleh *IND (P)* dilambangkan dengan $U/$*IND (P)* atau U/P yang merupakan himpunan kelas ekuivalen yang dihasilkan oleh *IND (P)* dan didefinisikan sebagai berikut:

$$[x]_P = \{y \in U \mid (x, y) \in IND(P)\}$$

Untuk setiap X, aproksimasi bawah didefinisikan sebagai $\underline{P}(X) = \{x \in U \mid [x]_P \subseteq X\}$ dan aproksimasi atas didefinisikan sebagai $\overline{P}(X) = \{x \in U \mid [x]_P \cap X \neq \emptyset\}$. Untuk setiap $X \in U$, himpunan *rough* didefinisikan sebagai $RS(X) = (\underline{P}(X), \overline{P}(X))$ (Jensen, 2014).

Contoh 2.3.6 Diberikan himpunan $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ dan $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ merupakan himpunan *fuzzy* yang nilai keanggotaannya dinyatakan dengan bilangan antara 0 dan 1 seperti pada tabel berikut.

Tabel 2.2 Tabel nilai keanggotaan himpunan *fuzzy*

A/U	a_1	a_2	a_3
x_1	$0,1$	$0,4$	$0,5$
x_2	$0,4$	$0,6$	$0,7$
x_3	$0,1$	$0,4$	$0,5$
x_4	$0,4$	$0,6$	$0,7$
x_5	$0,1$	$0,2$	$0,7$

Kelas ekuivalensi berdasarkan definisi $IND(P)$ diberikan sebagai berikut:

$$[x_1]_P = \{x_1, x_3\}$$
$$[x_2]_P = \{x_2, x_4\}$$
$$[x_3]_P = \{x_5\}.$$

Salah satu konsep matematis yang stukturnya terdiri atas himpunan dan sebuah konsep yang menghubungkan elemen-elemen dalam himpunan tersebut disebut ruang aproksimasi. Pada bagian ini akan dijelaskan definisi ruang aproksimasi.

Definisi 2.3.7 Diberikan suatu himpunan tak kosong berhingga S yang disebut himpunan semesta dan θ adalah relasi ekuivalensi dari S. Pasangan (S, θ) disebut ruang aproksimasi (Miao, 2005).

Definisi 2.3.8 Jika $X \subseteq S$, aproksimasi bawah dari X dinotasikan $\underline{P}(X)$. Ruang aproksimasi (S, θ) merupakan gabungan dari kelas ekuivalensi yang termuat dalam X, sedangkan aproksimasi atas dari X dinotasikan $\overline{P}(X)$ pada ruang aproksimasi (S, θ) merupakan gabungan dari kelas ekuivalensi yang irisannya bukan merupakan himpunan kosong (Praba dkk., 2013).

Misalkan $S = (U, R)$ menyatakan ruang aproksimasi dan $X \subseteq S$. Aproksimasi bawah dari X didefinisikan sebagai berikut:

$$\underline{P}(X) = \{x \in U \mid [x]_P \subseteq X\}.$$

Aproksimasi atas dari X didefinisikan sebagai berikut:

$$\overline{P}(X) = \{x \in U \mid [x]_P \cap X \neq \emptyset\},$$

dengan $[x]_P$ menunjukkan kelas ekuivalensi yang terdapat di X (Kumar dan Yadav, 2015).

Contoh 2.3.9 Berdasarkan Contoh 2.3.6, diketahui kelas ekuivalensi sebagai berikut:

$$[x_1]_P = \{x_1, x_3\}$$
$$[x_2]_P = \{x_2, x_4\}$$
$$[x_3]_P = \{x_5\}.$$

Selanjutnya, diberikan himpunan $X = \{x_1, x_2, x_3\} \subseteq U$. Oleh karena itu, aproksimasi bawah dari X sebagai berikut:

$$\underline{P}(X) = \{x_1, x_3\}.$$

Aproksimasi atas dari X sebagai berikut:

$$\overline{P}(X) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}.$$

Pada awal tahun 1980-an, Pawlak memperkenalkan tentang himpunan *rough*. Metode himpunan *rough* adalah suatu pendekatan matematis untuk menganalisa pola data yang tak pasti. Himpunan *rough* berkaitan dengan aproksimasi bawah dan aproksimasi atas.

Definisi 2.3.10 Diberikan ruang aproksimasi (S, θ). Jika $X \subseteq S$, dan $\overline{P}(X) - \underline{P}(X) \neq \emptyset$, maka $RS(X)$ disebut himpunan *rough* (Pawlak 1982).

Contoh 2.3.11 Berdasarkan Contoh 2.3.6, diketahui kelas ekuivalen sebagai berikut.

$$[x_1]_P = \{x_1, x_3\}$$
$$[x_2]_P = \{x_2, x_4\}$$
$$[x_3]_P = \{x_5\}.$$

Berdasarkan Contoh 2.3.9 diperoleh $\underline{P}(X) = \{x_1, x_3\}$ dan $\overline{P}(X) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ dari $X \subseteq U$. Pasangan berurut dari aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari X disebut himpunan *rough*. Himpunan *rough* yang diperoleh adalah $RS(X) = (\{x_1, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\})$.

2.4 Semiring *Rough*

Pada bagian ini akan didefinisikan semigrup *rough*, monoid *rough*, konsep Praba, semiring *rough*, ideal pada semiring *rough*.

Definisi 2.4.1 Diberikan ruang aproksimasi (S, θ) dan operasi biner $*$ pada himpunan semesta S. Himpunan bagian X dari S dikatakan semigrup *rough* pada ruang aproksimasi jika memenuhi aksioma berikut:

1. untuk setiap $a, b \in X, a * b \in \overline{P}(X)$;
2. untuk setiap $a, b, c \in X, (a * b) * c = a * (b * c) \in \overline{P}(X)$

(Bagirmaz dan Ozcan, 2015).

Contoh 2.4.2 Diberikan himpunan $U = \mathbb{Z}_9 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}\}$. Didefinisikan relasi R dari $\mathbb{Z}_9$ ke $\mathbb{Z}_9$ yaitu aRb dengan $a, b \in \mathbb{Z}_9$ jika dan hanya jika $a + 3b = 2y$, dengan $y \in \mathbb{Z}$. Terbukti bahwa R adalah relasi ekuivalensi dengan kelas ekuivalensi sebagai berikut.

$$E_1 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}\};$$

$$E_2 = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\}.$$

Diberikan himpunan tak kosong $X = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{8}\}$, dengan operasi biner $+_9$. Lalu ditentukan aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari himpunan bagian X sebagai berikut.

$$\underline{P}(X) = \{x \mid [x]_p \subseteq X\} = \emptyset;$$

$$\overline{P}(X) = \{x \mid [x]_p \cap X \neq \emptyset\} = E_1 \cup E_2 = U.$$

Berikut diberikan Tabel *Cayley* dari himpunan X terhadap operasi biner $+_9$. Akan ditunjukkan bahwa $(\overline{P}(X), +_9)$ merupakan semigrup *rough*.

Berdasarkan Tabel 2.3 terbukti bahwa:

(1) untuk setiap $a, b \in X$ berlaku $a +_9 b \in \overline{P}(X)$;

Tabel 2.3 Tabel *Cayley* operasi $+_9$ pada X

$+_9$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$

(2) untuk setiap $a, b, c \in X$, $(a +_9 b) +_9 c = a +_9 (b +_9 c)$. Karena operasi penjumlahan modulo 10 bersifat asosiatif, dapat diperoleh bahwa $+_9$ bersifat asosiatif di $\overline{P}(X)$.

Dari (1) dan (2) terbukti bahwa $(\overline{P}(X), +_9)$ merupakan semigrup pada himpunan *rough*.

Selanjutnya akan didefinisikan mengenai monoid pada himpunan *rough*.

Definisi 2.4.3 Diberikan ruang aproksimasi (S, θ) dan $X \subseteq S$ merupakan semigrup pada himpunan *rough* dengan operasi biner $*$ pada U. Elemen $a \in \overline{P}(X)$ disebut identitas kiri dari S, jika untuk setiap $b \in X$ berlaku $ab = b$, sedangkan a disebut identitas kanan dari X, jika untuk setiap $b \in X$ berlaku $ba = b$. Jika a merupakan identitas kiri dan identitas kanan dari X, maka a disebut elemen identitas *rough*. Semigrup pada himpunan *rough* merupakan monoid pada himpunan *rough*, jika memiliki identitas *rough* (Bagirmaz dan Ozcan, 2015).

Contoh 2.4.4 Berdasarkan Contoh 2.4.2 telah dibuktikan bahwa $(\overline{P}(X), +_9)$ merupakan semigrup pada himpunan *rough*. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $(\overline{P}(X), +_9)$ merupakan monoid pada himpunan *rough*. Diberikan sebarang $a \in \overline{P}(X)$. Oleh karena itu, $a +_9 \bar{0} = a$ dan $\bar{0} +_9 a = a$. Oleh karena itu, terdapat elemen identitas yaitu $\bar{0} \in \overline{P}(X)$. Jadi, terbukti bahwa $(\overline{P}(X), +_9)$ merupakan monoid pada himpunan *rough*.

Pada bagian ini akan didefinisikan mengenai *indiscernibility weight*, Praba $\triangle$, operasi biner Praba $\triangle$, elemen pivot, Praba $\triangledown$, operasi biner Praba $\triangledown$ dan order dari semiring pada himpunan *rough*.

Definisi 2.4.5 Jika $X \subseteq S$, maka banyaknya kelas ekuivalensi berdasarkan $IND(P)$ pada X disebut *Indiscernibility weight* dari X dinotasikan dengan $IW(X)$ (Praba dkk., 2013).

Definisi 2.4.6 Misalkan $X, Y \subseteq S$. Praba $\triangle$ didefinisikan sebagai berikut:

1. jika $IW(X\cup Y) = IW(X)+IW(Y)-IW(X\cap Y)$, maka $X \triangle Y = X\cup Y$;
2. jika $IW(X \cup Y) > IW(X) + IW(Y) - IW(X \cap Y)$, maka identifikasi kelas ekuivalensi yang diperoleh dari $X \cup Y$, kemudian hapus elemen-elemen dari kelas tersebut yang termasuk dalam Y. Didapatkan himpunan baru Y, sehingga diperoleh $X \triangle Y$. Ulangi proses hingga $IW(X \cup Y) = IW(X) + IW(Y) - IW(X \cap Y)$

(Praba dkk, 2013).

Contoh 2.4.7 Berdasarkan Contoh 2.3.6, diberikan himpunan $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ dengan kelas ekuivalen berdasarkan $IND(P)$ adalah sebagai berikut.

$$[x_1]_P = \{x_1, x_3\}$$
$$[x_2]_P = \{x_2, x_4\}$$
$$[x_3]_P = \{x_5\}.$$

Diberikan himpunan $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, Y = \{x_1, x_5\} \subseteq U$, sehingga diperoleh:
$IW(X) = 2$; $IW(Y) = 1$; $IW(X \cup Y) = 3$; $IW(X \cap Y) = 0$.
Karena $IW(X \cup Y) = IW(X) + IW(Y) - IW(X \cap Y)$ diperoleh
$X \triangle Y = X \cup Y$= $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$.
Selanjutnya didefinisikan operasi biner Praba $\triangle$.

Definisi 2.4.8 Diberikan himpunan $T = \{RS(X)|X \subseteq U\}$ dan $RS(X)$ merupakan *Rough Set* dari X dengan $\triangle$: $T \times T \to T$, sehingga:

$$\triangle\ (RS(X), RS(Y)) = RS(X \vartriangle Y)$$

(Praba dkk., 2013).

Setelah mengetahui definisi *indiscernibility weight*, Praba $\triangle$, operasi biner Praba $\triangle$, pada bagian ini akan didefinisikan Praba $\triangledown$, operasi biner Praba $\triangledown$.

Definisi 2.4.9 Diberikan himpunan $X, Y \subseteq U$. Elemen $x \in U$ disebut elemen pivot, jika $[x]_p \nsubseteq X \cap Y$, tetapi $[x]_P \cap X \neq \emptyset$ dan $[x]_P \cap Y \neq \emptyset$ (Praba dkk., 2013).

Definisi 2.4.10 Diberikan himpunan $X, Y \subseteq U$. Himpunan elemen pivot X dan Y disebut himpunan pivot dari X dan Y yang dinotasikan dengan $P_{X \cap Y}$ (Praba dkk., 2013).

Definisi 2.4.11 Praba $\triangledown$ dari X dan Y dinotasikan dengan $X \triangledown Y$ dan didefinisikan sebagai berikut:

$$X \triangledown Y = \{x | [x]_p \subseteq X \cap Y\} \cup P_{X \cap Y}, \text{ dengan } X, Y \subseteq U$$

(Praba dkk., 2013).

Contoh 2.4.12 Berdasarkan Contoh 2.3.6, diberikan himpunan $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ dengan kelas ekuivalen berdasarkan $IND(P)$ adalah sebagai berikut.

$$[x_1]_P = \{x_1, x_3\}$$
$$[x_2]_P = \{x_2, x_4\}$$
$$[x_3]_P = \{x_5\}.$$

Diberikan himpunan $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, Y = \{x_1, x_5\} \subseteq U$, sehingga diperoleh:

$$X \cap Y = \{x_1\}.$$

Karena $[x]_p \cap X \neq \emptyset$, $[x]_p \cap Y \neq \emptyset$ dan ,$[x_1]_(p \cap Y) \neq \emptyset$, diperoleh x_1, x_3 merupakan elemen pivot, sehingga $P_{(X \cap Y)} = \{x_1, x_3\}$. Oleh karena itu, $X \triangledown Y = (X \cap Y) \cup P_{(X \cap Y)} = \{x_1, x_3\}$. Selanjutnya didefinisikan operasi biner Praba $\triangledown$.

Selanjutnya didefinisikan operasi biner Praba $\triangledown$.

Definisi 2.4.13 Diberikan himpunan $T = \{RS(X)|X \subseteq U\}$ dan $RS(X)$ merupakan himpunan *rough* dari X dengan $\triangledown : T \times T \to T$, sehingga.

$$\triangledown(RS(X), RS(Y)) = RS(X \triangledown Y)$$

(Manimaran dkk., 2014)

Selanjutnya akan diberikan teorema semiring pada himpunan *rough* menggunakan konsep Praba dengan operasi $\triangle$ dan $\triangledown$.

Teorema 2.4.14 Diberikan sistem informasi $I = (U, A)$ dengan U merupakan himpunan semesta dan A himpunan atribut pada U. Jika T merupakan himpunan dari semua himpunan *rough*, maka $(T, \triangle)$ merupakan monoid (Manimaran dkk., 2013).
Bukti.

(1) Akan ditunjukkan T tertutup terhadap operasi $\triangle$. Diberikan sebarang $X_1, X_2 \in U$, dengan $X_1 \triangle X_2 = X_3 \subseteq U$. Oleh karena itu, $RS(X_1 \triangle X_2) = RS(X_3) \in T$. Oleh karena itu terbukti T tertutup terhadap operasi $\triangle$.

(2) Diberikan $X_1, X_2, X_3 \subseteq U$ dan $RS(X_1), RS(X_2), RS(X_3) \in T$. Akan ditunjukkan bahwa, $RS(X_1 \triangle (X_2 \triangle X_3)) = RS((X_1 \triangle X_2) \triangle X_3)$.

   (a) Diberikan $x \in \underline{RS}(X_1 \triangle (X_2 \triangle X_3))$. Berdasarkan Definisi 2.3.8,

$$\begin{aligned} x \in \underline{RS}(X_1 \triangle (X_2 \triangle X_3)) &= \{x \in U|[x_1]_p \subseteq X_1 \triangle (X_2 \triangle X_3)\} \\ &= [x_1]_p \subseteq X_1 \text{ atau } [x_1]_p \subseteq (X_2 \triangle X_3) \\ &= [x_1]_p \subseteq X_1 \text{ atau } [x_1]_p \subseteq X_2 \text{ atau } [x_1]_p \subseteq X_3 \\ &= [x_1]_p \subseteq X_1 \triangle X_2 \text{ atau } [x_1]_p \subseteq X_3 \\ &= [x_1]_p \subseteq (X_1 \triangle X_2) \triangle X_3 \\ &= x \in \underline{RS}((X_1 \triangle X_2) \triangle X_3). \end{aligned}$$

Jadi, $\underline{RS}(X_1 \vartriangle (X_2 \vartriangle X_3)) \subseteq \underline{RS}((X_1 \vartriangle X_2) \vartriangle X_3)$................ (2.1)

Diberikan $x \in \underline{RS}((X_1 \vartriangle X_2) \vartriangle X_3)$. Berdasarkan Definisi 2.3.8,

$$\begin{aligned} x \in \underline{RS}((X_1 \vartriangle X_2) \vartriangle X_3) &= \{x \in U | [x_1]_p \subseteq (X_1 \vartriangle X_2 \vartriangle X_3\} \\ &= [x_1]_p \subseteq (X_1 \vartriangle X_2) \text{ atau } [x_1]_p \subseteq X_3 \\ &= [x_1]_p \subseteq X_1 \text{ atau } [x_1]_p \subseteq X_2 \text{ atau } [x_1]_p \subseteq X_3 \\ &= [x_1]_p \subseteq X_1 \text{ atau } [x_1]_p \subseteq (X_2 \vartriangle X_3) \\ &= [x_1]_p \subseteq X_1 \vartriangle (X_2 \vartriangle X_3)) \\ &= x \in \underline{RS}(X_1 \vartriangle (X_2 \vartriangle X_3)). \end{aligned}$$

Jadi, $\underline{RS}((X_1 \vartriangle X_2) \vartriangle X_3) \subseteq \underline{RS}(X_1 \vartriangle (X_2 \vartriangle X_3))$................ (2.2)

Dari Persamaan (2.1) dan (2.2) terbukti bahwa: $\underline{RS}(X_1 \vartriangle (X_2 \vartriangle X_3)) = \underline{RS}((X_1 \vartriangle X_2) \vartriangle X_3)$.

(b) Diberikan $x \in \overline{RS}(X_1 \vartriangle (X_2 \vartriangle X_3))$. Berdasarkan Definisi 2.3.8,

$$\begin{aligned} x \in \overline{RS}(X_1 \vartriangle (X_2 \vartriangle X_3)) &= \{x \in U | [x_1]_p \subseteq X_1 \vartriangle (X_2 \vartriangle X_3)\} \\ &= [x_1]_p \subseteq X_1 \text{ atau } [x_1]_p \subseteq (X_2 \vartriangle X_3) \\ &= [x_1]_p \subseteq X_1 \text{ atau } [x_1]_p \subseteq X_2 \text{ atau } [x_1]_p \subseteq X_3 \\ &= [x_1]_p \subseteq X_1 \vartriangle X_2 \text{ atau } [x_1]_p \subseteq X_3 \\ &= [x_1]_p \subseteq (X_1 \vartriangle X_2) \vartriangle X_3 \\ &= x \in \overline{RS}((X_1 \vartriangle X_2) \vartriangle X_3). \end{aligned}$$

Jadi, $\overline{RS}(X_1 \vartriangle (X_2 \vartriangle X_3)) \subseteq \overline{RS}((X_1 \vartriangle X_2) \vartriangle X_3)$................ (2.3)

Diberikan $x \in \overline{RS}((X_1 \triangle X_2) \triangle X_3)$. Berdasarkan Definisi 2.3.8

$$
\begin{aligned}
x \in \overline{RS}((X_1 \triangle X_2) \triangle X_3) &= \{x \in U | [x_1]_p \subseteq (X_1 \triangle X_2 \triangle X_3\} \\
&= [x_1]_p \subseteq (X_1 \triangle X_2) \text{ atau } [x_1]_p \subseteq X_3 \\
&= [x_1]_p \subseteq X_1 \text{ atau } [x_1]_p \subseteq X_2 \text{ atau } [x_1]_p \subseteq X_3 \\
&= [x_1]_p \subseteq X_1 \text{ atau } [x_1]_p \subseteq (X_2 \triangle X_3) \\
&= [x_1]_p \subseteq X_1 \triangle (X_2 \triangle X_3)) \\
&= x \in \overline{RS}(X_1 \triangle (X_2 \triangle X_3)).
\end{aligned}
$$

Jadi, $\overline{RS}((X_1 \triangle X_2) \triangle X_3) \subseteq \overline{RS}(X_1 \triangle (X_2 \triangle X_3))$.............. (2.4)

Dari Persamaan (2.3) dan (2.4) terbukti bahwa: $\overline{RS}(X_1 \triangle (X_2 \triangle X_3)) = \overline{RS}((X_1 \triangle X_2) \triangle X_3)$. Oleh karena itu, dari (a) dan (b) terbukti bahwa: $RS(X_1 \triangle (X_2 \triangle X_3)) = RS((X_1 \triangle X_2) \triangle X_3)$. Jadi, $\triangle$ bersifat asosiatif.

Karena (1) dan (2) terpenuhi, $(T, \triangle)$ semigrup pada himpunan *rough*.

Selanjutnya, semigrup pada himpunan *rough* yang memiliki elemen identitas disebut sebagai monoid pada himpunan *rough*.

Diberikan $RS(X_1) \in T$. Oleh karena itu:

$$
\begin{aligned}
RS(X_1) \triangle RS(\emptyset) &= RS(X_1 \triangle \emptyset) \\
&= RS(X_1).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
RS(X_1 \triangle \emptyset) &= RS(X_1) \triangle RS(\emptyset) \\
&= RS(X_1).
\end{aligned}
$$

Jadi, elemen identitas terhadap $\triangle$ adalah $RS(\emptyset) \in T$.

Oleh karena itu, terbukti bahwa $(T, \triangle)$ merupakan monoid pada himpunan *rough* (Praba dkk., 2013).

Teorema 2.4.15 Diberikan sistem informasi $I = (U, A)$, dengan U merupakan himpunan semesta dan A atribut pada U. Jika T merupakan himpunan dari semua himpunan *rough*, maka $(T, \triangledown)$ merupakan monoid (Manimaran dkk., 2013).

Bukti.

1. Akan ditunjukkan T tertutup terhadap operasi $\triangledown$. Diberikan $X_1, X_2 \in U$, jika $X_1 \triangledown X_2 = X_3 \subseteq U$. Oleh karena itu, $RS(X_1 \triangledown X_2) = RS(X_3) \in T$. Terbukti bahwa $\triangledown$ tertutup.
2. Diberikan $X_1, X_2, X_3 \subseteq U$ dan $RS(X_1), RS(X_2), RS(X_3) \in T$. Akan ditunjukkan bahwa $RS(X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3)) = RS((X_1 \triangledown X_2) \triangledown X_3)$ yaitu $\underline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3)) = \underline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \triangledown X_3)$, dan $\overline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3)) = \overline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \triangledown X_3)$.
   (a) Diberikan $x \in \underline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3))$, berdasarkan Definisi 2.3.8,

$$\begin{aligned} x \in \underline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3)) &= \{x \in U | [x_1]_p \subseteq X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3)\} \\ &= [x_1]_p \subseteq (X_1 \cap (X_2 \triangledown X_3)) \cup P_{X_1 \cap (X_2 \triangledown X_3)} \\ &= [x_1]_p \subseteq X_1 \text{ dan } [x_1]_p \subseteq X_2 \triangledown X_3 \text{ atau} [x_1]_p \subseteq \\ &\quad\ P_{X_1 \cap (X_2 \triangledown X_3)} \\ &= [x_1]_p \subseteq X_1 \text{ dan } [x_1]_p \subseteq (X_2 \cap X_3) \cup [x_1]_p \subseteq \\ &\quad\ P_{X_2 \cap X_3} \\ &= [x_1]_p \subseteq X_1 \text{ dan } [x_1]_p \subseteq X_2 \cap X_3 \text{ atau } [x_1]_p \subseteq \\ &\quad\ P_{X_2 \cap X_3} \\ &= [x_1]_p \subseteq X_1 \text{ dan } [x_1]_p \subseteq X_2 \text{ dan } [x_1]_p \subseteq X_3 \\ &= [x_1]_p \subseteq X_1 \cap X_2 \text{ dan } [x_1]_p \subseteq X_3 \\ &= [x_1]_p \subseteq (X_1 \triangledown X_2) \triangledown X_3 \\ &= x \in \underline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \triangledown X_3). \end{aligned}$$

   Jadi, $\underline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3)) \subseteq \underline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \triangledown X_3)$. Dengan pembuktian serupa, diperoleh bahwa: $\underline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \triangledown X_3) \subseteq \underline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3))$. Oleh karena itu, $\underline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3)) = \underline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \triangledown X_3)$.

   (b) Diberikan sebarang $x \in \overline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3))$, dengan $\{x \in U | [x_1]_p \cap$

$(X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3)) \neq \emptyset\}$. Akibatnya $[x_1]_p \cap (X_1 \cap (X_2 \triangledown X_3)) \cup RS_{X_1 \cap (X_2 \triangledown X_3)}$ $\neq \emptyset$, sehingga $[x_1]_p \cap (X_1 \cap (X_2 \triangledown X_3)) \neq \emptyset$ atau $[x_1]_p \cap RS_{X_1 \cap (X_2 \triangledown X_3)} \neq \emptyset$.

Kasus 1.

$[x_1]_p \cap (X \cap (X_2 \triangledown X_3)) \cup P_{X \cap (X_2 \triangle X_3)} \neq \emptyset$, akibatnya $[x_1]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap (X_2 \cap X_3) \cup P_{X_2 \cap X_3} \neq \emptyset$ sehingga$[x_1]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap (X_2 \cap X_3)$ atau $[x_1]_p \cap P_{X_2 \cap X_3} \neq \emptyset$.

i. Jika $[x_1]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap X_2 \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap X_3 \neq \emptyset$ diperoleh $[x_1]_p \cap X \cap X_2 \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap X_3 \neq \emptyset$. Oleh karena itu, $[x_1]_p \cap ((X \triangledown X_2) \triangledown X_3) \neq \emptyset$. Jadi, $\overline{RS}(X \triangledown (X_2 \triangledown X_3)) \subseteq \overline{RS}((X \triangledown X_2) \triangledown X_3)$.

ii. Jika $[x_1]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap P_{X_2 \cap X_3} \neq \emptyset$ maka $[x_1]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap X_2 \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap X_3 \neq \emptyset$. Oleh karena itu, $[x_1]_p \cap (X \cap X_2) \neq \emptyset$ sehingga $[x_1]_p \cap ((X \triangledown X_2) \triangledown X_3) \neq \emptyset$.
Jadi, $\overline{RS}(X \triangledown (X_2 \triangledown X_3)) \subseteq \overline{RS}((X \triangledown X_2) \triangledown X_3)$.

Kasus 2:

$[x_1]p \cap (X \cap (X_2 \triangledown X_3)) \neq \triangledown$ atau $[x_1]p \cap P_{X \cap (X_2 \triangledown X_3)} \neq \emptyset$. Akibatnya $[x_1]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap (X_2 \triangledown X_3) \neq \emptyset$. Sehingga, $[x_1]_p \cap ((X \triangledown X_2) \triangledown X_3)$ $\neq \emptyset$. Jadi, $\overline{RS}(X \triangledown (X_2 \triangledown X_3)) \subseteq \overline{RS}((X \triangledown X_2) \triangledown X_3)$.

Demikian pula sebaliknya, diberikan sebarang $x \in \overline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \triangledown X_3)$, dengan $\{x \in U | [x_1]_p \cap ((X_1 \triangledown X_2) \triangledown X_3) \neq \emptyset\}$. Akibatnya $[x_1]_p \cap ((X_1 \triangledown X_2) \cap X_3)) \cup RS_{(X_1 \triangledown X_2) \cap X_3} \neq \emptyset$, sehingga $[x_1]_p \cap ((X_1 \triangledown X_2) \cap X_3) \neq \emptyset$ atau $[x_1]_p \cap RS_{(X_1 \triangledown X_2) \cap X_3} \neq \emptyset$.

Kasus 1:

$[x_1]_p \cap (X_1 \triangledown X_2) \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap X_3 \neq \emptyset$. Akibatnya $[x_1]_p \cap (X_1 \cap X_2) \cup RS_{X_1 \cap X_2} \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap X_3 \neq \emptyset$, sehingga $[x_1]_p \cap (X_1 \cap X_2) \neq \emptyset$ atau $[x_1]_p \cap RS_{X_1 \cap X_2} \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap Z \neq \emptyset$.

i. Jika $[x_1]_p \cap X_1 \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap X_2 \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap X_3 \neq \emptyset$, maka $[x_1]_p \cap X_1 \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap (X_2 \cap X_3) \neq \emptyset$. Oleh karena itu $[x_1]_p \cap (X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3)) \neq \emptyset$.
Jadi $\overline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \triangledown X_3) \subseteq \overline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3))$.

ii. Jika $[x_1]_p \cap P_{X_1 \cap X_2} \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap X_3 \neq \emptyset$, maka $[x_1]_p \cap X_1 \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap X_2 \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap X_3 \neq \emptyset$. Oleh karena itu $[x_1]_p \cap X_1 \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap (X_2 \cap X_3) \neq \emptyset$, sehingga $[x_1]_p \cap (X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3)) \neq \emptyset$.
Jadi $\overline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \triangledown X_3) \subseteq \overline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3))$.

Kasus 2:
$[x_1]_p \cap P_{(X_1 \triangledown X_2) \cap X_3} \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap X_3 \neq \emptyset$. Akibatnya $[x_1]_p \cap (X_1 \triangledown X_2) \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap X_3 \neq \emptyset$, sehingga $[x_1]_p \cap (X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3)) \neq \emptyset$
Oleh karena itu, $\overline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \triangledown X_3) \subseteq \overline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3))$.
Jadi, $\overline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3)) = \overline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \triangledown X_3)$.

Dari (a) dan (b) terbukti bahwa:

$$RS(X_1 \triangledown (X_2 \triangledown X_3)) = RS((X_1 \triangledown X_2) \triangledown X_3).$$

Jadi $\triangledown$ bersifat asosiatif.
Berdasarkan (1) dan (2) terbukti bahwa $(T, \triangledown)$ semigrup.

Selanjutnya, semigrup *rough* yang memiliki elemen identitas disebut sebagai monoid.

Diberikan sebarang $RS(X_1) \in T$. Terdapat $RS(U) \in T$, sehingga $RS(X_1) \triangledown RS(U) = RS(X_1 \triangledown U) = RS(X_1)$.
Jadi $RS(X_1 \triangledown U) = RS(U \triangledown X_1) = RS(X_1)$, dengan $X_1 \triangledown U = (X_1 \cap U) \cup P_{X_1 \cap U} = X_1 \cup P_{X_1 \cap U} = X_1$.
Jadi, $RS(X_1 \triangledown U) = RS(X_1)$.
Terbukti elemen identitas T terhadap $\triangledown$ adalah $RS(U) \in T$. Oleh karena itu, $(T, \triangledown)$ merupakan monoid pada himpunan *rough* (Manimaran dkk., 2014).

Pada bagian ini akan dijelaskan tentang semiring pada koleksi himpunan *rough* (T,$\triangle, \triangledown$).

Teorema 2.4.16 Misalkan $I = (U, A)$ adalah sistem informasi, dengan U adalah himpunan semesta berhingga dan A adalah himpunan atribut serta T adalah himpunan semua himpunan *rough* maka $(T, \triangle, \triangledown)$ adalah semiring pada koleksi himpunan *rough* (Praba dkk., 2015).

Bukti.

Berdasarkan Teorema 2.4.14 dan 2.4.15, diketahui bahwa $(T, \triangle)$ dan $(T, \triangledown)$ masing-masing merupakan semigrup. Selanjutnya akan ditunjukkan sifat distributif untuk $RS(X_1), RS(X_2)$ dan $RS(X_3) \in T$, yaitu:
$RS(X_1 \triangle (X_2 \triangledown X_3)) = RS((X_1 \triangle X_2) \triangledown (X_1 \triangle X_3))$, dan
$RS(X_1 \triangledown (X_2 \triangle X_3)) = RS((X_1 \triangledown X_2) \triangle (X_1 \triangledown X_3))$.

1. Akan ditunjukkan bahwa:

   (a) $\underline{RS}(X_1 \triangle (X_2 \triangledown X_3)) = \underline{RS}((X_1 \triangle X_2) \triangledown (X_1 \triangle X_3))$.
   Diberikan sebarang $x \in \underline{RS}(X_1 \triangle (X_2 \triangledown X_3))$, sehingga $[x_1]_p \subseteq (X_1 \triangle (X_2 \triangledown X_3))$. Akibatnya $[x_1]_p \subseteq X_1$ atau $[x_1]_p \subseteq X_2 \triangledown X_3$, sehingga $[x_1]_p \subseteq X_1$ atau $[x_1]_p \subseteq ((X_2 \cap X_3) \cup P_{X_2 \cap X_3})$. Oleh karena itu, $[x_1]_p \subseteq ((X_1 \triangle X_2) \triangledown (X_1 \triangle X_3))$. Hal ini berarti $x \in RS((X_1 \triangle X_2) \triangledown (X_1 \triangle X_3))$.
   Jadi $\underline{RS}(X_1 \triangle (X_2 \triangledown X_3)) \subseteq \underline{RS}((X_1 \triangle X_2) \triangledown (X_1 \triangle X_3))$.

   Demikian sebaliknya, diberikan sebarang $x \in \underline{RS}((X_1 \triangle X_2) \triangledown (X_1 \triangle X_3))$, sehingga $[x_1]_p \subseteq ((X_1 \triangle X_2) \triangledown (X_1 \triangle X_3))$. Akibatnya $[x_1]_p \subseteq ((X_1 \triangle X_2) \cap (X_1 \triangle X_3)) \cup P_{(X_1 \triangle X_2) \cap (X_1 \triangle X_3)}$, sehingga $[x_1]_p \subseteq X_1 \triangle X_2$ dan $[x_1]_p \subseteq X_1 \triangle X_3$ atau $[x_1]_p \subseteq P_{(X_1 \triangle X_2) \cap (X_1 \triangle X_3)}$. Oleh karena itu, $[x_1]_p \subseteq X_1$ atau $[x_1]_p \subseteq X_2$ dan $[x_1]_p \subseteq X_1$ atau $[x_1]_p \subseteq X_3$, sehingga $[x_1]_p \subseteq X_1$ atau $[x_1]_p \subseteq X_2$ dan $[x_1]_p \subseteq X_3$. Hal ini berarti $[x_1]_p \subseteq X_1$ atau $[x_1]_p \subseteq X_2 \cap X_3$, sehingga $[x_1]_p \subseteq (X_1 \triangle (X_2 \triangledown X_3))$. Akibatnya $[x_1]_p \in \underline{RS}(X_1 \triangle (X_2 \triangledown X_3))$.
   Jadi $\underline{RS}((X_1 \triangle X_2) \triangledown (X_1 \triangle X_3)) \subseteq \underline{RS}(X_1 \triangle (X_2 \triangledown X_3))$.
   $\therefore \underline{RS}(X_1 \triangle (X_2 \triangledown X_3)) = \underline{RS}((X_1 \triangle X_2) \triangledown (X_1 \triangle X_3))$.

(b) $\overline{RS}(X_1 \vartriangle (X_2 \triangledown X_3)) = \overline{RS}((X_1 \vartriangle X_2) \triangledown (X_1 \vartriangle X_3))$.

Diberikan sebarang $x \in \overline{RS}(X_1 \vartriangle (X_2 \triangledown X_3))$, sehingga $[x_1]_p \cap (X_1 \vartriangle (X_2 \triangledown X_3)) \neq \emptyset$. Akibatnya $[x_1]_p \cap X_1 \neq \emptyset$ atau $[x_1]_p \cap (X_2 \triangledown X_3) \neq \emptyset$. Hal ini berarti $[x_1]_p \cap X_1 \neq \emptyset$ atau $[x_1]_p \cap (X_2 \cap X_3) \cup P_{X_2 \cap X_3} \neq \emptyset$.

Kasus 1:

Jika $[x_1]_p \cap X_1 \neq \emptyset$ atau $[x_1]_p \cap (X_2 \cap X_3) \neq \emptyset$, maka $[x_1]_p \cap (X_1 \vartriangle X_2) \neq \emptyset$ atau $[x_1]_p \cap (X_1 \vartriangle X_3) \neq \emptyset$. Oleh karena itu, $[x_1]_p \cap ((X_1 \vartriangle X_2) \triangledown (X_1 \vartriangle X_3) \neq \emptyset$, sehingga $x \in \overline{RS}((X_1 \vartriangle X_2) \triangledown (X_1 \vartriangle X_3))$.

$\therefore \overline{RS}(X_1 \vartriangle (X_2 \triangledown X_3)) \subseteq \overline{RS}((X_1 \vartriangle X_2) \triangledown (X_1 \vartriangle X_3))$.

Kasus 2:

Jika $[x_1]_p \cap X_1 \neq \emptyset$ atau $[x_1]_p \cap P_{X_2 \cap X_3} \neq \emptyset$, maka $[x_1]_p \cap X_1 \neq \emptyset$ atau $[x_1]_p \cap X_2 \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap X_3 \neq \emptyset$. Oleh karena itu, $[x_1]_p \cap ((X_1 \vartriangle X_2) \triangledown (X_1 \vartriangle X_3)) \neq \emptyset$, sehingga $x \in \overline{RS}((X_1 \vartriangle X_2) \triangledown (X_1 \vartriangle X_3))$.

$\therefore \overline{RS}(X_1 \vartriangle (X_2 \triangledown X_3)) \subseteq \overline{RS}((X_1 \vartriangle X_2) \triangledown (X_1 \vartriangle X_3))$.

Demikian sebaliknya, diberikan sebarang $x \in \overline{RS}((X_1 \vartriangle X_2) \triangledown (X_1 \vartriangle X_3))$, sehingga $[x_1]_p \cap ((X_1 \vartriangle X_2) \triangledown (X_1 \vartriangle X_3)) \neq \emptyset$. Akibatnya $[x_1]_p \cap ((X_1 \vartriangle X_2) \cap (X_1 \vartriangle X_2)) \cup P_{(X_1 \vartriangle X_2) \cap (X_1 \vartriangle X_3)} \neq \emptyset$, sehingga $[x_1]_p \cap ((X_1 \vartriangle X_2) \cap (X_1 \vartriangle X_3)) \neq \emptyset$ atau $[x_1]_p \cap P_{(X_1 \vartriangle X_2) \cap (X_1 \vartriangle X_3)} \neq \emptyset$. Hal ini berarti $[x_1]_p \cap (X_1 \vartriangle X_2) \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap (X_1 \vartriangle X_3) \neq \emptyset$ atau $[x_1]_p \cap P_{(X_1 \vartriangle X_2) \cap (X_1 \vartriangle X_3)} \neq \emptyset$.

Kasus 1:

Jika $[x_1]_p \cap (X_1 \vartriangle X_2) \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap (X_1 \vartriangle X_3) \neq \emptyset$, maka $[x_1]_p \cap X_1 \neq \emptyset$ atau $[x_1]_p \cap X_2 \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap X_1 \neq \emptyset$ atau $[x_1]_p \cap X_3 \neq \emptyset$. Oleh karena itu $[x_1]_p \cap X_1 \neq \emptyset$ atau $[x_1]_p \cap X_2 \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap X_3 \neq \emptyset$, sehingga $[x_1]_p \cap (X_1 \vartriangle (X_2 \triangledown X_3)) \neq \emptyset$. Akibatnya $x \in \overline{RS}(X_1 \vartriangle (X_2 \triangledown X_3))$.

$\therefore \overline{RS}((X_1 \vartriangle X_2) \triangledown (X_1 \vartriangle X_3)) \subseteq \overline{RS}(X_1 \vartriangle (X_2 \triangledown X_3))$.

Kasus 2:

Jika $[x_1]_p \cap (X_1 \vartriangle X_2) \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap P_{(X_1 \vartriangle X_2) \cap (X_1 \vartriangle X_3)} \neq \emptyset$, maka $[x_1]_p \cap (X_1 \vartriangle X_2) \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap (X_1 \vartriangle X_3) \neq \emptyset$. Oleh karena itu $[x_1]_p \cap X_1 \neq \emptyset$ atau $[x_1]_p \cap X_2 \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap X_1 \neq \emptyset$ atau $[x_1]_p \cap X_3 \neq \emptyset$, sehingga $[x_1]_p \cap X_1 \neq \emptyset$ atau $[x_1]_p \cap X_2 \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap X_3 \neq \emptyset$. Hal ini berarti $[x_1]_p \cap (X_1 \vartriangle (X_2 \triangledown X_3)) \neq \emptyset$. Akibatnya $x \in \overline{RS}(X_1 \vartriangle (X_2 \triangledown X_3))$.

$\therefore \overline{RS}((X_1 \vartriangle X_2) \triangledown (X_1 \vartriangle X_3)) \subseteq \overline{RS}(X_1 \vartriangle (X_2 \triangledown X_3))$.

Oleh karena itu, $RS(X_1 \vartriangle (X_2 \triangledown X_3)) = RS((X_1 \vartriangle X_2) \triangledown (X_1 \vartriangle X_3))$.

2. Akan ditunjukkan bahwa:

(a) $\underline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \vartriangle X_3)) = \underline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \vartriangle (X_1 \triangledown X_3))$.

Diberikan sebarang $x \in \underline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \vartriangle X_3))$, sehingga $[x_1]_p \subseteq X_1 \triangledown (X_2 \vartriangle X_3)$. Akibatnya $[x_1]_p \subseteq (X_1 \cap (X_2 \vartriangle X_3) \cup P_{X_1 \cap (X_2 \vartriangle X_3)})$, sehingga $[x_1]_p \subseteq X_1 \cap X_2$ atau $[x_1]_p \subseteq X_1 \cap X_3$. Oleh karena itu, $[x_1]_p \subseteq (X_1 \triangledown X_2) \vartriangle (X_1 \triangledown X_3)$, sehingga $x \in \underline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \vartriangle (X_1 \triangledown X_3))$.

$\therefore \underline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \vartriangle X_3)) \subseteq \underline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \vartriangle (X_1 \triangledown X_3))$.

Demikian pula sebaliknya, diberikan sebarang $x \in \underline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \vartriangle (X_1 \triangledown X_3))$, sehingga $[x_1]_p \subseteq ((X_1 \triangledown X_2) \vartriangle (X_1 \triangledown X_3))$. Akibatnya $[x_1]_p \subseteq X_1 \triangledown X_2$ atau $[x_1]_p \subseteq X_1 \triangledown X_3$, sehingga $[x_1]_p \subseteq ((X_1 \cap X_2) \cup P_{X_1 \cap X_2}$ atau $[x_1]_p \subseteq ((X_1 \cap X_3) \cup P_{X_1 \cap X_3})$. Oleh karena itu $[x_1]_p \subseteq (X_1 \cap X_2)$ atau $[x_1]_p \subseteq (X_1 \cap X_3)$, sehingga $[x_1]_p \subseteq X_1$ dan $[x_1]_p \subseteq X_2$ atau $[x_1]_p \subseteq X_3$. Hal ini berarti $[x_1]_p \subseteq (X_1 \triangledown (X_2 \vartriangle X_3))$, sehingga $[x_1]_p \in \underline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \vartriangle X_3))$.

$\therefore \underline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \vartriangle (X_1 \triangledown X_3)) \subseteq \underline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \vartriangle X_3))$.

Oleh karena itu, $\underline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \vartriangle X_3)) = \underline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \vartriangle (X_1 \triangledown X_3))$.

(b) $\overline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \vartriangle X_3)) = \overline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \vartriangle (X_1 \triangledown X_3))$

Diberikan sebarang $x \in \overline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \vartriangle X_3))$, sehingga $[x_1]_p \cap (X_1 \triangledown (X_2$

$\vartriangle X_3)) \neq \emptyset$. Akibatnya $[x_1]_p \cap (X_1 \cap (X_2 \vartriangle X_3) \cup P_{X_1 \cap (X_2 \vartriangle X_3)}) \neq \emptyset$, sehingga $[x_1]_p \cap X_1 \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap X_2 \vartriangle X_3 \neq \emptyset$ atau $[x_1]_p \cap P_{X_1 \cap (X_2 \vartriangle X_3)}) \neq \emptyset$.

Kasus 1:

Jika $[x_1]_p \cap X_1 \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap (X_2 \vartriangle X_3) \neq \emptyset$, maka $[x_1]_p \cap (X_1 \triangledown X_2) \neq \emptyset$ atau $[x_1]_p \cap (X_1 \triangledown X_3) \neq \emptyset$. Oleh karena itu $[x_1]_p \cap (X_1 \triangledown X_2) \vartriangle (X_1 \triangledown X_3) \neq \emptyset$, sehingga $x \in \overline{P}((X_1 \triangledown X_2) \vartriangle (X_1 \triangledown X_3))$.

$\therefore \overline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \vartriangle X_3)) \subseteq \overline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \vartriangle (X_1 \triangledown X_3))$.

Kasus 2:

Jika $[x_1]_p \cap X_1 \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap P_{X_1 \cap (X_2 \vartriangle X_3)} \neq \emptyset$, maka $[x_1]_p \cap X_1 \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap X_2 \vartriangle X_3 \neq \emptyset$. Oleh karena itu $[x_1]_p \cap X_1 \triangledown X_2 \neq \emptyset$ atau $[x_1]_p \cap (X_1 \triangledown X_3) \neq \emptyset$, sehingga $[x_1]_p \cap (X_1) \triangledown X_2) \vartriangle (X_1 \triangledown X_3) \neq \emptyset$. Hal ini berarti $x \in \overline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \vartriangle (X_1 \triangledown X_3))$.

$\therefore \overline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \vartriangle X_3)) \subseteq \overline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \vartriangle (X_1 \triangledown X_3))$.

Demikian pula sebaliknya, diberikan sebarang $x \in \overline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \vartriangle (X_1 \triangledown X_3))$, sehingga $[x_1]_p \cap ((X_1 \triangledown X_2) \vartriangle (X_1 \triangledown X_3)) \neq \emptyset$. Akibatnya $[x_1]_p \cap (X_1 \triangledown X_2) \neq \emptyset$ atau $[x_1]_p \cap (X_1 \triangledown X_3) \neq \emptyset$, sehingga $[x_1]_p \cap (X_1 \cap X_2) \cup P_{X_1 \cap X_2} \neq \emptyset$ atau $[x_1]_p \cap (X_1 \cap X_3) \cup P_{X_1 \cap X_3} \neq \emptyset$.

Kasus 1:

Jika $[x_1]_p \cap (X_1 \cap X_2) \neq \emptyset$ atau $[x_1]_p \cap (X_1 \cap X_3) \neq \emptyset$, maka $[x_1]_p \cap X_1 \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap X_2 \neq \emptyset$ atau $[x_1]_p \cap X_1 \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap X_3 \neq \emptyset$. Oleh karena itu $[x_1]_p \cap (X_1 \triangledown (X_2 \vartriangle X_3)) \neq \emptyset$, sehingga $x \in \overline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \vartriangle X_3))$.

$\therefore \overline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \vartriangle (X_1 \triangledown X_3)) \subseteq \overline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \vartriangle X_3))$.

Kasus 2:

Jika $[x_1]_p \cap P_{X_1 \cap X_2} \neq \emptyset$ atau $[x_1]_p \cap P_{X_1 \cap X_3} \neq \emptyset$, maka $[x_1]_p \cap X_1 \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap X_2 \neq \emptyset$ atau $[x_1]_p \cap X_1 \neq \emptyset$ dan $[x_1]_p \cap X_3 \neq \emptyset$. Oleh karena itu $[x_1]_p \cap (X_1 \triangledown (X_2 \vartriangle X_3)) \neq \emptyset$, sehingga $x \in \overline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \vartriangle X_3))$.
$\therefore \overline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \vartriangle (X_1 \triangledown X_3)) \subseteq \overline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \vartriangle X_3))$.
Oleh karena itu, $\overline{RS}(X_1 \triangledown (X_2 \vartriangle X_3)) = \overline{RS}((X_1 \triangledown X_2) \vartriangle (X_1 \triangledown X_3))$.

Berdasarkan hal itu, diperoleh $RS(X_1 \triangledown (X_2 \vartriangle X_3)) = RS((X_1 \triangledown X_2) \vartriangle (X_1 \triangledown X_3))$.

Jadi $(T, \vartriangle, \triangledown)$ merupakan semiring pada himpunan *rough*. ■

Pada bagian ini diberikan lemma mengenai order dari semiring *rough*.

Lemma 2.4.17 Misalkan X adalah himpunan kelas ekuivalensi dan $P_x$merupakan himpunan perwakilan kelas ekuivalensi yang kardinalitasnya lebih besar dari 1 dan misalkan $|X| = n$ dan $|P_x| = m$ dengan $1 \leq m \leq n$, sehingga order dari semiring *rough* adalah $2^{n-m}3^m$ (Manimaran dkk., 2017).

Bukti.

$$\begin{aligned}
|T| &= \binom{m}{0}2^n + \binom{m}{1}(2^n - 2^{n-1}) + \binom{m}{2}(2^n - (2^2 - 1)2^{n-2}) + \dots \\
&+ \binom{m}{m}(2^n - (2^m - 1)2^{n-m}) + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\{2^n - (2^{k-1} - 1)2^{n-k}\} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 2^{n-k} \\
&= 2^n \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 2^{-k} \\
&= 2^{n-m}3^m
\end{aligned}$$

(Manimaran dkk., 2017).

Selanjutnya akan dijelaskan tentang ideal pada semiring pada koleksi himpunan *rough* (T,$\vartriangle, \triangledown$).

Definisi 2.4.18 Diberikan semiring pada koleksi himpunan *rough* $(T, \triangle, \triangledown)$. maka elemen identitas adalah elemen yang tidak mengubah hasil operasi ketika dikombinasikan dengan elemen lain dalam semiring. Untuk operasi $\triangle$, terdapat elemen identitas $e_\triangle$ yang memenuhi $X \triangle e_\triangle = e_\triangle \triangle X = X$ untuk setiap $X \in T$ dimana elemen identitasnya adalah himpunan *rough* $RS(\emptyset)$. Sedangkan untuk operasi $\triangledown$, terdapat elemen identitas $e_\triangledown$ yang memenuhi $X \triangledown e_\triangledown = e_\triangledown \triangledown X = X$ untuk setiap $X \in T$ dimana elemen identitasnya adalah himpunan universal $RS(U)$ (Lin, dkk., 2002).

Definisi 2.4.19 Diberikan semiring pada koleksi himpunan *rough* $(T, \triangle, \triangledown)$. Ideal kiri atau ideal kanan dari semiring pada koleksi himpunan *rough* adalah himpunan bagian J yang tak kosong dari T sedemikian sehingga

1. $RS(X_1)\Delta RS(X_2) \in J$ untuk setiap $RS(X_1), RS(X_2) \in J$ dan
2. $RS(X_1)\triangledown RS(X_2) \in J$ dan $RS(X_2)\nabla RS(X_1) \in J$, untuk setiap $RS(X_2) \in J$ dan $RS(X_1) \in T$ (Praba dkk., 2015).

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun 2023/2024, bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Tahapan Penelitian

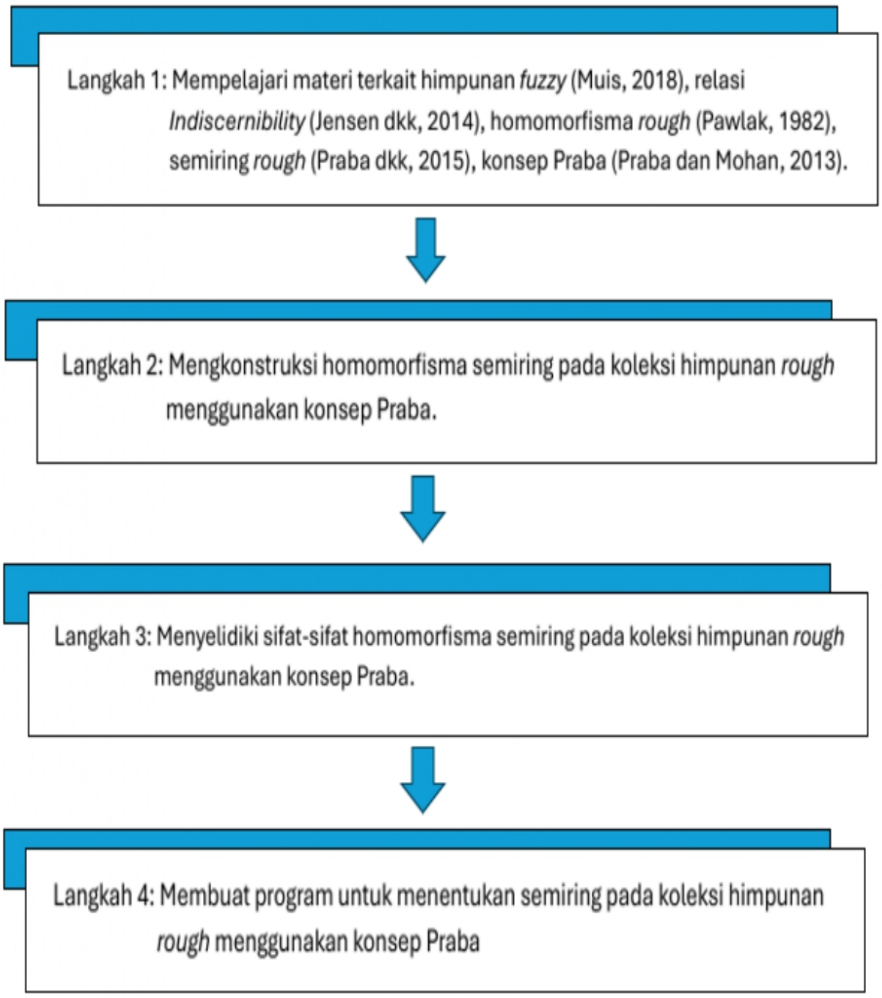
Penelitian ini menggunakan pendekatan studi literatur sebagai berikut:

1. Studi literatur dari jurnal, buku dan artikel ilmiah yang berhubungan dengan penelitian ini.
2. Mempelajari definisi dan teorema yang berkaitan dengan permasalahan yang berhubungan dengan penelitian.

Langkah-langkah dalam mencapai tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. mengkonstruksi homomorfisma semiring pada koleksi himpunan *rough* menggunakan konsep Praba;
2. menyelidiki sifat-sifat homomorfisma semiring pada koleksi himpunan *rough* menggunakan konsep Praba;
3. membuat program untuk menentukan semiring pada koleksi himpunan *rough* menggunakan konsep Praba.

Langkah-langkah penelitian diberikan pada Gambar 3.1.


Langkah 1: Mempelajari materi terkait himpunan *fuzzy* (Muis, 2018), relasi *Indiscernibility* (Jensen dkk, 2014), homomorfisma *rough* (Pawlak, 1982), semiring *rough* (Praba dkk, 2015), konsep Praba (Praba dan Mohan, 2013).
Langkah 2: Mengkonstruksi homomorfisma semiring pada koleksi himpunan *rough* menggunakan konsep Praba.
Langkah 3: Menyelidiki sifat-sifat homomorfisma semiring pada koleksi himpunan *rough* menggunakan konsep Praba.
Langkah 4: Membuat program untuk menentukan semiring pada koleksi himpunan *rough* menggunakan konsep Praba

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang telah dibahas sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa suatu sistem informasi (U, A) dengan nilai derajat keanggotaan himpunan *fuzzy* dan himpunan T merupakan himpunan semua koleksi himpunan *rough*, himpunan T dengan operasi $\vartriangle$ dan $\triangledown$ akan membentuk semiring yang memenuhi aksioma yaitu untuk setiap $X, Y \subseteq U$ dan $RS(X), RS(Y) \in T$ berlaku $RS(X \vartriangle (Y \triangledown Z)) = RS((X \vartriangle Y) \triangledown (X \vartriangle Z))$ dan $RS(X \triangledown (Y \vartriangle Z)) = RS((X \triangledown Y) \vartriangle (X \triangledown Z))$.

Selanjutnya, diberikan ring R dan suatu sistem informasi, $I = (U, A)$ dengan U merupakan himpunan semesta, A atribut dari himpunan *fuzzy* serta T_1, T_2 adalah koleksi himpunan *rough* di I dengan operasi $\vartriangle$ dan $\triangledown$. Homomorfisma semiring pada koleksi himpunan *rough* adalah pemetaan $\alpha : (T_1, \vartriangle, \triangledown) \to (T_2, \vartriangle, \triangledown)$. dengan T_1 dan T_2 adalah semiring yang didefinisikan pada koleksi himpunan *rough* yang memenuhi aksioma $\alpha(RS(X) \vartriangle RS(Y)) = \alpha(RS(X)) \vartriangle \alpha(RS(Y))$, untuk setiap $RS(X)$ dan $RS(Y) \in T_1$, $\alpha(RS(X) \triangledown RS(Y)) = \alpha(RS(X)) \triangledown \alpha(RS(Y))$, untuk setiap $RS(X)$ dan $RS(Y) \in T_1$. Homomorfisma itu mengawetkan operasi dari *meet* $(\vartriangle)$ dan *join* $(\triangledown)$.

Dari penelitian ini, diperoleh bayangan dari α yaitu $Im(\alpha) = \{\alpha(RS(X)) | RS(X) \in T_1\}$, sedangkan kernel dari α yaitu $\ker(\alpha) = \{RS(X) \in T_1 | \alpha RS(X) = RS(\emptyset)\}$. Sifat-sifat *image* dan *kernel* homomorfisma semiring pada koleksi himpunan *rough* yaitu jika $\ker(\alpha) = RS(\emptyset)$ maka α adalah fungsi injektif (satu-satu). Jika $Im(\alpha) = T_2$ maka α adalah surjektif (onto) dan jika $\ker(\alpha) = RS(\emptyset)$ dan $Im(\alpha) = T_2$ maka α adalah isomorfik.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil dan penelitian, dalam mengkonstruksikan semiring dan homomorfisma semiring menggunakan konsep Praba masih sedikit ditemukan sifat-sifatnya, tidak menutup kemungkinan masih terdapat sifat-sifat lain dari semiring yang dapat diterapkan menggunakan konsep Praba. Selain itu, dalam mengkonstruksi homomorfisma semiring pada koleksi himpunan *rough* menggunakan konsep Praba dapat dilakukan jika T_1 dan T_2 berbeda dan *meet* $(\triangle)$ dan *join*$(\triangledown)$ yang berbeda juga ke dalam contoh-contoh dapat menggunakan himpunan universal dan atribut lain selain yang terdapat pada penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Adkins, W. A. dan Weintraub, S. H. 1992. *Algebra "An Approach via Module Theory"*, Springer-Verlag, New York, Inc., USA.

Ayres, F., dan Jaisingh, L., 2004, *Theory and Problems of Abstract Algebra (2nd ed.)*. McGraw-Hill Publishing Company.

Bagirmaz, N., dan Ozcan, A. F. 2015. Rough semigroups on approximation spaces.*International Journal of Algebra*, 9(7), 339–350.

Cain, A. J. 2014. *Nine Chapters on the art of semigroups*. AJC Porto dan Lisbon.

Clifford, A. H. 1954. *Bands of Semigroups*. Proceedings of the American Mathematical Society, 5(3), 499.

Dummit D.S. dan Foote R.M. 1991. Abstrak Algebra. New York: Prentice-Hall Internasional.

Dwiyanti, G. A., Fitriani, F., Faisol, A. (2023). the Implementation of a Rough Set of Projective Module. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan*, 17(2), 0735–0744.

Fitriani, F., dan Faisol, A. 2022. *Grup:* Matematika. Yogyakarta.

Hafifullah, D., Fitriani, F., & Faisol, A. (2022). the Properties of Rough V-Coexact Sequence in Rough Group. *Barekeng: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 16(3), pp. 1069–1078.

Jensen, R., Tuson, A., dan Shen, Q. 2014. Finding rough and fuzzy-rough set reducts with SAT. *Information Sciences, 255*, 100–120.

Jesmalar, L. 2017. Homomorphism and Isomorphism of Rough Group. *International Journal of Advance Research, Ideas and Innovations in Technology*, 3(3), 1382–1387.

Kumar, M., dan Yadav, N. 2015. Fuzzy Rough Sets and Its Application in Data Mining Field. *Advances in Computer Science and Information Technology*, 2(3), 237–240.

T.Y. Lin, Y. Yao, and L. Zadeh (Eds.). 2002. Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining, and Granular Computing, Springer.

Malik, D.S., Mordeson, J.N., dan Sen, M.K. 2007. *Introduction to Abstract Algebra. USA: Scientific Word.*.

Manimaran, A., Praba, B., dan Chandrasekaran, V. M. 2014. Regular rough $\triangledown$ monoid of idempotents. *International Journal of Applied Engineering Research (IJAER)*, 9(16),3469–3479.

Manimaran, A., Praba, B., dan Chandrasekaran, V. M. 2017. Characterization of rough semiring. *Afrika Matematika*, 28(5–6), 945–956.

Miao, D., Han, S., Li, D., dan Sun, L. 2005. Rough Group , Rough Subgroup.*Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, 1, 104–105.

Muis, S. 2018. *Teori Fuzzy: Konsep dan Aplikasi*. Teknosain.

Munir, R. (2012). *Matematika Diskrit*(5th ed.). Bandung: Informatika.

Nugraha, A. A., Fitriani, F., Ansori, M., dan Faisol, A. 2022. Implementation of Rough Set on A Group Structure. *Jurnal Matematika MANTIK*, 8(1), 45–52.

Pawlak, Z. 1982. Rough sets. *International Journal of Computer dan Information Sciences*, 11(5), 341–356.

Pinontoan, B., dan Titaley, J. 2019. *Matematika Diskrit I*. Patra Media Grafindo.

Praba, B., Chandrasekaran, V. M., dan Manimaran, A. 2013. A commutative regular monoid on rough sets. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 31, 307–318.

Praba, B., Chandrasekaran, V. M., dan Manimaran, A. 2015. Semiring on roughsets. *Indian Journal of Science and Technology*, 8(3), 280–286.

Praba, B., Manimaran, A., dan Chandrasekaran, V. M.2016. Total graph and complemented graph of a rough semiring. *Gazi University Journal of Science*, 29(2), 459–466.

Praba, B., Mohan, R., dan In, C. 2013. Rough Lattice. *International Journal of Fuzzy Mathematics and Systems*, 3(2), 135–151.

Praba, B., Manimaran, A., Chandrasekaran, V. M. (2017). Characterization of Rough Semiring. *Afrika Matematika*, 28(1), 33-47.

Setiawan, A. 2011. Aljabar Abstrak (Teori Grup dan Teori Ring). In Salatiga: Universitas Kristen Satya Wacana.

Sinha, A. K., dan Prakash, A. 2015. Rough Projective Module.*Advances in Applied Science and Environmental Engineering - ASEE 2014*, 35–38.

Usman, M. 2022. *Pengantar Topologi*. AURA.

Wang, Q., dan Zhan, J. 2016. Rough semigroups and rough fuzzy semigroups based on fuzzy ideals. *Open Mathematics*, 14(1), 1114–1121.

Wibisono, S. 2008. *Matematika Diskrit Edisi* 2 (2nd ed.). Graha Ilmu.

Yanti, G. A. D., Fitriani, F., dan Faisol, A. 2023. the Implementation of a Rough Set of Projective Module.*BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan*, 17(2), 0735–0744.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338-353.