DERIVASI-(α, β) LIE PADA SUATU ALJABAR LIE

Skripsi

oleh

NAFDHATULIL SHOLEHA
NPM. 2117031070

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

ABSTRACT

(α, β)-LIE DERIVATION ON A LIE ALGEBRA

by

Nafdhatulil Sholeha

Lie derivation is a concept applied to a Lie algebra, with particular emphasis on the (α, β)-derivation as a generalization involving two ring endomorphisms. The aim of this research is to define (α, β)-Lie derivation and examine its relationship with Lie derivations. In addition, examples and properties of (α, β)-Lie derivations are presented. The results of this research are expected to enhance the understanding of Lie algebra. Furthermore, this study makes a significant contribution to the theory of Lie algebra by exploring the potential relationship between (α, β)-Lie derivations and inner derivations, as well as their applications to the structure of ideals in Lie algebras.

Keywords: Lie algebra, endomorphism, derivation, inner derivation, Lie derivation, (α, β)-Lie derivation.

ABSTRAK

DERIVASI-(α, β) LIE PADA SUATU ALJABAR LIE

oleh

Nafdhatulil Sholeha

Derivasi Lie adalah konsep yang diterapkan pada suatu aljabar Lie, dengan penekanan khusus pada derivasi-(α, β) sebagai generalisasi yang melibatkan dua endomorfisma ring. Tujuan penelitian ini adalah untuk mendefinisikan derivasi-(α, β) Lie serta mengkaji hubungannya dengan derivasi Lie. Selain itu, diberikan contoh dan sifat-sifat derivasi-(α, β) Lie. Hasil penelitian ini diharapkan dapat meningkatkan pemahaman mengenai aljabar Lie. Selain itu, penelitian ini memberikan kontribusi signifikan terhadap teori aljabar Lie dengan mengeksplorasi hubungan potensial antara derivasi-(α, β) Lie dan derivasi *inner*, serta aplikasinya pada struktur ideal pada aljabar Lie.

Kata-kata kunci: aljabar Lie, endomorfisma, derivasi, derivasi *inner*, derivasi Lie, derivasi (α, β) Lie.

DERIVASI-(α, β) LIE PADA SUATU ALJABAR LIE

NAFDHATULIL SHOLEHA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

Judul Skripsi	:	**DERIVASI-(α, β) LIE PADA SUATU ALJABAR LIE**
Nama Mahasiswa	:	*Nafdhatulil Sholeha*
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2117031070**
Program Studi	:	**Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**
NIP 198406272006042001	NIP 198002062003121003

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr.Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim penguji

Ketua	:	**Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**	…………………
Sekretaris	:	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**	…………………
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.**	…………………

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **15 Januari 2025**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Nafdhatulil Sholeha**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2117031070**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Derivasi-(α, β) Lie pada Suatu Aljabar Lie**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung,

Penulis,

METERAI TEMPEL

Nafdhatulil Sholeha

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Nafdhatulil Sholeha, lahir di Lubuk Linggau pada tanggal 8 Mei 2003. Penulis merupakan anak pertama dari dua bersaudara, putri dari pasangan Untung Santoso dan Endra Winarti. Penulis memiliki seorang adik perempuan bernama Salsabila Handayani. Penulis tinggal di Megang Sakti 1, Kecamatan Megang Sakti, Kabupaten Musi Rawas, Provinsi Sumatera Selatan. Penulis memiliki hobi pada sastra, seperti membaca dan menulis. Penulis memulai tulisan pertamanya pada cerita pendek saat penulis masih di bangku pendidikan menengah. Penulis dapat dihubungi melalui nomor telepon 0822-2841-4990 atau melalui laman emailnya nafdhamgs@gmail.com.

Riwayat pendidikan penulis dimulai di SDN 4 Megang Sakti, Kabupaten Musi Rawas. Setelah menyelesaikan pendidikan dasar, penulis melanjutkan ke SMPN Megang Sakti, Kabupaten Musi Rawas. Penulis menyelesaikan pendidikan menengah atas di SMA Ar-Risalah Pesantren Modern Ar-Risalah, Kota Lubuk Linggau.

KATA INSPIRASI

”Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan”
- QS. Al-Insyirah Ayat 5-6

”It’s not always easy, but that’s life. Be strong because there are better days ahead”
- Mark Lee

”Jangan takut gagal, takutlah untuk tidak mencoba. Sekalipun kamu tidak percaya diri, kamu tetap orang yang berharga”
- Lee Haechan

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap Alhamdulillah dan syukur kepada Allah SWT atas nikmat serta hidayah-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan Bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Ayah dan Ibuku Tercinta

Terimakasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini. Terimakasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta
Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Derivasi-(α, β) Lie pada Suatu Aljabar Lie" dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Diri saya sendiri, Nafdhatulil Sholeha, yang telah bertahan, berjuang, dan tidak menyerah menghadapi setiap tantangan. Saya bangga atas setiap langkah kecil yang membawa perubahan besar. Semoga terus menjadi pribadi yang lebih baik setiap harinya.

2. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing I yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

3. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Penguji sekaligus Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.

5. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Sc. selaku dosen pembimbing akademik.

6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Orang tua beserta keluarga saya yang telah memberi dukungan tanpa henti dalam bentuk doa, semangat, dan materi kepada penulis.
8. Teman-teman terdekat saya sejak tahun pertama kuliah, yang telah menemani dan memberi dukungan selama perkuliahan sampai pada pembuatan skripsi ini selesai.
9. Teman-teman seperbimbingan yang sudah membersamai saya dalam setiap bimbingan dan saling membantu ketika dalam kesulitan.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung,

Nafdhatulil Sholeha

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Derivasi merupakan konsep yang pertama kali diterapkan dalam kalkulus untuk menggambarkan laju perubahan suatu fungsi. Konsep ini pertama kali diperkenalkan oleh Newton pada tahun 1687 dan Leibniz pada tahun 1684 yang merintis dasar analisis matematis modern. Dalam konsep kalkulus, derivasi berfungsi untuk menentukan kemiringan garis singgung pada suatu kurva. Derivasi juga memiliki aplikasi luas dalam berbagai bidang seperti fisika, ekonomi, dan teknik. Dalam bidang fisika, derivasi digunakan untuk menggambarkan percepatan, kecepatan, dan perubahan energi, sehingga memungkinkan para ilmuwan untuk memahami fenomena alam secara lebih mendalam (Stewart, 2015).

Seiring berjalannya waktu, derivasi berkembang ke dalam aljabar abstrak, khususnya dalam struktur aljabar seperti ring. Derivasi pada konteks ini adalah suatu fungsi yang menjaga struktur dari ring dengan memenuhi sifat-sifat tertentu yang menyerupai aturan turunan dalam kalkulus. Menurut Ashraf dkk., d disebut derivasi pada ring R jika untuk setiap $a, b \in R$, d memenuhi aturan Leibniz yaitu, $d(ab) = d(a)b + ad(b)$ (Ashraf dkk., 2006). Selain itu, konsep derivasi juga dikembangkan ke dalam bentuk yang lebih umum seperti derivasi-(α, β). Derivasi-(α, β) adalah generalisasi dari derivasi yang melibatkan dua endomorfisma α dan β dari ring R.

Derivasi juga berkembang pada struktur aljabar yang lain seperti aljabar Lie. Aljabar Lie adalah struktur aljabar yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan operasi perkalian yang disebut dengan *bracket* Lie, yang bersifat bilinear, antikomutatif, dan memenuhi identitas Jacobi. Derivasi merupakan salah satu aspek penting pada aljabar Lie.

Banyak penelitian yang telah dilakukan untuk mengkaji lebih dalam mengenai derivasi pada struktur aljabar. Martindale, mengkaji derivasi Lie pada ring primitif yang bertujuan untuk menyelidiki sifat-sifat khusus dari derivasi Lie, khususnya dalam konteks ring nonkomutatif yang memiliki struktur lebih kompleks (Martindale, 1964). Selanjutnya Guven, mengkaji derivasi dalam ring prima, khususnya pada (σ, τ)-derivasi, yang mempertimbangkan dua endomorfisma dan menambah pemahaman tentang variasi derivasi dalam konteks ring prima (Guven, 2008). Selanjutnya, Wang meneliti derivasi Lie dan derivasi Jordan pada aljabar segitiga memberi- kan wawasan baru mengenai perilaku derivasi dalam aljabar dengan struktur yang lebih rumit (Wang, 2019).

Selanjutnya, Atteya (2020) mengkaji hubungan antara komutativitas dan derivasi pada ring semiprima, memberikan wawasan baru tentang kondisi komutatif pada struktur semiprima. Kemudian, Wani (2021) melakukan penelitian mengenai (φ, Ψ)-derivasi pada ring semiprima dan aljabar Banach yang menghubungkan hasil-hasil antara ring semiprima dan struktur analitik aljabar Banach. Selain itu, Khan dkk. (2022) membahas teorema Herstein untuk ideal prima dalam ring dengan involusi yang melibatkan sepasang derivasi, memperluas aplikasi teorema klasik dalam aljabar. Adapun penelitian terbaru oleh Thomas dkk. (2024) yang membahas sifat dan aplikasi derivasi pada berbagai jenis ring, seperti ring faktor dan ring hasil kali Cartesian, dengan menghubungkan konsep tersebut dengan diferensiasi dalam kalkulus.

Salah satu jenis derivasi yang menjadi fokus utama dalam penelitian ini adalah derivasi Lie. Derivasi Lie adalah jenis derivasi yang memenuhi aturan Leibniz, yaitu sifat khusus yang berkaitan dengan komutator dari dua derivasi. Menurut Humphreys (1972), d disebut sebagai derivasi Lie jika untuk setiap x dan $y \in \mathfrak{g}$, untuk suatu aljabar Lie $\mathfrak{g}$, berlaku $d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)]$, dengan $[x, y]$ merupakan *bracket* Lie.

Hingga saat ini, kajian mengenai hubungan antara derivasi Lie dan derivasi-(α, β) Lie masih belum banyak dieksplorasi oleh para peneliti. Oleh karena itu, dalam penelitian ini akan dilakukan kajian mengenai sifat-sifat dari derivasi-(α, β) Lie dalam suatu aljabar Lie. Selain itu, penelitian ini juga akan menyajikan contoh-contoh derivasi-(α, β) Lie pada suatu aljabar Lie.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini sebagai berikut:

1) mendefinisikan derivasi-(α, β) Lie pada suatu aljabar Lie,
2) menyelidiki kaitan derivasi-(α, β) Lie dan derivasi Lie,
3) mengkontruksi contoh-contoh derivasi-(α, β) Lie,
4) menyelidiki sifat-sifat derivasi-(α, β) Lie.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini sebagai berikut:

1) menambah pengetahuan serta memperdalam pengetahuan mengenai aljabar Lie dan derivasi Lie,
2) mengembangkan penerapan derivasi-(α, β) Lie dengan menyelidiki sifat-sifat aljabar Lie dan hubungan antara derivasi-(α, β) dengan derivasi Lie,
3) menjadi referensi bagi penelitian lanjutan dibidang aljabar dan teori aljabar Lie.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diuraikan konsep yang akan menjadi landasan teori dalam penelitian ini. Konsep-konsep tersebut akan membentuk kerangka berpikir yang menjelaskan definisi serta contoh-contohnya.

2.1 Grup

Grup merupakan himpunan yang dilengkapi dengan operasi biner. Sebelum membahas tentang grup akan diberikan definisi tentang operasi biner yang digunakan dalam pembentukan struktur grup.

Definisi 2.1.1 Diberikan himpunan tak kosong S. Operasi biner $*$ pada himpunan S adalah fungsi dari $S \times S$ ke S.

$$* : S \times S \longrightarrow S$$

$$(a, b) \mapsto a * b \in S,$$

untuk setiap $(a, b) \in S \times S$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Contoh 2.1.2 Operasi penjumlahan biasa pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ merupakan operasi biner.

Setelah membahas tentang operasi biner, selanjutnya diberikan definisi grup.

Definisi 2.1.3 Grup $\langle G, * \rangle$ adalah himpunan tak kosong G dengan operasi biner $*$ yang memenuhi:

(i) operasi biner * bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$, berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$,

(ii) terdapat elemen identitas $e \in G$, sehingga untuk setiap $a \in G$, berlaku $e * a = a * e = a$,

(iii) untuk setiap $a \in G$, terdapat $a^{-1} \in G$, sehingga berlaku $a * a^{-1} = a^{-1} * a = 0$

(Fitriani dan Faisol, 2022).

Definisi 2.1.4 Grup G dikatakan grup komutatif (grup Abel) jika operasi biner * bersifat komutatif, yaitu $a * b = b * a$, untuk setiap $a, b \in G$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Berikut ini akan diberikan contoh mengenai grup.

Contoh 2.1.5 Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup.

(i) Akan ditunjukkan + bersifat tertutup di $\mathbb{Z}$. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, berlaku $a + b \in \mathbb{Z}$.

(ii) Akan ditunjukkan + bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$. Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$, berlaku $a + (b + c) = (a + b) + c$.

(iii) Terdapat elemen identitas yaitu $0 \in \mathbb{Z}$, sehingga untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, berlaku $a + 0 = a$.

(iv) Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, terdapat inversnya yaitu $-a$, sehingga $a + (-a) = 0$

(v) Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, berlaku $a + b = b + a \in \mathbb{Z}$.

Jadi $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ adalah grup komutatif.

Selanjutnya akan diberikan definisi dan contoh mengenai homomorfisma dan endomorfisma grup.

Definisi 2.1.6 Suatu pemetaan $f : G \to G'$ dari $\langle G, * \rangle$ ke $\langle G', * \rangle$ dinamakan homomorfisma grup jika berlaku

$$f(a * b) = f(a) * f(b),$$

untuk setiap $a, b \in G$ (Wiyono dan Siswanto, 2023).

Berikut ini diberikan contoh homomorfisma grup.

Contoh 2.1.7 Diberikan grup $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$. Untuk setiap $x, y \in G$, didefinisikan pemetaan $\sigma : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $\sigma(a) = 6a$. Akan ditunjukkan σ merupakan homomorfisma.

Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$.

$$\sigma(a + b) = 6(a + b) = 6a + 6b = \sigma(a) + \sigma(b).$$

Jadi, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ diperoleh $\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b)$. Oleh karena itu, σ merupakan homomorfisma dari $\mathbb{Z}$ ke dirinya sendiri.

Berikut akan diberikan definisi endomorfisma grup.

Definisi 2.1.8 Diberikan grup G. Pemetaan $\phi : G \to G$ yang memenuhi:

$$\phi(a * b) = \phi(a) * \phi(b)$$

untuk setiap $a, b \in G$ disebut endomorfisma (Citra dan Suryoto, 2011).

Berikut ini diberikan contoh endomorfisma grup.

Contoh 2.1.9 Diberikan grup $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ grup. Didefinisikan $\sigma : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yaitu $\sigma(x) = 2x$, untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan bahwa σ adalah endomorfisma grup. Diberikan sebarang $x, y \in \mathbb{Z}$. Berlaku:

$$\sigma(x + y) = 2(x + y) = 2x + 2y = \sigma(x) + \sigma(y).$$

Jadi, σ merupakan endomorfisma grup.

Selanjutnya diberikan definisi automorfisma grup.

Definisi 2.1.10 Diberikan grup $\langle G, * \rangle$. Pemetaan $\theta : G \to G$ disebut automorfisma grup dari G ke dirinya sendiri jika θ adalah homomorfisma yang bijektif (Surodjo dan Susanti, 2024).

Berikut ini akan diberikan contoh automorfisma grup.

Contoh 2.1.11 Diketahui grup $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$. Didefinisikan pemetaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ x &\mapsto \alpha(x) = 12x, \end{aligned}$$

untuk setiap $x \in \mathbb{Q}$.
Akan ditunjukkan bahwa α merupakan suatu pemetaan. Diberikan $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ dengan kondisi $x_1 = x_2$. Berlaku:

$$\begin{aligned} \alpha(x_1) &= 12x_1 \\ &= 12x_2 \\ &= \alpha(x_2). \end{aligned}$$

Jadi, α adalah pemetaan.

Akan ditunjukkan bahwa α homomorfisma grup. Diberikan sebarang $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$. Berlaku:

$$\begin{aligned} \alpha(x_1 + x_2) &= 12(x_1 + x_2) \\ &= 12x_1 + 12x_2 \\ &= \alpha(x_1) + \alpha(x_2). \end{aligned}$$

Jadi, α adalah homomorfisma grup.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa α homomorfisma injektif. Diberikan sebarang $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ dengan kondisi $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$. Berlaku:

$$\begin{aligned} \alpha(x_1) &= \alpha(x_2) \\ 12x_1 &= 12x_2 \end{aligned}$$

diperoleh $x_1 = x_2$. Jadi α merupakan homomorfisma injektif.

Selanjutnya, akan ditunjukkan α merupakan homomorfisma surjektif. Diberikan sebarang $w \in \mathbb{Q}$. Terdapat $x = \frac{1}{12}w \in \mathbb{Q}$, sehingga berlaku:

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= 12x \\ &= 12\Big(\frac{1}{12}w\Big) \\ &= w. \end{aligned}$$

Jadi, α merupakan homomorfisma surjektif.
Karena α adalah homomorfisma injektif dan surjetif, diperoleh α merupakan homomorfisma bijektif. Jadi, α adalah automorfisma grup.

2.2 Ring

Ring merupakan salah satu konsep dasar yang digunakan dalam berbagai cabang matematika, termasuk teori bilangan, aljabar abstrak, dan geometri. Ring juga memainkan peran penting dalam teori representasi dan analisis struktur modul, serta digunakan dalam mempelajari ruang vektor dan aljabar linear.

Sebelumnya akan diberikan terlebih dahulu definisi ring.

Definisi 2.2.1 Diberikan himpunan tak kosong R. Didefinisikan dua operasi biner + dan $\cdot$, yang disebut operasi penjumlahan dan perkalian. $\langle R, +, \cdot \rangle$ disebut ring jika memenuhi:

(i) $\langle R, + \rangle$ merupakan grup komutatif;

(ii) operasi perkalian di R bersifat asosiatif, yaitu:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

untuk setiap $a, b, c \in R$;

(iii) operasi penjumlahan dan perkalian di R bersifat:

(a) distributif kiri:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

untuk setiap $a, b, c \in R$,

(b) distributif kanan:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

untuk setiap $a, b, c \in R$,

(Wahyuni dkk., 2021).

Berikut ini diberikan contoh ring.

Contoh 2.2.2 Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

(i) Akan ditunjukkan $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup komutatif sebagai berikut:

a. untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, berlaku $a + b \in \mathbb{Z}$;

b. untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$, berlaku $a + (b + c) = (a + b) + c$;

c. terdapat elemen identitas $0 \in \mathbb{Z}$, sehingga untuk setiap $a \in \mathbb{Z}, a + 0 = a$;

d. untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, inversnya yaitu $-a$, sehingga $a + (-a) = 0$;

e. untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, berlaku $a + b = b + a$;

(ii) untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$, berlaku $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

(iii) a. untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$, berlaku $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;

b. untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$, berlaku $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Jadi, $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

Selanjutnya diberikan definisi lapangan (*field*).

Definisi 2.2.3 Diberikan himpunan tak kosong F yang dilengkapi dengan dua operasi biner, yaitu penjumlahan dan perkalian. $\langle F, +, \cdot \rangle$ disebut lapangan jika memenuhi aksioma berikut:

(i) $\langle F, + \rangle$ merupakan grup komutatif,

(ii) terhadap operasi perkalian berlaku:

(a) untuk setiap $a, b \in F$, berlaku $a \cdot b \in F$;

(b) untuk setiap $a, b, c \in F$, berlaku $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \in F$;

(c) terdapat elemen identitas $1 \in F$, untuk setiap $a \in F$, berlaku $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$;

(d) untuk setiap $a \in F$, terdapat $a^{-1} \in F$, berlaku $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$,

(iii) operasi penjumlahan dan perkalian di F berlaku hukum distributif, yaitu:

(a) untuk setiap $a, b, c \in F$ berlaku $a(b + c) = ab + ac$;

(b) untuk setiap $a, b, c \in F$ berlaku $(a + b)c = ac + bc$,

(Andari, 2017).

Berikut ini diberikan contoh lapangan.

Contoh 2.2.4 Diberikan himpunan $\mathbb{R}$ dan dua operasi biner yaitu penjumlahan dan perkalian bilangan. Akan ditunjukkan $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ adalah lapangan.

(i) $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ merupakan grup komutatif;

(ii) (a) untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$, berlaku $a \cdot b \in \mathbb{R}$;

(b) untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}$ berlaku $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \in \mathbb{R}$;

(c) untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ berlaku $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;

(d) untuk setiap $a \in \mathbb{R}$, terdapat invers perkalian $a^{-1} \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $a \cdot a^{-1} = 1$;

(iii) (a) untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}$ berlaku $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$;

(b) untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}$ berlaku $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.

Jadi, $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ merupakan lapangan.

Selanjutnya diberikan definisi homomorfisma pada ring.

Definisi 2.2.5 Diberikan ring $\langle R_1, +_1, \cdot_1 \rangle$ dan $\langle R_2, +_2, \cdot_2 \rangle$ dengan pemetaan $f : R_1 \to R_2$. Pemetaan f disebut homomorfisma ring apabila memenuhi:

(i) $f(x +_1 y) = f(x) +_2 f(y)$,

(ii) $f(x \cdot_1 y) = f(x) \cdot_2 f(y)$,

untuk setiap $x, y \in R$ (Wahyuni dkk., 2021).

Berikut ini diberikan contoh mengenai homomorfisma ring.

Contoh 2.2.6 Diberikan ring $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ dan $\langle \mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6 \rangle$. Didefinisikan pemetaan $\mu : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_6$, yaitu $\mu(n) = \bar{n}$, untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$. Karena untuk setiap $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ berlaku:

(i) $\mu(n_1 + n_2) = \mu(n_1) +_6 \mu(n_2)$,

(ii) $\mu(n_1 \cdot n_2) = \mu(n_1) \cdot_6 \mu(n_2)$,

μ merupakan homomorfisma ring (Wahyuni dkk., 2021).

Selanjutnya, diberikan definisi endomorfisma pada ring.

Definisi 2.2.7 Homomorfisma dari ring ke dirinya sendiri, yaitu pemetaan $f : R \to R$ disebut endomorfisma ring (Wahyuni dkk., 2021).

Berikut ini akan diberikan contoh endomorfisma ring.

Contoh 2.2.8 Diberikan ring $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ dengan pemetaan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(n) = n$. Diberikan sebarang $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, berlaku:

(i) $f(n_1 + n_2) = (n_1 + n_2) = n_1 + n_2 = f(n_1) + f(n_2)$,

(ii) $f(n_1 \cdot n_2) = (n_1 \cdot n_2) = n_1 \cdot n_2 = f(n_1) \cdot f(n_2)$.

Jadi, f merupakan endomorfisma pada ring.

2.3 Ruang Vektor

Pada bagian ini akan dibahas mengenai ruang vektor dan transformasi linear serta jenis-jenis dari tranformasi linear. Berikut ini akan diberikan definisi ruang vektor.

Definisi 2.3.1 Diberikan lapangan F. Ruang vektor atas F adalah himpunan tak kosong V bersama dua operasi, operasi pertama disebut penjumlahan yang dinotasikan dengan +,

$$+ : V \times V \to V,$$

dengan $(u, v) \mapsto u + v \in V$, untuk setiap $u, v \in V$;
operasi kedua disebut perkalian skalar

$$\cdot : F \times V \to V,$$

dengan $(r, u) \mapsto ru \in V$, untuk setiap $r \in F, u \in V$,
yang memenuhi beberapa aksioma, yaitu untuk setiap $u, v, w \in V$ berlaku:

(i) $u + (v + w) = (u + v) + w$;

(ii) $u + v = v + u$;

(iii) terdapat $0 \in V$, sehingga untuk setiap $u \in V$, berlaku $0 + u = u + 0 = u$;

(iv) untuk setiap $u \in V$, terdapat $-u \in V$, berlaku $u + (-u) = (-u) + u = 0$;

(v) untuk setiap $a, b \in F$ dan $u, v \in V$, berlaku:

$$a(u+v) = au + av$$
$$(a+b)u = au + bu$$
$$(ab)u = a(bu)$$
$$1u = u$$

(Roman, 2008).

Berikut ini diberikan contoh ruang vektor.

Contoh 2.3.2 Diberikan lapangan F. Himpunan $F^F = \{f | f : F \to F, f \text{ fungsi}\}$ merupakan ruang vektor atas F, terhadap operasi penjumlahan dan perkalian skalar berikut:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

dan

$$(af)(x) = a(f(x)),$$

untuk setiap $f, g \in F^F$ dan $a, x \in F$.
Akan ditunjukkan F^F merupakan ruang vektor atas F.

(i) Diberikan $u, v, w \in F_F$, akan ditunjukkan bahwa $u + (v + w) = (u + v) + w$. Sehingga,

$$\begin{aligned}(u+(v+w))(x) &= u(x) + (v+w)(x)\\ &= u(x) + (u(v) + w(x))\\ &= (u(x) + v(x)) + w(x)\\ &= (u+v)(x) + w(x)\\ &= ((u+v)+w)(x).\end{aligned}$$

Jadi, sifat asosiatif pada operasi penjumlahannya terpenuhi.

(ii) Diberikan $u, v \in F_F$, akan ditunjukkan $u + v = v + u$ terpenuhi. Berlaku:

$$\begin{aligned}(u+v)(x) &= u(x) + v(x)\\ &= v(x) + u(x)\\ &= (v+u)(x).\end{aligned}$$

Jadi, sifat komutatif pada operasi penjumlahannya terpenuhi.

(iii) Didefinisikan fungsi nol $0_F \in F^F$, dengan $0_F(x) = 0$, untuk setiap $x \in F$. Untuk setiap $u \in F^F$ diperoleh:

$$(0_F + u)(x) = 0_F(x) + u(x) = 0 + u(x) = u(x)$$

dan

$$(u + 0_F)(x) = u(x)0_F(x) = u(x) + 0 = u(x).$$

Dengan demikian, $0_F + u = u + 0_F = u$, untuk setiap $u \in F^F$.

(iv) Untuk setiap $u \in F^F$ didefinisikan fungsi $-u \in F^F$, dengan $(-u)(x) = -u(x)$. Diperoleh:

$$(u + (-u))(x) = u(x) + (-u)(x) = u(x) - u(x) = 0$$

dan

$$((-u) + u)(x) = (-u)(x) + u(x) = -u(x) + u(x) = 0.$$

Dengan demikian, $u + (-u) = (-u) + u = 0_F$, untuk setiap $u \in F^F$.

(v) Diberikan $a \in F$ dan $u, v \in F^F$. Berlaku:

$$\begin{aligned} (a(u+v))(x) &= a((u+v)(x)) \\ &= a(u(x) + v(x)) \\ &= au(x) + av(x) \\ &= (au)(x) + (av)(x) \\ &= (au + av)(x). \end{aligned}$$

(vi) Diberikan $a, b \in F$, $u \in F^F$, dan $x \in F$. Akan ditunjukkan bahwa $(a+b)u = au + bu$. Akibatnya,

$$\begin{aligned} ((a+b)u)(x) &= (a+b)(u(x)) \\ &= au(x) + bu(x) \\ &= (au)(x) + (bu)(x) \\ &= (au + bu)(x). \end{aligned}$$

Jadi, distribusi perkalian skalar terhadap penjumlahan skalar terpenuhi.

(vii) Diberikan $a, b \in F$ dan $u \in F^F$, akan ditunjukkan bahwa $(ab)u = a(bu)$. Sehingga,

$$((ab)u)(x) = (ab)(u(x)) = a(b(u(x))) = (a(bu))(x).$$

Jadi, sifat asosiatif pada perkalian skalar terpenuhi.

(viii) Untuk setiap $u \in F^F$, akan ditunjukkan bahwa $1u = u$. Berlaku:

$$(1u)(x) = 1(u(x)) = u(x).$$

Jadi, elemen identitas pada perkalian skalar terpenuhi.

Dengan demikian, F^F merupakan ruang vektor atas F.

Selanjutnya, akan diberikan definisi transformasi linear.

Definisi 2.3.3 Diberikan suatu fungsi $T : V \to W$ dari ruang vektor V ke ruang vektor W dinamakan transformasi linear jika memenuhi:

(i) $T(u + v) = T(u) + T(v)$,

(ii) $T(ku) = kT(u)$,

untuk setiap $u, v \in V$ dan $k \in F$ (Abidin, 2014).

Dalam kasus spesifik dengan $V = W$, pemetaan linear $T : V \to V$ disebut sebagai operator linear pada V . Himpunan semua pemetaan linear dari V ke W dinotasikan dengan $\mathcal{L}(V, W)$ dan himpunan semua operator linear dinotasikan dengan $End(V)$ atau $\mathfrak{gl}(V)$ (Utama dkk., 2021).

Berikut ini diberikan contoh transformasi linear.

Contoh 2.3.4 Diberikan fungsi $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yang didefinisikan dengan $T(x, y) = (2x + y, x - y)$, untuk setiap $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(i) Diberikan sebarang $u = (x_1, y_1)$ dan $v = (x_2, y_2)$, maka $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ sehingga:

$$\begin{aligned}
T(u+v) &= T(x_1+x_2, y_1+y_2) \\
&= (2(x_1+x_2)+(y_1+y_2), (x_1+x_2)-(y_1+y_2)) \\
&= (2x_1+2x_2+y_1+y_2, x_1+x_2-y_1-y_2) \\
&= (2x_1+y_1, x_1-y_1)+(2x_2+y_2, x_2-y_2) \\
&= T(u)+T(v).
\end{aligned}$$

(ii) Diberikan sebarang $k \in F$ dan $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$. Berlaku $ku = (kx_1, ky_1)$ sehingga:

$$\begin{aligned}
T(ku) &= T(kx_1, ky_1) \\
&= (2kx_1+ky_1, kx_1-ky_1) \\
&= k(2x_1+y_1, x_1-y_1) \\
&= kT(u).
\end{aligned}$$

Jadi, T merupakan transformasi linear.

Selanjutnya akan diberikan jenis-jenis transformasi linear.

Definisi 2.3.5 Transformasi linear $T : V \to W$ dikatakan injektif jika T merupakan pemetaan yang injekif, yaitu untuk setiap $u, v \in V$. Jika $T(u) = T(v)$ maka $u = v$. Transformasi linear $T : V \to W$ dikatakan surjektif jika T merupakan pemetaan yang surjekif, yaitu untuk setiap $u \in W$ terdapat $v \in V$ sehingga $u = T(v)$. Transformasi linear yang sekaligus bersifat injektif dan surjektif disebut sebagai transformasi linear bijektif.

Berikut ini diberikan contoh transformasi linear injektif.

Contoh 2.3.6 Diberikan $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dengan:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ 4x_2 \\ 2x_1-x_2, \end{bmatrix}, \text{ untuk setiap } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Diberikan sebarang $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ dengan $T(x) = T(y)$. Diperoleh:

$$\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ 4x_2 \\ 2x_1-x_2. \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1+y_2 \\ 4y_2 \\ 2y_1-y_2 \end{bmatrix},$$

sehingga $x_2 = y_2$ yang berakibat $x_1 = y_1$. Akibatnya $x = y$. Jadi, T merupakan transformasi linear injektif.

Berikut ini diberikan contoh transformasi linear surjektif.

Contoh 2.3.7 Didefinisikan $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sebagai:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{bmatrix},$$

untuk setiap untuk setiap $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Untuk menunjukkan T adalah surjektif, akan diperiksa bahwa untuk setiap $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ terdapat $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sehingga $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$. Dari definisi T, diperoleh persamaan:

$$x_1 + x_2 = y_1; \qquad (2.1)$$

$$2x_1 - x_2 = y_2. \qquad (2.2)$$

Dengan menjumlahkan dan mengeliminasi Persamaan (2.1) dan (2.2), diperoleh:

$$x_1 = \frac{y_1 + y_2}{3}, \quad x_2 = \frac{2y_1 - y_2}{3}.$$

Diperoleh solusi x_1 dan x_2 selalu ada untuk setiap $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2$. Jadi, T bersifat surjektif.

Berikut ini diberikan contoh transformasi linear bijektif.

Contoh 2.3.8 Didefinisikan $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sebagai:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ 4x_1 + x_2 \end{bmatrix},$$

untuk setiap $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

(i) Akan diselidiki bahwa $T(x) = T(y)$ berakibat $x = y$. Jika $T(x) = T(y)$, maka:

$$\begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ 4x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y_1 - 2y_2 \\ 4y_1 + y_2 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh persamaan:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 3y_1 - 2y_2, \\ 4x_1 + x_2 &= 4y_1 + y_2. \end{aligned}$$

Akibatnya,

$$x_1 = y_1 \quad \text{dan} \quad x_2 = y_2.$$

Jaadi, $x = y$, yang menunjukkan bahwa T bersifat injektif.

(ii) Transformasi T bersifat surjektif jika setiap elemen $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, memiliki prepeta $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Matriks transformasi T adalah

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Akan dihitung determinan A sebagai berikut:

$$\det(A) = (3)(1) - (-2)(4) = 3 + 8 = 11 \neq 0.$$

Karena $\det(A) \neq 0$, matriks A invertibel. Akibatnya T bersifat surjektif.

Karena T bersifat injektif dan surjektif, maka T adalah bijektif.

Selanjutnya diberikan definisi isomorfisma pada ruang vektor.

Definisi 2.3.9 Diberikan ruang vektor V dan W. Pemetaan $f : V \to W$ dikatakan isomorfisma jika memenuhi:

1. untuk setiap $u, v \in V$ dan $c \in F$, berlaku:

$$f(u + v) = f(u) + f(v) \quad \text{dan} \quad f(cu) = cf(u),$$

2. pemetaan f merupakan pemetaan yang bijektif

(Handaru, dkk.).

Berikut ini diberikan contoh isomorfisma pada ruang vektor.

Contoh 2.3.10 Diberikan ruang vektor $\mathbb{R}^2$. Didefinisikan pemetaan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dengan:

$$f(x, y) = (2x, 3y)$$

untuk setiap $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Akan ditunjukkan f merupakan isomorfisma.

1. Diberikan sebarang $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Berlaku:

$$\begin{aligned} f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (2(x_1 + x_2), 3(y_1 + y_2)) \\ &= (2x_1, 3y_1) + (2x_2, 3y_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(c(x, y)) &= f(cx, cy) \\ &= (2cx, 3cy) \\ &= c(2x, 3y) \\ &= cf(x, y) \end{aligned}$$

   Jadi, sifat linearitas terpenuhi.

2. Akan ditunjukkan f bijektif.

   (a) Akan ditunjukkan f injektif. Diberikan $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, yang berakibat $(2x_1, 3y_1) = (2x_2, 3y_2)$. Diperoleh:

$$\begin{aligned} 2x_1 = 2x_2 &\Rightarrow x_1 = x_2 \\ 3y_1 = 3y_2 &\Rightarrow y_1 = y_2. \end{aligned}$$

   Karena $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$, jadi f bersifat injektif.

   (b) Akan ditunjukkan f surjektif. Diberikan sebarang $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ terdapat $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dengan $x = \frac{a}{2}$ dan $y = \frac{b}{3}$. Diperoleh $f(x, y) = (a, b)$.

Karena f bersifat injektif dan surjektif, jadi f bersifat bijektif.

Karena f memenuhi kedua aksioma, oleh karena itu f adalah isomorfisma.

Selanjutnya diberikan definisi kombinasi linear.

Definisi 2.3.11 Diberikan suatu ruang vektor V atas lapangan F dan $v_1, ..., v_m \in V$. Setiap vektor dalam V dalam bentuk $a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_mv_m$ dengan $a_i \in F$ disebut kombinasi linear dari $v_1, ..., v_m$ (Rasyad, 2003).

Berikut ini diberikan contoh kombinasi linear.

Contoh 2.3.12 Diberikan vektor-vektor $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ di ruang vektor di $\mathbb{R}^3$. Untuk setiap vektor $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ merupakan kombinasi linear dari e_i, yaitu:

$$\begin{aligned}(a, b, c) &= a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) \\ &= ae_1 + be_2 + ce_3.\end{aligned}$$

2.4 Aljabar Lie

Pada bagian ini, dibahas mengenai konsep dan karakteristik dari aljabar Lie. Namun, sebelum itu diberikan beberapa definisi yang berkaitan dengan aljabar Lie seperti pemetaan bilinear.

Berikut ini akan diberikan definisi pemetaan bilinear.

Definisi 2.4.1 Diberikan sebarang ruang vektor V atas lapangan F. Pemetaan bilinear pada V adalah suatu fungsi

$$\langle -, - \rangle \colon V \times V \to V$$

$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

yang memenuhi sifat linear kanan dan kiri, yaitu:

$$\langle \alpha x + \beta x', y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x', y \rangle$$

$$\langle x, \alpha y + \beta y' \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, y' \rangle$$

untuk setiap $x, x', y, y' \in V$ dan $\alpha, \beta \in F$ (Utama dkk., 2021).

Berikut ini diberikan contoh pemetaan bilinear.

Contoh 2.4.2 Diberikan ruang vektor $\mathbb{R}$ atas lapangan $\mathbb{R}$. Didefinisikan pemetaan $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan rumus $\phi(x, y) = 2xy$. Akan ditunjukkan pemetaan ϕ merupakan pemetaan bilinear.

(i) Diberikan sebarang $x_1, x_2, y \in \mathbb{R}$, berlaku:

$$\begin{aligned}\phi(x_1 + x_2, y) &= 2(x_1 + x_2)y \\ &= 2x_1y + 2x_2y \\ &= \phi(x_1, y) + \phi(x_2, y).\end{aligned}$$

(ii) Diberikan sebarang $x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, berlaku

$$\begin{aligned}\phi(x, y_1 + y_2) &= 2x(y_1 + y_2) \\ &= 2xy_1 + 2xy_2 \\ &= \phi(x, y_1) + \phi(x, y_2).\end{aligned}$$

Jadi, ϕ adalah pemetaan bilinear (Ruhama, 2012).

Selanjutnya akan diberikan definisi *bracket* Lie dan aljabar Lie.

Definisi 2.4.3 Diberikan ruang vektor $\mathfrak{g}$ atas lapangan F. Suatu pemetaan bilinear $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $(x, y) \mapsto [x, y]$ disebut *bracket* Lie pada $\mathfrak{g}$ jika dan hanya jika:

(i) untuk setiap $x, y \in \mathfrak{g}$ berlaku $[x, y]$= - $[y, x]$,

(ii) untuk setiap $x, y, z \in \mathfrak{g}$ berlaku $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [z, x]]$.

Suatu ruang vektor yang dilengkapi dengan *bracket* Lie disebut sebagai aljabar Lie (Utama dkk., 2021).

Berikut ini diberikan contoh aljabar Lie.

Contoh 2.4.4 Diberikan ruang vektor $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Didefinisikan operasi *bracket* Lie untuk setiap $X, Y \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sebagai $[X, Y] = XY - YX$. Akan ditunjukkan $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ memenuhi sifat-sifat *bracket* Lie dan merupakan suatu aljabar Lie.

(i) Untuk setiap $X, Y \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ berlaku

$$[X,Y] = XY - YX = -(YX - XY) = -[Y,X].$$

Jadi, sifat antisimetri terpenuhi.

(ii) Untuk setiap $X, Y, Z \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, berlaku

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

(i) Akan diselidiki $[X,[Y,Z]]$. Dari definisi *bracket* Lie, $[Y,Z] = YZ - ZY$, diperoleh:

$$\begin{aligned}[X,[Y,Z]] &= X(YZ - ZY) - (YZZY)X \\ &= XYZ - XZY - YZX + ZYX.\end{aligned}$$

(ii) Akan diselidiki $[Y,[Z,X]]$. Dari definisi *bracket* Lie, $[Z,X] = ZX - XZ$, diperoleh:

$$\begin{aligned}[Y,[Z,X]] &= Y(ZX - XZ) - (ZX - XZ)Y \\ &= YZX - YXZ - ZXY + XZY.\end{aligned}$$

(iii) Akan diselidiki $[Z,[X,Y]]$. Dari definisi *bracket* Lie, $[X,Y] = XY - YX$, diperoleh:

$$\begin{aligned}[Z,[X,Y]] &= Z(XY - YX) - (XY - YX)Z \\ &= ZXY - ZYX - XYZ + YXZ.\end{aligned}$$

Selanjutnya, jumlahkan semua hasil yang diperoleh. Sehingga diperoleh hasil akhir adalah:

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

Jadi, identitas Jacobi terpenuhi.

Dengan demikian, $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ memenuhi sifat-sifat *bracket* Lie dan merupakan suatu aljabar Lie.

Setelah diberikan contoh mengenai aljabar Lie, selanjutnya diberikan sifat-sifat aljabar Lie pada Teorema 2.4.5.

Teorema 2.4.5 Diberikan suatu aljabar Lie $\mathfrak{g}$, berlaku

(a) $[x, x] = 0$, untuk setiap $x \in \mathfrak{g}$;

(b) $[x, [y, z]] + [y, [x, z]] + [z, [x, y]] = 0$, untuk setiap $x, y, z \in \mathfrak{g}$;

(c) $[x, 0] = 0 = [0, x]$, untuk setiap $x \in \mathfrak{g}$;

(Utama dkk., 2021).

Bukti.

(a) Dari Definisi 2.4.3, diberikan sifat antisimetris dari operasi $[x, y]$, yaitu $[x, y] = -[y, x]$. Diberikan $x = y$, maka diperoleh $[x, x] = -[x, x]$. Artinya, satu-satunya cara agar persamaan ini benar adalah jika $[x, x] = 0$, maka untuk setiap $x \in \mathfrak{g}$ berlaku $[x, x] = 0$.

(b) Diberikan identitas Jacobi yang dinyatakan sebagai:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]] \tag{2.4.1}$$

Kemudian ditulis kembali identitas Jacobi dalam bentuk yang berbeda,

$$[x, [y, z]] = -[z, [x, y]] - [y, [x, z]] \tag{2.4.2}$$

Ini mengikuti langsung dari sifat antisimetri, yaitu $[a, b] = -[b, a]$. Selanjutnya akan dijumlahkan identitas Jacobi yang diperoleh pada persamaan (2.4.2):

$$[x, [y, z]] + [y, [x, z]] + [z, [x, y]] = 0.$$

(c) Akan ditunjukkan untuk setiap $x \in \mathfrak{g}$ berlaku $[x, 0] = 0 = [0, x]$. Dari bagian (a) diperoleh pernyataan $[x, x] = 0$. Pertama, $[x, x] = [x + 0, x]$. Dari sifat bilinearnya, diketahui bahwa $[x + 0, x] = [x, x] + [0, x]$. Karena $[x, x] = 0$, dapat ditulis $0 = 0 + [0, x]$. Diperoleh $[0, x] = 0$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan juga untuk setiap $x \in \mathfrak{g}$ berlaku $[x, x] = [x, x+0]$. Dari sifat bilinear yang sama, dapat ditulis $[x, x + 0] = [x, x] + [x, 0]$. Karena $[x, x] = 0$, diperoleh $0 = 0 + [x, 0]$. Diperoleh $[x, 0] = 0$. Oleh karena itu, diperoleh kesimpulan bahwa untuk setiap $x \in \mathfrak{g}$, berlaku

$$[x, 0] = 0 = [0, x].$$

■

Berikut ini diberikan contoh ilustrasi untuk bagian (b) pada Teorema 2.4.5 dengan melibatkan aljabar Lie $\mathfrak{so}(3)$. Didefinisikan $\mathfrak{so}(3)$ = $\{A \in M_3(\mathbb{R} \mid A^T = -A\}$.

Contoh 2.4.6 Diberikan aljabar Lie $\mathfrak{so}(3)$, yang mempresentasikan rotasi di ruang tiga dimensi. Aljabar Lie $\mathfrak{so}(3)$ terdiri dari $M_{3\times 3}$, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{bmatrix}.$$

Aljabar Lie $\mathfrak{so}(3)$ memiliki tiga elemen basis yang biasanya disebut sebagai J_1, J_2, J_3, yaitu:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, J_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Elemen basis tersebut memenuhi relasi komutator sebagai berikut:

$$[J_1, J_2] = J_3, \quad [J_2, J_3] = J_1, \quad [J_3, J_1] = J_2.$$

Diperoleh identitas Jacobi:

$$[J_1, [J_, J_3]] + [J_2, [J_3, J_1]] + [J_3, [J_1, J_2]] = 0.$$

Akan dihitung bagian-bagian dari identitas Jacobi:

1. Diketahui $[J_2, J_3] = J_1$. Dari Teorema 2.4.5 diperoleh pernyataan $[x, x] = 0$, oleh karena itu $[J_1, [J_2, J_3]] = [J_1, J_1] = 0$.

2. Diketahui $[J_3, J_1] = J_2$. Dari Teorema 2.4.5 diperoleh pernyataan $[x, x] = 0$, oleh karena itu $[J_2, [J_3, J_1]] = [J_2, J_2] = 0$.

3. Diketahui $[J_1, J_2] = J_3$. Dari Teorema 2.4.5 diperoleh pernyataan $[x, x] = 0$, oleh karena itu $[J_3, [J_1, J_2]] = [J_2, J_2] = 0$.

Selanjutnya,

$$[J_1, [J_, J_3]] + [J_2, [J_3, J_1]] + [J_3, [J_1, J_2]] = 0 + 0 + 0 = 0$$

Jadi, identitas Jacobi terpenuhi.

2.5 Derivasi

Derivasi pada ring dapat dipahami sebagai fungsi yang mengukur perubahan elemen-elemen dalam ring tersebut terhadap operasi aljabar tertentu. Konsep ini mirip dengan konsep turunan dalam kalkulus, namun derivasi di sini berlaku pada struktur aljabar ring.

Definisi 2.5.1 Diberikan ring R. Pemetaan aditif $d : R \to R$ dinamakan derivasi pada R jika:

$$d(ab) = d(a)b + ad(b),$$

untuk setiap $a, b \in R$ (Ali dkk., 2024).

Pada ring R jika didefinisikan suatu pemetaan d dari R ke R, untuk setiap $a, b \in R$ yang memenuhi:

(i) $d(a + b) = d(a) + d(b)$,

(ii) $d(ab) = d(a)b + ad(b)$,

disebut sebagai derivasi pada R.

Berikut ini diberikan contoh derivasi.

Contoh 2.5.2 Diberikan himpunan bilangan real $\mathbb{R}$. Didefinisikan $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sebagai berikut:

$$d(x) = 0, \text{untuk setiap } x \in \mathbb{R}.$$

Akan ditunjukkan d merupakan derivasi pada R.

(i) Akan ditunjukkan d merupakan pemetaan aditif. Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{R}$. Diperoleh:

$$d(a + b) = 0 = 0 + 0 = d(a) + d(b)$$

Jadi, d merupakan pemetaan aditif.

(ii) Akan ditunjukkan d memenuhi aturan Leibniz. Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{R}$. Diperoleh:

$$d(ab) = 0 = 0 \cdot b + a \cdot 0 = d(a)b + ad(b)$$

Jadi, aturan Leibniz terpenuhi.

Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa d merupakan derivasi pada ring.

Selanjutnya, diberikan contoh lain derivasi pada suatu ring.

Contoh 2.5.3 Diberikan ring

$$M_2\,(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$$

dan pemetaan $d : M_2(\mathbb{Z}) \to M_2(\mathbb{Z})$ dengan $d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix}$, untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$. Akan ditunjukkan d merupakan derivasi.

Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$. Berlaku:

(i)

$$\begin{aligned} d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) &= d\left(\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(b+f) \\ c+g & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -f \\ g & 0 \end{bmatrix} \\ &= d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) + d\left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

Jadi, d merupakan pemetaan aditif.

(ii)

$$\begin{aligned}
d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) &= d\left(\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -(af+bh) \\ ce+dg & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -bh \\ ce & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -af \\ dg & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -bg & -bh \\ ce & cf \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bg & -af \\ dg & -cf \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -f \\ g & 0 \end{bmatrix} \\
&= d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} d\left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Jadi, d memenuhi aturan Leibniz.

Diperoleh kesimpulan bahwa d merupakan derivasi (Ernanto, 2018).

2.6 Derivasi *Inner*

Pada bagian ini akan dibahas mengenai definisi dari derivasi *inner*.

Definisi 2.6.1 Diberikan suatu aljabar Lie $\mathfrak{g}$ atas ruang vektor V. Suatu pemetaan $\mathrm{ad}_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, untuk setiap $x, y \in \mathfrak{g}$ yang didefinisikan dengan

$$\mathrm{ad}_x(y) = [x, y] = xy - yx$$

disebut derivasi *inner* (Utama dkk., 2021).

Berikut ini diberikan contoh derivasi *inner*.

Contoh 2.6.2 Diberikan ring $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ dan $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. Diberikan sebarang

$A = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. Dapat didefinisikan derivasi *inner* $d_X(A)$:

$$\begin{aligned} d_X(A) &= XA - AX \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ea + fc & ebf + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (ae + bg) - (ea + fc) & (af + bh) - (eb + fd) \\ (ce + dg) - (ga - hc) & (cf + dh) - (gb + hd) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2.7 Derivasi-(α, β)

Pada bagian ini akan diberikan definisi derivasi-(α, β).

Definisi 2.7.1 Diberikan ring R, dan α serta β adalah dua endomorfisma pada R. Suatu fungsi $d : R \to R$ disebut derivasi-(α, β) jika memenuhi kondisi berikut:

$$d(xy) = d(x)\alpha(y) + \beta(x)d(y),$$

untuk setiap $x, y \in R$ (Hong dan Wang, 2022).

Berikut ini diberikan contoh derivasi-(α, β).

Contoh 2.7.2 Diberikan $R = M_2(\mathbb{R})$. Didefinisikan dua endomorfisma $\alpha, \beta : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ sebagai:

$$\alpha(B) = B, \quad \beta(A) = A,$$

untuk setiap $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ Didefinisikan derivasi $d : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ sebagai:

$$d_C(A) = [C, A] = CA - AC,$$

dengan $C \in M_2(\mathbb{R})$. Akan ditunjukkan bahwa d merupakan derivasi-(α, β). Diperoleh:

$$\begin{aligned} d_C(AB) &= C(AB) - (AB)C \\ &= CAB - ABC \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$d_C(A)\alpha(B) = (CA - AC)B = CAB - ACB$$

dan

$$\beta(A)d_C(B) = A(CB - BC) = ACB - ABC.$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} d_C(A)\alpha(B) + \beta(A)d_C(B) &= (CAB - ACB) + (ACB - ABC) \\ &= CAB - ABC. \end{aligned}$$

Jadi, d merupakan derivasi-(α, β).

2.8 Derivasi Lie

Selanjutnya akan dibahas lebih lanjut mengenai derivasi Lie, yaitu sebuah pemetaan linear pada suatu aljabar Lie yang memenuhi kondisi tertentu. Secara sederhana, derivasi Lie adalah suatu operasi yang mengukur seberapa cepat suatu elemen dalam aljabar Lie berubah dibawah pengaruh elemen lain.

Definisi 2.8.1 Diberikan aljabar Lie $\mathfrak{g}$. Suatu pemetaan aditif $d : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ disebut derivasi Lie jika:

(i) $d(x + y) = d(x) + d(y)$;

(ii) $d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)]$;

untuk setiap $x, y \in \mathfrak{g}$ (Utama dkk., 2021).

Berikut ini diberikan contoh derivasi Lie.

Contoh 2.8.2 Diberikan aljabar Lie $\mathfrak{g}$ merupakan aljabar Lie berdimensi 2 dengan basis e_1, e_2 dan relasi komutator (*bracket* Lie) berikut:

$$[e_1, e_2] = e_1$$

Didefinisikan pemetaan linear d sebagai berikut:

$$d(e_1) = 2e_1, d(e_2) = 3e_2.$$

Akan ditunjukkan bahwa d merupakan derivasi Lie.

(i) Untuk setiap $x, y \in \mathfrak{g}$, didefinisikan $x = pe_1 + qe_2$ dan $y = re_1 + se_2$ dengan $p, q, r, s \in F$. Bisa ditulis:

$$x + y = (p + r)e_1 + (q + s)e_2.$$

Selanjutnya, akan dihitung sisi kiri $d(x + y)$:

$$\begin{aligned} d(x + y) &= d((p + r)e_1 + (q + s)e_2) \\ &= d((p + r)e_1) + d((q + s)e_2) \\ &= (p + r)d(e_1) + (q + s)d(e_2) \\ &= (p + r)(2e_1) + (q + s)(3e_2) \\ &= 2(p + r)e_1 + 3(q + s)e_2. \end{aligned}$$

Selanjutnya, akan dihitung sisi kanan $d(x) + d(y)$:

$$\begin{aligned} d(x) + d(y) &= d(pe_1 + qe_2) + d(re_1 + se_2) \\ &= d(pe_1) + d(qe_2) + d(re_1) + d(se_2) \\ &= pd(e_1) + qd(e_2) + rd(e_1) + sd(e_2) \\ &= p(2e_1) + q(3e_2) + r(2e_1) + s(3e_2) \\ &= (2pe_1 + 3qe_2) + (2re_1 + 3se_2) \\ &= 2(p + r)e_1 + 3(q + s)e_2. \end{aligned}$$

Jadi, d merupakan pemetaaan aditif.

(ii) Akan ditunjukkan d memenuhi aturan Leibniz:

$$d[e_1, e_2] = [d(e_1), e_2] + [e_1, d(e_2)].$$

Akan diselidiki pada sisi kiri:

$$d[e_1, e_2] = d(e_1) = 2e_1.$$

Disisi lain, akan diselidiki masing-masing komutator:

$$[d(e_1), e_2] = [2e_1, e_2] = 2[e_1, e_2] = 2e_1$$
$$[e_1, d(e_2)] = [e_1, 3e_2] = 3[e_1, e_2] = 3e_1.$$

Akibatnya, pada kanan diperoleh:

$$2e_1 + 3e_1 = 5e_1.$$

Karena $2e_1 \neq 5e_1$, aturan Leibniz tidak terpenuhi.

Karena aturan Leibniz tidak terpenuhi, d bukan derivasi Lie.

Berikut ini diberikan contoh derivasi Lie.

Contoh 2.8.3 Diberikan aljabar Lie $\mathfrak{g}$ merupakan aljabar Lie berdimensi 2. Selanjutnya akan didefinisikan $d' : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ yang berbeda :

$$d'(e_1) = 2e_1, d'(e_2) = 0.$$

Akan ditunjukkan apakah d' adalah derivasi Lie.

(i) Untuk setiap $x, y \in \mathfrak{g}$, didefinisikan $x = ae_1 + be_2$ dan $y = ce_1 + de_2$ dengan $a, b, c, d \in F$. Diperoleh:

$$x + y = (a + c)e_1 + (b + d)e_2.$$

Di sisi lain, $d'(x + y)$:

$$\begin{aligned} d'(x + y) &= d'((a + c)e_1 + (b + d)e_2) \\ &= d'((a + c)e_1) + d'((b + d)e_2) \\ &= (a + c)d'(e_1) + (b + d)d'(e_2) \\ &= (a + c)(2e_1) + (b + d)(0) \\ &= 2(a + c)e_1. \end{aligned}$$

Selanjutnya akan dihitung sisi kanan $d'(x) + d'(y)$:

$$\begin{aligned} d'(x) + d'(y) &= d'(ae_1 + be_2) + d'(ce_1 + de_2) \\ &= d'(ae_1) + d'(be_2) + d'(ce_1) + d'(de_2) \\ &= ad'(e_1) + bd'(e_2) + cd'(e_1) + dd'(e_2) \\ &= a(2e_1) + b(0) + c(2e_1) + d(0) \\ &= (2ae_1 + 0) + (2ce_1 + 0) \\ &= 2(a + c)e_1. \end{aligned}$$

Jadi, d' merupakan pemetaan aditif.

(ii) Akan ditunjukkan d' memenuhi aturan Leibniz.

$$d'[e_1, e_2] = [d'(e_1), e_2] + [e_1, d'(e_2)].$$

Di sisi kiri, diperoleh :

$$d'[e_1, e_2] = d'(e_1) = 2e_1.$$

Di sisi lain, akan diselidiki masing-masing komutator :

$$[d'(e_1), e_2] + [e_1, d'(e_2)] = [2e_1, e_2] + [e_1, 0] = 2[e_1, e_2] = 2e_1.$$

Jadi, aturan Leibniz terpenuhi.

Karena dua sifat derivasi Lie terpenuhi, artinya d' adalah derivasi Lie.

Akan diberikan contoh derivasi Lie pada aljabar Lie matriks dengan melibatkan aljabar Lie $GL(n, \mathbb{R})$. Himpunan $GL(n, \mathbb{R})$ = $\{A \in M_n(\mathbb{R})\}$, yaitu semua matriks real $n \times n$ dengan struktur *bracket* Lie diberikan oleh komutator matriks $[A, B] = AB - BA$, untuk setiap $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$.

Contoh 2.8.4 Salah satu jenis derivasi Lie yang sangat umum adalah derivasi *Inner*. Misalkan $C \in GL(n, \mathbb{R})$. Derivasi *inner* d_C terkait dengan C didefinisikan oleh:

$$d_C(A) = [C, A] = CA - AC.$$

Akan ditunjukkan bahwa d_C merupakan derivasi Lie.

(i) Diberikan sebarang $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$. Diperoleh:

$$\begin{aligned} d_C(x + y) &= d_C(A + B) \\ &= [C, A + B] \\ &= C(A + B) - (A + B)C \\ &= CA + CB - AC - BC. \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned} d_C(x) + d_C(y) &= d_C(A) + d_C(B) \\ &= [C, A] + [C, B] \\ &= (CA - AC) + (CB - BC) \\ &= CA + CB - AC - BC. \end{aligned}$$

Jadi, d_C merupakan pemetaan aditif.

(ii) Akan ditunjukkan d_C memenuhi aturan Leibniz. Diberikan sebarang $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$. Diperoleh:

$$\begin{aligned} d_C(A, B) &= [C, [A, B]] \\ &= C(AB - BA) - (AB - BA)C. \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned} [d_C(A), B] + [A, d_C(B)] &= [CA - AC, B] + [A, CB - BC] \\ &= ((CA)B - B(CA) - (AC)B + B(AC)) \\ &\quad + A(CB) - A(BC) - (CB)A + (BC)A \\ &= C(AB - BA) - (AB - BA)C. \end{aligned}$$

Jadi, aturan Leibniz terpenuhi.

Oleh karena itu, d_C merupakan derivasi Lie di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Selanjutnya akan ditunjukkan kaitan antara derivasi *inner* dan derivasi Lie.

Teorema 2.8.5 Setiap derivasi *inner* merupakan derivasi Lie.

Bukti. Diberikan aljabar Lie $\mathfrak{g}$. Derivasi *inner* pada aljabar Lie $\mathfrak{g}$ yang berkaitan dengan elemen $x \in \mathfrak{g}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\text{ad}_x(y) = [x, y],$$

untuk setiap $x, y \in \mathfrak{g}$ Akan dibuktikan bahwa ad_x merupakan derivasi Lie.

(i) Diberikan sebarang $y, z \in \mathfrak{g}$ dan $a, b \in \mathbb{R}$. Didefinisikan $\text{ad}_x(y+z) = \text{ad}_x(ay+bz)$. Dari definisi derivasi *inner*, diperoleh:

$$\mathrm{ad}_x(ay + bz) = [x, ay + bz].$$

Selanjutnya,

$$[x, ay + bz] = a[x, y] + b[x, z].$$

Sehingga dengan menggunakan definisi ad_x, diperoleh:

$$a[x, y] + b[x, z] = a\mathrm{ad}_x(y) + b\mathrm{ad}_x(z).$$

Oleh karena itu,

$$\mathrm{ad}_x(ay + bz) = a\mathrm{ad}_x(y) + b\mathrm{ad}_x(z).$$

Jadi, ad_x merupakan pemetaan aditif.

(ii) Akan ditunjukkan ad_x memenuhi aturan Leibniz, yaitu $\mathrm{ad}_x([y, z]) = [\mathrm{ad}_x(y), z]+ [y, \mathrm{ad}_x(z)]$.
Diberikan sebarang $x, y, z \in \mathfrak{g}$. Berlaku:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_x([y, z]) &= [x, [yz]] \\
&= [[x, y], z] + [y, [x, z]] \\
&= [\mathrm{ad}_x(y), z] + [y, \mathrm{ad}_x(z)].
\end{aligned}$$

Oleh karena itu, ad_x memenuhi aturan Leibniz.

Jadi, derivasi *inner* ad_x merupakan derivasi Lie (Utama dkk., 2021). ■

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun ajaran 2024/2025 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Tahapan Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode pendekatan studi literatur dan pengembangan teori, dengan mengumpulkan dan menganalisis bahan-bahan penelitian yang berasal dari referensi terkait, seperti jurnal dan buku. Tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini sebagai berikut :

1) mengumpulkan referensi yang relevan seperti jurnal, artikel ilmiah, buku, dan sumber lainnya yang mendukung penelitian ini;
2) mempelajari dan menganalisis definisi serta teorema yang terkait dalam penelitian ini;
3) menyelidiki sifat-sifat aljabar Lie;
4) mendefinisikan derivasi-(α, β) Lie;
5) menyelidiki kaitan derivasi-(α, β) Lie dan derivasi Lie;
6) mengkontruksi contoh-contoh derivasi-(α, β) Lie;
7) menyelidiki sifat-sifat derivasi-(α, β) Lie.

Tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini dapat dilihat pada diagram berikut:

Mengkaji teori aljabar abstrak yaitu: Grup, Ring, Aljabar Lie, derivasi, derivasi *inner*, derivasi-(α, β), dan derivasi Lie

↓

Tahap 1: Mendefinisikan derivasi-(α, β) Lie berdasarkan teori yang ada

↓

Tahap 2: Mengkontruksi contoh derivasi-(α, β) Lie pada ring

↓

Tahap 3: Menyelidiki sifat-sifat derivasi-(α, β) Lie pada ring

↓

Tahap 4: Menyelidiki kaitan antara derivasi-(α, β) Lie dan derivasi Lie

↓

Tahap 5: Menyelidiki sifat derivasi Lie pada penelitian terdahulu dan mengkontruksi contohnya

Gambar 3.1 Diagram tahapan penelitian.

$$d([x,y]) = [d(x),y] + [x,d(y)],$$

untuk setiap $x, y \in \mathfrak{g}$.

Himpunan $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ dilengkapi dengan struktur aljabar Lie melalui operasi *bracket* Lie, yaitu:

$$[d_1,d_2](x) = d_1(d_2(x)) - d_2(d_1(x)),$$

untuk setiap $d_1, d_2 \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, $x \in \mathfrak{g}$. Dengan definisi ini, $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ menjadi sebuah aljabar Lie.

Himpunan $\mathrm{Der}_{\delta,\delta}(\mathfrak{g})$ didefinisikan sebagai:

$$\mathrm{Der}_{\delta,\delta}(\mathfrak{g}) = \{d \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \mid d(\delta) = 0\}.$$

Akan dibuktikan bahwa $\mathrm{Der}_{\delta,\delta}(\mathfrak{g})$ merupakan subaljabar Lie dari $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

(i) Diberikan $d_1, d_2 \in \mathrm{Der}_{\delta,\delta}(\mathfrak{g})$ dan $a, b \in F$. Berlaku:

$$\begin{aligned}(ad_1 + bd_2)(\delta) &= ad_1(\delta) + bd_2(\delta) \\ &= a(0) + b(0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Dengan demikian, $ad_1 + bd_2 \in \mathrm{Der}_{\delta,\delta}(\mathfrak{g})$.

(ii) Diberikan $d_1, d_2 \in \mathrm{Der}_{\delta,\delta}(\mathfrak{g})$. Berlaku:

$$\begin{aligned}[d_1,d_2](\delta) &= d_1(d_2(\delta)) - d_2(d_1(\delta)) \\ &= d_1(0) - d_2(0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Dengan demikian, $[d_1, d_2] \in \mathrm{Der}_{\delta,\delta}(\mathfrak{g})$.

Oleh karena itu, $\mathrm{Der}_{\delta,\delta}(\mathfrak{g})$ tertutup terhadap operasi *bracket* Lie dan merupakan subaljabar Lie dari $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

Struktur aljabar Lie pada $\mathrm{Der}_{\delta,\delta}(\mathfrak{g})$ didefinisikan menggunakan operasi *bracket* Lie biasa, yaitu:

$$[d_1,d_2]_\delta = [d_1,d_2],$$

dengan kurung di sisi kanan adalah *bracket* Lie standar pada Der($\mathfrak{g}$). Dengan pembatasan ini, semua sifat aljabar Lie termasuk antikomutatif dan aturan Leibniz, tetap terpenuhi karena struktur $[-,-]_\delta$ merupakan pembatasan dari $[-,-]$ pada Der($\mathfrak{g}$).

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\mathrm{Der}_{\delta,\delta}(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

Didefinisikan pemetaan $f : \mathrm{Der}_{\delta,\delta}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ yang bersifat inklusi (f adalah fungsi identitas yang memasukkan elemen-elemen dari $\mathrm{Der}_{\delta,\delta}(\mathfrak{g})$ ke dalam $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ tanpa mengubah elemen-elemen tersebut) dengan aturan $f(d) = d$ untuk setiap $d \in \mathrm{Der}_{\delta,\delta}(\mathfrak{g})$.

(i) Akan dibuktikan bahwa f bersifat injektif. Diketahui bahwa $(f(d_1) = f(d_2)$, maka $d_1 = d_2$ dan memenuhi syarat tambahan $d(\delta) = 0$.

Diberikan $d_1, d_2 \in \mathrm{Der}_{\delta,\delta}(\mathfrak{g})$, dengan:

$$f(d_1) = d_1 \quad \text{dan} \quad f(d_2) = d_2.$$

Jika $f(d_1) = f(d_2)$, maka diperoleh:

$$d_1 = d_2.$$

Dengan demikian, f bersifat injektif.

(ii) Akan dibuktikan bahwa f bersifat surjektif. Diketahui bahwa untuk setiap $d \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, terdapat $d' \in \mathrm{Der}_{\delta,\delta}(\mathfrak{g})$ sehingga $f(d') = d$.

Diberikan $d \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, dan elemen $\delta \in \mathfrak{g}$ dianggap tetap. Jika $d(\delta) \neq 0$, maka $d \notin \mathrm{Der}_{\delta,\delta}(\mathfrak{g})$.

Jika $d(\delta) = 0$, maka $d \in \mathrm{Der}_{\delta,\delta}(\mathfrak{g})$, dan $f(d) = d$. Oleh karena itu, untuk setiap $d \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ yang memenuhi syarat $d(\delta) = 0$ dapat direpresentasikan sebagai elemen $\mathrm{Der}_{\delta,\delta}(\mathfrak{g})$.

Karena elemen δ dianggap tetap dalam konteks ini, pemetaan f adalah surjektif.

Karena f bersifat injektif dan surjektif, maka f bersifat bijektif. Dengan demikian f isomorfis antara $\mathrm{Der}_{\delta,\delta}(\mathfrak{g})$ dan $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ sebagai aljabar Lie, sehingga dapat ditulis:

$$\mathrm{Der}_{\delta,\delta}(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{Der}(\mathfrak{g}).$$

■

Berikut ini akan diberikan ilustrasi contoh dari Teorema 4.3.7 dengan melibatkan $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid tr(A) = 0\}$.

Contoh 4.3.8 Diberikan aljabar Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, yang terdiri dari matriks 2×2. Basis aljabar Lie ini adalah:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Operasi *bracket* Lie untuk basis tersebut didefinisikan sebagai:

$$[H,E] = 2E, \quad [H,F] = -2F, \quad [E,F] = H.$$

Selanjutnya, pilih elemen tetap $\delta = H \in \mathfrak{g}$. Akan didefinisikan subaljabar Lie $\mathrm{Der}_{\delta,\delta}(\mathfrak{g})$ berdasarkan derivasi $d \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ yang memenuhi syarat tambahan:

$$d(\delta) = d(H) = 0.$$

Subhimpunan $\mathrm{Der}_{\delta,\delta}(\mathfrak{g})$ adalah subaljabar Lie dari $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, karena:

1. Jika $d_1, d_2 \in \mathrm{Der}_{\delta,\delta}(\mathfrak{g})$, maka untuk operasi *bracket* Lie berlaku:

   $$[d_1,d_2](H) = d_1(d_2(H)) - d_2(d_1(H)).$$

   Karena $d_1(H) = 0$ dan $d_2(H) = 0$, maka:

   $$[d_1,d_2](H) = 0 - 0 = 0.$$

   Jadi, $[d_1,d_2] \in \mathrm{Der}_{\delta,\delta}(\mathfrak{g})$.

2. Subaljabar ini memiliki sifat aljabar Lie, seperti linearitas dan aturan Leibniz dari $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Dengan demikian, $\mathrm{Der}_{\delta,\delta}(\mathfrak{g})$ adalah subaljabar Lie dari $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

   Didefinisikan sebuah derivasi $d \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ dengan:

   $$d(H) = 0, \quad d(E) = rE, \quad d(F) = -rF$$

   dengan $r \in \mathbb{F}$.

(a) Akan diperiksa sifat linearitas:

$$d(aX + bY) = ad(X) + bd(Y),$$

untuk setiap $X, Y \in \mathfrak{g}$; $a, b \in \mathbb{F}$. Jadi, sifat linearitas terpenuhi.

(b) Akan diperiksa sifat aturan Leibniz, untuk setiap $X, Y \in \mathfrak{g}$. Diketahui $X = H$ dan $Y = E$.

Hitung sisi kiri:

$$d([H, E]) = d(2E) = 2d(E) = 2(rE) = 2rE.$$

Selanjutnya hitung sisi kanan:

$$\begin{aligned}
[d(H), E] + [H, d(E)] &= [0, E] + [H, rE] \\
&= 0 + r[H, E] \\
&= r(2E) \\
&= 2rE.
\end{aligned}$$

Jadi, aturan Leibniz terpenuhi.

(c) Karena $d(H) = 0$, maka $d \in \mathrm{Der}_{\delta,\delta}(\mathfrak{g})$.

Pemetaan $f : \mathrm{Der}_{\delta,\delta}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ yang didefinisikan sebagai:

$$f(d) = d, \quad \text{untuk setiap } d \in \mathrm{Der}_{\delta,\delta}(\mathfrak{g}),$$

adalah isomorfis, karena:

1. f bersifat injektif. Hal ini dikarenakan jika $f(d_1) = f(d_2)$, maka $d_1 = d_2$.
2. f bersifat surjektif. Hal ini dikarenakan untuk setiap $d \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ dengan $d(H) = 0$ berasal dari $\mathrm{Der}_{\delta,\delta}(\mathfrak{g})$.

Jadi, $\mathrm{Der}_{\delta,\delta}(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ merupakan aljabar Lie.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa derivasi-(α, β) Lie merupakan suatu generalisasi dari derivasi Lie yang melibatkan dua endomorfisma, yaitu α dan β, yang memenuhi sifat-sifat dasar dari derivasi Lie seperti sifat aditif dan aturan Leibniz. Penelitian ini menunjukkan bahwa setiap derivasi-(α, β) Lie juga memenuhi sifat dasar dari derivasi Lie biasa dalam konteks yang lebih umum, namun sebaliknya tidak selalu berlaku. Penelitian ini berhasil mendefinisikan derivasi-(α, β) Lie dan memberikan beberapa contoh yang mengilustrasikan konsep ini dalam aplikasi aljabar Lie yang lebih luas. Dalam penelitian ini, diperoleh bahwa komposisi dua derivasi-(α, β) Lie bukan merupakan derivasi-(α, β) Lie. Kemudian, diperoleh bahwa kombinasi dua derivasi-(α, β) Lie merupakan derivasi–(α, β) Lie jika α dan β merupakan pemetaan identitas.

5.2 Saran

Penelitian ini masih perlu mengkaji lebih dalam hubungan antara derivasi-(α, β) Lie dan derivasi *inner* pada aljabar Lie, terutama dalam konteks struktur ideal dan substruktur yang lebih kompleks. Penelitian selanjutnya diharapkan dapat mengembangkan lebih jauh penerapan derivasi-(α, β) Lie dalam konteks aljabar lain, seperti aljabar Jordan atau aljabar Banach. Selain itu, penelitian ini belum mengeksplorasi derivasi-(α, β) Lie dalam kaitannya dengan aplikasi dalam teori grup atau geometri diferensial. Sehingga, penelitian lebih lanjut yang menghubungkan derivasi-(α, β)) Lie dengan topik-topik tersebut dapat memberikan kontribusi yang lebih besar terhadap perkembangan teori aljabar Lie dan aplikasinya.

DAFTAR PUSTAKA

Abidin, W. 2014. Transformasi Linear pada Suatu Fungsi. *Journal Sains dan Teknologi*. (8)1, 31-38.

Ali, S., Rafiquee, N. N., & Varshney, V. 2024. Certain Types of Derivations in Rings: A Suvey. *Journal Indonesia Math. Soc*. 30(2), 256-306.

Andari, A. 2017. *Ring, Field, dan Daerah Integral Edisi Revisi*. Universitas Brawijaya Press, Malang. 129 hlm.

Ashraf, M., Ali, S., & Haetinger, C. 2006. On Derivations in Rings and Their Applications. *The Aligarg Bull. of Maths.*. 25(2), 79 - 107.

Atteya, M. 2020. Commutativity with Derivations of Semiprime Rings. *Discuss. Math. Gen. Algebra Appl*.

Chang, H., Chen, Y., & Zhang, R. 2021. A Generalization on Derivations of Lie Algebras. *Electronic Research Archive*. 29(3), 2457 - 2473.

Citra, R. S., & Suryoto, S. 2011. Endomorfisma L0 Dari Bch-aljabar. *Jurnal Matematika Undip*. 16(1), 39 - 47.

Ernanto, I. 2018. Sifat-Sifat Ring Faktor yang Dilengkapi Derivasi. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications*. 1(1), 12 - 21.

Fitriani & Faisol, A. 2022. *Grup*. Matematika, Yogyakarta. 132 hlm.

Guven, E. 2008. On (σ, τ) Derivations in Prime Rings. *Int. J. Contemp. Math.Sciences*. 3(26), 1289-1293.

Handaru, S.M., Arnawa, I. M., & Helma. 2023. Analisis pemetaan isomorfisma untuk Menentukan Dimensi Ruang Vektor $\mathfrak{L}$. *Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*. 6(2), 135-146.

Hong, H. & Wang, S. 2022. On derivations of (α, β)-type in semiprime rings. *Journal of Algebra and its Applications*, 21(3).

Humphreys, J. E. 1972. *Introduction to Lie algebras and Representation Theory*. Springer-Verlag, Newyork.

Khan, M. S., Ali, S., & Ayedh, M. 2022. Herstein's theorem for prime ideals in rings with involution involving pair of derivations. *Comm. Algebra*. 50(6): 2592-2603.

Martindale, W. S. 1964. Lie derivations of primitive rings. *Journal Michigan Math*. 11, 183-187.

Rasyad, R. 2003. *Aljabar Linear untuk Umum*. Grasindo, Jakarta.

Roman, S. 2008. *Advanced Linear Algebra*. Springer, New York. 522 hlm.

Ruhama, M. A. H. 2012. Sifat-Sifat Pemetaan Bilinear.*Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*. 1(1), 1-9.

Stewart, J. 2015. *Calculus : Early Transcendentals*. Cengange Learning. 1368 hlm.

Surodjo, B.& Susanti, Y. 2015. *Teori Semigrup*. UGM Press. 194 hlm.

Thomas, A. B., Puspita, N. P., & Fitriani. 2024. Derivation on Several Rings. *Jurnal ilmu Matematika dan Terapan*. 18(3), 1729-1738.

Utama, G. A. Y. T., Kusumastuti, N., & Fran, F. 2021. Representasi Adjoin pada Aljabar Lie. *Buletin ilmiah Math. Stat. dan Terapannya*. 10(4), 427-436.

Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., Yuwaningsih, D. A., & Hartanto, A. D. 2021. *Teori Ring dan Modul*. Gajah Mada University Press, Yogyakarta.

Wang, Y. 2019. Lie (Jordan) derivations of arbitrary triangular algebras. *Aequationes Math*. 93(6), 1221-1229.

Wani, B. A. 2021. (φ, Ψ)-derivations on semiprime rings and Banach algebras. *Commun. Math.*. 29(3): 371-383.

Wiyono, S. B. & Siswanto. 2023. *Teori Grup dan Aplikasinya*. Cendekia Mulia Mandiri, Batam. 318 hlm.