DIMENSI PARTISI GRAF BUNGA MAWAR DAN BARBELNYA

(Skripsi)

Oleh

MARTHA MAGDALENA SIHOMBING
NPM 2017031061

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

ABSTRACT

THE PARTITION DIMENSION OF ROSE GRAPH AND ITS BARBELL

By

MARTHA MAGDALENA SIHOMBING

The rose graph, denoted by $M(C_n)$, $n \geq 3$ is a connected graph constructed by a cycle graph C_n with vertices $v_1, v_2, \dots, v_n$ and n isolated vertices $w_1, w_2, \dots, w_n$, by connecting every two vertices v_i, v_{i+1} with w_i, for $i = 1, 2, \dots, n$ where $v_{n+1} = v_1$. The rose barbell graph, denoted by $B_{M(C_n)}$ is a simple graph formed by connecting two rose graphs $M(C_n)$ by edges v_1,v_1' as a bridge. In this research, we discuss the partition dimension of the rose graph and its barbell. The partition dimension of the rose graph, $pd(M(C_n)) = 3$ for $n \geq 3$ and for the rose barbell graph, $pd\left(B_{M(C_n)}\right) = 4$.

Keywords: partition dimension, rose graph, rose barbell graph

ABSTRAK

DIMENSI PARTISI GRAF BUNGA MAWAR DAN BARBELNYA

Oleh

MARTHA MAGDALENA SIHOMBING

Graf bunga mawar, dinotasikan dengan $M(C_n)$, $n \geq 3$ adalah graf terhubung yang dibangun oleh graf siklus C_n dengan titik-titik $v_1, v_2, \dots, v_n$ dan n titik terisolasi (*isolated vertices*) $w_1, w_2, \dots, w_n$, dengan cara menghubungkan setiap dua titik v_i, v_{i+1} dengan w_i, untuk $i = 1, 2, \dots, n$ di mana $v_{n+1} = v_1$. Graf barbel bunga mawar, dinotasikan dengan $B_{M(C_n)}$ adalah graf sederhana yang dibentuk dengan menghubungkan dua graf bunga mawar $M(C_n)$ oleh sisi v_1, v_1' sebagai jembatan. Pada penelitian ini, dikaji tentang dimensi partisi graf bunga mawar dan graf barbelnya. Dimensi partisi graf bunga mawar, $pd(M(C_n)) = 3$ untuk $n \geq 3$ dan graf barbel bunga mawar, $pd\left(B_{M(C_n)}\right) = 4$.

Kata kunci: dimensi partisi, graf bunga mawar, graf barbel bunga mawar

DIMENSI PARTISI GRAF BUNGA MAWAR DAN BARBELNYA

Oleh

MARTHA MAGDALENA SIHOMBING

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

Judul : **DIMENSI PARTISI GRAF BUNGA MAWAR DAN BARBELNYA**

Nama Mahasiswa : *Martha Magdalena Sihombing*

Nomor Pokok Mahasiswa : **2017031061**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.
NIP 19760411 200012 2 001

Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si.
NIP 19931106 201903 2 018

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP 19711001 200501 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **21 Mei 2024**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **Martha Magdalena Sihombing**

Nomor Pokok Mahasiswa : **2017031061**

Jurusan : **Matematika**

Judul Skripsi : **DIMENSI PARTISI GRAF BUNGA MAWAR DAN BARBELNYA**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila di kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 21 Mei 2024
Penulis,

METERAI TEMPEL
651FFALX183636440

Martha Magdalena Sihombing

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Martha Magdalena Sihombing, dilahirkan pada tanggal 04 Oktober 2002 di Seputih Jaya. Penulis merupakan anak kedua dari dua bersaudara, buah cinta kasih dari pasangan Bapak Ranto Sihombing dan Ibu Dermani Sitanggang.

Penulis menempuh pendidikan anak usia dini di Taman Kanak-kanak (TK) Pamerdisiwi pada tahun 2005-2008, pendidikan sekolah dasar di SD Kristen 3 Bandar Jaya pada tahun 2008-2014, pendidikan sekolah menengah pertama di SMP Negeri 3 Terbanggi Besar pada tahun 2014-2017, dan pendidikan sekolah menengah atas di SMA Negeri 1 Terbanggi Besar pada tahun 2017-2020. Pada tahun 2020 penulis terdaftar sebagai mahasiswi Program Studi S1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi (SBMPTN) serta menjadi penerima Beasiswa KIP-Kuliah.

Pada tahun 2020-2021 penulis aktif di Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) Unila, penulis diamanahkan menjadi anggota Biro Kesekretariatan. Pada tahun 2021-2022, penulis diamanahkan sebagai anggota Divisi Latihan Unit Kegiatan Mahasiswa Paduan Suara Mahasiswa (PSM) Universitas Lampung.

Pada tahun 2023, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di PT. Taspen Persero-KCU Bandar Lampung sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu di dunia kerja. Pada tahun yang sama, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Pesawaran, Kecamatan Kedondong, Kabupaten Pesawaran, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat.

KATA INSPIRASI

"Aku tahu, bahwa Engkau sanggup melakukan segala sesuatu, dan tidak ada rencana-Mu yang gagal."

(Ayub 42:2)

"*Mintalah, maka akan diberikan kepadamu; carilah, maka kamu akan mendapat; ketoklah, maka pintu akan dibukakan bagimu.*"

(Matius 7:7)

"Segala perkara dapat kutanggung di dalam Dia yang memberi kekuatan kepadaku."

(Filipi 4:13)

"Apapun juga yang kamu perbuat, perbuatlah dengan segenap hatimu seperti untuk Tuhan dan bukan untuk manusia."

(Kolose 3:23)

"Pray, pray, and pray."

PERSEMBAHAN

Segala puji syukur dan kemuliaan bagi Tuhan Yesus Kristus, yang senantiasa melimpahkan anugerah dan kasih karunia-Nya bagi penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini guna memenuhi salah satu persyaratan untuk mencapai gelar Sarjana Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Terima kasih kepada kedua orang tua penulis atas segala doa, kesabaran, serta pengorbanan dengan setiap tetes air mata dan keringatnya yang telah membawa penulis hingga bisa sampai pada pencapaian ini.

Terima kasih kepada dosen pembimbing, pembahas, serta seluruh dosen Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung atas ilmu dan nasihat yang diberikan kepada penulis, serta nilai-nilai luhur yang tidak ternilai harganya.

Terima kasih kepada sahabat-sahabat dan teman seperjuangan penulis atas kebersamaan, pengalaman, kenangan, dukungan, dan motivasi yang sangat berharga selama masa perkuliahan.

Terima kasih kepada almamater tercinta Universitas Lampung.

SANWACANA

Puji syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa, karena atas berkat, kasih, dan karunia-Nya skripsi ini dapat diselesaikan. Skripsi dengan judul "*Dimensi Partisi Graf Bunga Mawar dan Barbelnya*" adalah salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku pembimbing utama atas kesediaannya untuk memberikan waktu, bimbingan, motivasi, arahan, dan masukan dalam proses penyelesaian skripsi ini.
2. Ibu Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si. selaku pembimbing kedua atas kesediaannya untuk memberikan waktu, bimbingan, arahan, dan masukan dalam proses penyelesaian skripsi ini.
3. Ibu Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si. selaku penguji utama yang telah memberikan evaluasi, masukan, serta kritik yang membangun kepada penulis selama penyusunan skripsi ini.
4. Bapak Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing akademik.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Seluruh dosen, staf, dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

8. Diri sendiri yang telah mau berproses dan bertahan menjalani setiap suka maupun duka di dunia perkuliahan hingga meraih gelar Sarjana Matematika.
9. Kedua orang tua penulis Bapak Ranto Sihombing dan Ibu Dermani Sitanggang, abang kandung penulis David Josua Bona Jaya Sihombing, serta seluruh keluarga yang selalu mendoakan, memberikan nasihat, dan dukungan kepada penulis.
10. Sahabat baik penulis, yaitu Regina Anastasya, Patricia Cristina Wati, Dian Aulia Wati, dan Rizka Khairunnisa yang selalu menemani, memberikan motivasi, semangat, dan dukungan kepada penulis.
11. Lutfia Ayu, Asti Purwaningsih, Salsabila Shafira, dan Aulia Ajie selaku teman seperbimbingan yang telah menemani, menjadi tempat bertukar pikiran, serta memberikan motivasi dan semangat kepada penulis.
12. Teman-teman seperjuangan di Jurusan Matematika angkatan 2020.
13. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang telah banyak membantu memberikan pemikiran demi kelancaran dan keberhasilan penyusunan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua.

Bandar Lampung, Mei 2024
Penulis,

Martha Magdalena Sihombing

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Graf merupakan ilmu yang sangat berkembang pada bidang ilmu matematika dan memiliki penerapan yang luas dalam berbagai bidang. Pada dasarnya, graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antar objek tersebut, dengan tujuan supaya penggambaran objek-objek tersebut lebih mudah dipahami. Secara sederhana, graf didefinisikan sebagai kumpulan titik (*vertex*) yang dihubungkan oleh sisi (*edge*). Teori graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 1736 oleh ahli matematika Swiss bernama Leonhard Euler melalui permasalahan jembatan Königsberg. Euler menyatakan bahwa tidak mungkin ada lintasan yang dapat melewati ketujuh jembatan yang ada, dengan setiap jembatan hanya boleh dilalui satu kali jika derajat setiap titik tidak seluruhnya genap (Munir, 2010).

Seiring waktu, perkembangan teori graf semakin luas, salah satunya pada dimensi partisi. Chartrand et al. (1998) pertama kali memperkenalkan dimensi partisi sebagai pengembangan atau variasi dari konsep dimensi metrik. Chartrand et al. (1998) mengelompokkan semua titik pada graf G ke dalam sejumlah kelas partisi dan menentukan jarak dari setiap titik terhadap setiap kelas partisi tersebut. Nilai k terkecil (kardinalitas minimum) sedemikian sehingga graf G memiliki partisi pembeda dengan k kelas partisi adalah dimensi partisi dari graf G, dinotasikan dengan $pd(G)$ (Chartrand et al., 2000).

Penelitian mengenai dimensi partisi graf dilakukan oleh Asmiati (2012), yang berhasil mendapatkan dimensi partisi amalgamasi bintang yaitu $pd\left(S_{k,m}\right) = m - 1$ untuk $2 \leq k \leq m - 2$ dan $m \geq 4$, $pd\left(S_{k,m}\right) = m$ untuk $m - 1 \leq k \leq m^2 - 1$, serta $pd\left(S_{k,m}\right) = m + a$ untuk $(m + a - 1)^2 - 1 < k \leq (m - a)^2 - 1$ dan $a \geq 1$. Asmiati (2016) berhasil mendapatkan dimensi partisi n graf amalgamasi bintang yang dihubungkan suatu lintasan yaitu $pd(nS_{k,m})$ dengan $k \geq l$, $m \geq 2$ adalah k untuk $1 \leq n \leq \left\lfloor \frac{k}{m-1} \right\rfloor$ dan $(k + 1)$ untuk lainnya.

Penelitian mengenai dimensi partisi graf telah banyak berkembang. Ramdhani (2019) berhasil mendapatkan dimensi partisi graf lengkap yaitu $pd(K_n) = n$. Sanjaya dkk. (2019) berhasil mendapatkan dimensi partisi dari graf kubik yaitu $pd\left(C_{n,2n,n}\right) = 4$ untuk $n \geq 3$. Penelitian oleh Daming dkk. (2020) berhasil mendapatkan dimensi partisi graf hasil amalgamasi siklus yaitu $pd(Amal(C_n)_m) = 3$ untuk $n \geq 4$ dan $2 \leq m \leq 3$. Penelitian oleh Ramdhani dan Rahmi (2021) berhasil mendapatkan dimensi partisi graf lintasan yaitu $pd(P_n) = 2$.

Adapun penelitian terkait aplikasi dimensi partisi ialah aplikasi dari dimensi metrik graf yang dilakukan oleh Wahyudi (2018) untuk meminimalkan pemasangan sensor kebakaran pada sebuah gedung. Pada penelitian tersebut, ruangan-ruangan pada gedung direpresentasikan sebagai titik (*vertex*) dan dinding atau lantai antar ruangan direpresentasikan sebagai sisi (*edge*) dari suatu graf G sehingga dapat dibuat graf terhubung yang mewakili gedung tersebut. Dimensi metrik graf yang diperoleh dari denah ruang suatu gedung dapat direpresentasikan sebagai jumlah minimum sensor kebakaran yang harus dipasang pada gedung tersebut, sedangkan himpunan penyelesaian dengan kardinalitas minimum menunjukkan di ruangan mana sensor harus dipasang. Dari penerapan dimensi metrik dan analisis yang dilakukan, sensor kebakaran yang harus dipasang pada gedung tersebut hanya di tiga ruangan saja dari total 12 ruangan.

Sejauh penelusuran literatur pada penelitian terdahulu, belum ada kajian mengenai dimensi partisi graf bunga mawar $M(C_n)$ dan graf barbel bunga mawar $B_{M(C_n)}$. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk membahas dimensi partisi graf bunga mawar dan graf barbel bunga mawar, untuk $n \geq 3$.

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan dimensi partisi graf bunga mawar $M(C_n)$ dan graf barbel bunga mawar $B_{M(C_n)}$, untuk $n \geq 3$.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

1. Memberikan pengetahuan mengenai dimensi partisi graf bunga mawar $M(C_n)$ dan graf barbel bunga mawar $B_{M(C_n)}$, untuk $n \geq 3$.
2. Sebagai referensi untuk penelitian lebih lanjut mengenai dimensi partisi graf dan graf barbel bunga lainnya.

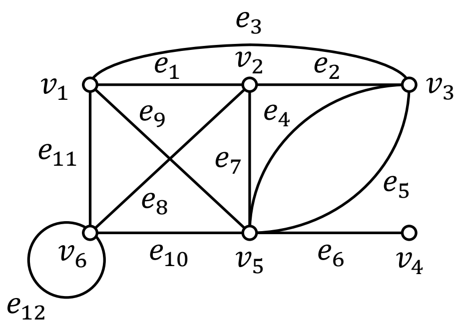
II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh seorang matematikawan Swiss, yaitu Leonhard Euler pada tahun 1736. Teori ini didasarkan pada permasalahan kemungkinan untuk melewati empat daerah yang terhubung dengan tujuh jembatan di atas sungai Pregel di kota Kaliningrad, Rusia, tepat satu kali dan kembali ke tempat semula. Permasalahan jembatan Königsberg ini direpresentasikan dalam bentuk graf tak sederhana, dengan titik (*vertex*) menyatakan daratan dan sisi/garis (*edge*) menyatakan jembatan yang menghubungkan dua daratan yang berbeda. Euler menyatakan bahwa tidak mungkin ada lintasan yang dapat melewati ketujuh jembatan yang ada dengan setiap jembatan hanya boleh dilalui sekali jika derajat setiap titik tidak seluruhnya genap (Suryadi, 1996).

Gambar 2.1 Representasi graf untuk masalah Jembatan Königsberg (Sumber: https://2.bp.blogspot.com/-_PgOOsHnF28/UQeTy86Iu-I/AAAAAAAAaw0/DLyI3TldVc4/s600/euler_konigsberg.gif)

Pada bagian ini akan diberikan konsep dasar graf yang diambil dari Deo (1989). Graf G adalah himpunan terurut $(V(G), E(G))$, dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ menyatakan himpunan titik (*vertex*) dari G dengan $V(G) \neq \emptyset$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ menyatakan himpunan sisi (*edge*) dari G yang menghubungkan sepasang titik. Banyaknya himpunan titik $V(G)$ disebut dengan orde dari graf. Graf G dikatakan terhubung (*connected graph*) jika untuk setiap dua titik terdapat lintasan yang menghubungkan setiap dua titik tersebut. Jika tidak, maka graf G disebut graf tak terhubung (*disconnected graph*). Pada graf terhubung G, jarak yang dinotasikan dengan $d(v_i, v_j)$ antara dua titik v_i dan v_j adalah panjang lintasan terpendek antara dua titik (banyaknya sisi pada lintasan terpendek) dalam suatu graf.



Gambar 2.2 Graf G dengan 6 titik dan 12 sisi

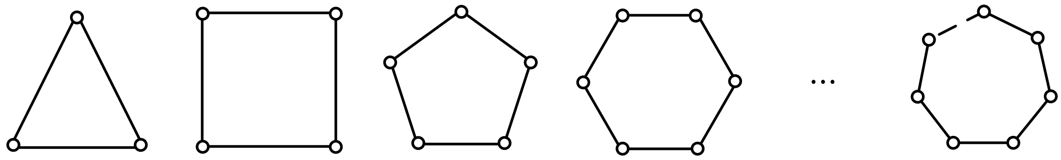
Gambar 2.2 merupakan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$. Dua buah titik pada suatu graf dikatakan bertetangga (*adjacent*) jika kedua titik itu dihubungkan oleh sebuah sisi. Jika titik v_1 dan v_2 dihubungkan oleh sisi e, maka titik v_1 dan v_2 dikatakan menempel (*incidency*) pada sisi e, begitu juga dengan e dikatakan menempel pada titik v_1 dan v_2. Pada Gambar 2.2, titik yang bertetangga dengan titik v_1 adalah v_2, v_3, v_5, dan v_6 sedangkan sisi yang menempel dengan titik v_1 adalah sisi e_1, e_3, e_{10}, dan e_{11}. Titik terisolasi (*isolated vertex*) merupakan titik yang tidak memiliki sisi yang bersisian atau tidak bertetangga dengan titik lain (titik berderajat nol).

Derajat (*degree*) suatu titik yang dinotasikan dengan $d(v)$ adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik v. Derajat pada masing-masing titik pada Gambar 2.2 adalah $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = 4$, $d(v_4) = 1$, $d(v_5) = 6$, dan $d(v_6) = 5$. Daun (*pendant vertex*) adalah titik yang berderajat satu. Pada Gambar 2.2, yang dikatakan sebagai daun adalah titik v_4. Sisi paralel (*multiple edges*) adalah beberapa sisi yang memiliki titik ujung yang sama. *Loop* adalah sisi yang menempel pada titik yang sama atau memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Pada Gambar 2.2 terdapat sisi paralel pada sisi e_4 dan e_5, serta *loop* pada titik v_6 yaitu sisi e_{12}.

Istilah lain pada pembahasan graf adalah jalan, lintasan, dan sirkuit. Jalan (*walk*) adalah suatu barisan berhingga dari titik dan sisi yang dimulai dan diakhiri dengan titik sedemikian rupa sehingga setiap sisi menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya pada suatu graf. Sebuah jalan disebut tertutup apabila titik awal sama dengan titik akhir. Sedangkan jalan disebut terbuka apabila titik awal tidak sama dengan titik akhir. Contoh jalan pada Gambar 2.2 adalah v_5, e_8, v_6, e_{11}, $v_1, e_3, v_3, e_2, v_2, e_9, v_6$. Lintasan (*path*) adalah jalan yang melewati titik-titik yang berbeda, di mana titik-titik tersebut dilewati tepat satu kali pada suatu graf. Contoh lintasan pada Gambar 2.2 adalah $v_3, e_2, v_2, e_9, v_6, e_8, v_5, e_6, v_4$. Sirkuit (*circuit*) adalah lintasan tertutup, yaitu memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sirkuit dibedakan menjadi dua macam, yaitu sirkuit ganjil dan sirkuit genap. Sirkuit ganjil adalah sirkuit yang memuat titik berjumlah ganjil dan sirkuit genap adalah sirkuit yang memuat titik berjumlah genap. Contoh sirkuit pada Gambar 2.2 adalah $v_5, e_7, v_2, e_2, v_3, e_4, v_5$.

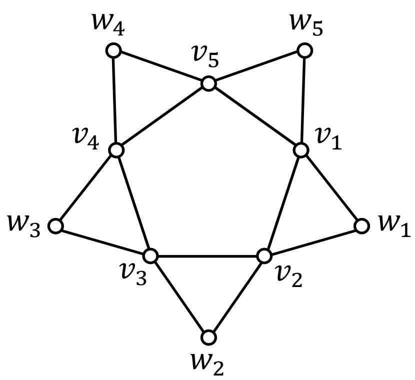
2.2 Graf Bunga Mawar dan Barbelnya

Graf siklus disebut juga graf lingkaran adalah graf terhubung sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf siklus dengan n titik dinotasikan dengan C_n, dengan $n \geq 3$. Jika himpunan titik pada C_n adalah $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ maka himpunan sisinya adalah $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n),\ (v_n, v_1)\}$. Dengan kata lain, terdapat sisi yang menghubungkan titik terakhir v_n dan titik pertama v_1 (Daniel & Taneo, 2019). Di bawah ini diberikan beberapa contoh graf siklus.



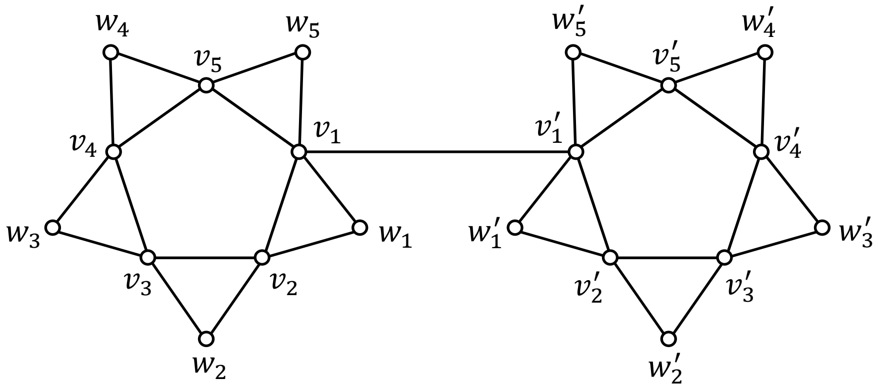
Gambar 2.3 Graf siklus C_n, untuk $n \geq 3$

Graf bunga mawar merupakan graf terhubung yang memuat graf siklus C_n, dengan $n \geq 3$. Graf bunga mawar dinotasikan dengan $M(C_n)$. Misalkan $v_1, v_2, \dots, v_n$ adalah titik dari graf siklus C_n, dengan $n \geq 3$ dan misalkan n sisi dari C_n adalah $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$. Jadi, graf bunga mawar $M(C_n)$ dapat dikonstruksi dari graf siklus C_n dengan titik $v_1, v_2, \dots, v_n$ dan n titik terisolasi (*isolated vertices*) $w_1, w_2, \dots, w_n$, dengan cara menghubungkan setiap dua titik v_i, v_{i+1} dengan w_i, untuk $i = 1, 2, \dots, n$ di mana $v_{n+1} = v_1$. Jadi, graf bunga mawar $M(C_n)$ memuat n titik berderajat 2 dan n titik berderajat 4 (Sugeng et al., 2022).



Gambar 2.4 Graf bunga mawar $M(C_5)$

Graf barbel adalah graf sederhana yang dibentuk dengan menghubungkan dua graf tiruan (identik) dengan sebuah sisi sebagai jembatan (Ihwan & Rahmawati, 2014). Graf barbel bunga mawar merupakan graf yang terbentuk dengan menghubungkan dua graf bunga mawar $M(C_n)$ oleh sisi v_1,v_1' sebagai jembatan. Graf barbel bunga mawar dinotasikan dengan $B_{M(C_n)}$.



Gambar 2.5 Graf barbel bunga mawar $B_{M(C_5)}$

2.3 Dimensi Partisi Graf

Dimensi partisi graf pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand et al. (1998) sebagai pengembangan atau variasi dari konsep dimensi metrik. Chartrand et al. (1998) mengelompokkan semua titik pada graf G ke dalam sejumlah kelas partisi dan menentukan jarak setiap titik terhadap setiap kelas partisi tersebut.

Misalkan $G(V,E)$ graf terhubung. Untuk himpunan bagian S dari $V(G)$ dan sebuah titik $v \in V(G)$, jarak antara v dan S didefinisikan sebagai $d(v,S) = min\{d(v,x)|x \in S\}$ dengan $d(v,x)$ adalah jarak dari titik v ke x. Misalkan $V(G)$ dipartisi menjadi k himpunan $S_1, S_2, \dots, S_k$ yang saling lepas. Untuk k-partisi terurut $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ dari $V(G)$ dan sebuah titik $v \in V(G)$, representasi dari v terhadap Π didefinisikan sebagai $r(v|\Pi) = (d(v,S_1),\ d(v,S_2), \dots, d(v,S_k))$. Selanjutnya, Π disebut partisi pembeda (partisi penyelesaian) dari $V(G)$ jika

$r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi)$ untuk setiap dua titik berbeda $u, v \in V(G)$. Nilai k terkecil (kardinalitas minimum) sedemikian sehingga graf G memiliki partisi pembeda dengan k kelas partisi adalah dimensi partisi dari graf G. Dimensi partisi graf G dinotasikan dengan $pd(G)$ (Chartrand et al., 2000).

Teorema 2.3.1 (Chartrand et al., 1998) Dimensi partisi graf siklus C_n untuk $n \geq 3$ adalah 3.

Berikut diberikan contohnya.

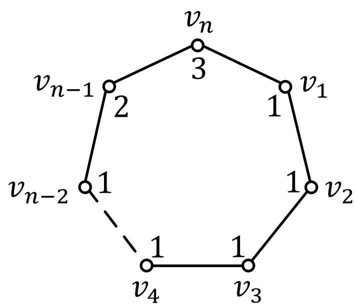
Diberikan graf siklus C_n. Akan ditunjukkan bahwa dimensi partisi graf siklus C_n atau $pd(C_n)$ untuk $n \geq 3$ adalah 3.

Untuk menunjukkan batas bawah $pd(C_n) \geq 3$, andaikan terdapat partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2\}$, dengan $S_1 = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}\}$ dan $S_2 = \{v_n\}$. Representasi setiap titik pada graf siklus C_n terhadap Π adalah sebagai berikut:

$$
\begin{array}{rcccl}
r(v_1|\Pi) & = & \big(d(v_1,S_1), d(v_1,S_2)\big) & = & (0,1) \\
r(v_2|\Pi) & = & \big(d(v_2,S_1), d(v_2,S_2)\big) & = & (0,2) \\
r(v_3|\Pi) & = & \big(d(v_3,S_1), d(v_3,S_2)\big) & = & (0,3) \\
r(v_4|\Pi) & = & \big(d(v_4,S_1), d(v_4,S_2)\big) & = & (0,4) \\
 & & \vdots & & \\
r(v_{n-2}|\Pi) & = & \big(d(v_{n-2},S_1), d(v_{n-2},S_2)\big) & = & (0,2) \\
r(v_{n-1}|\Pi) & = & \big(d(v_{n-1},S_1), d(v_{n-1},S_2)\big) & = & (0,1) \\
r(v_n|\Pi) & = & \big(d(v_n,S_1), d(v_n,S_2)\big) & = & (1,0)
\end{array}
$$

Terlihat bahwa terdapat representasi yang sama, yaitu $r(v_1|\Pi) = r(v_{n-1}|\Pi)$ dan $r(v_2|\Pi) = r(v_{n-2}|\Pi)$. Oleh karena itu, Π bukanlah partisi pembeda. Hal ini kontradiksi dengan pengandaian. Jadi, dibutuhkan sekurang-kurangnya tiga partisi untuk graf siklus C_n. Akibatnya, $pd(C_n) \geq 3$.

Selanjutnya, pada Gambar 2.6 diberikan partisi pada setiap titik untuk mengetahui dimensi partisi graf siklus C_n.



Gambar 2.6 Contoh partisi pembeda minimal dari graf C_n

Graf siklus C_n dipartisi sedemikian sehingga diperoleh $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, dengan $S_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_{n-2}\}$, $S_2 = \{v_{n-1}\}$, dan $S_3 = \{v_n\}$. Representasi setiap titik pada graf siklus C_n terhadap Π adalah sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
r(v_1|\Pi) &= \big(d(v_1,S_1), d(v_1,S_2), d(v_1,S_3)\big) &&= (0,2,1)\\
r(v_2|\Pi) &= \big(d(v_2,S_1), d(v_2,S_2), d(v_2,S_3)\big) &&= (0,3,2)\\
r(v_3|\Pi) &= \big(d(v_3,S_1), d(v_3,S_2), d(v_3,S_3)\big) &&= (0,4,3)\\
r(v_4|\Pi) &= \big(d(v_4,S_1), d(v_4,S_2), d(v_4,S_3)\big) &&= (0,5,4)\\
&\vdots\\
r(v_{n-2}|\Pi) &= \big(d(v_{n-2},S_1), d(v_{n-2},S_2), d(v_{n-2},S_3)\big) &&= (0,1,2)\\
r(v_{n-1}|\Pi) &= \big(d(v_{n-1},S_1), d(v_{n-1},S_2), d(v_{n-1},S_3)\big) &&= (1,0,1)\\
r(v_n|\Pi) &= \big(d(v_n,S_1), d(v_n,S_2), d(v_n,S_3)\big) &&= (1,1,0)
\end{aligned}
$$

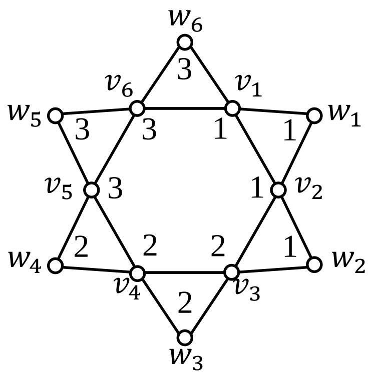
Karena setiap titik pada graf C_n memiliki representasi yang berbeda, maka Π adalah partisi pembeda dari graf siklus C_n dan diperoleh batas atas $pd(C_n) \le 3$.

Diperoleh batas bawah $pd(C_n) \ge 3$ dan batas atas $pd(C_n) \le 3$, maka dimensi partisi graf siklus C_n untuk $n \ge 3$ adalah $pd(C_n) = 3$.■

Contoh:

Berikut diberikan graf bunga mawar $M(C_6)$. Akan ditentukan dimensi partisi dari graf tersebut.

Terlebih dahulu akan ditentukan batas bawah dimensi partisi graf bunga mawar $M(C_6)$. Karena graf bunga mawar $M(C_6)$ memuat graf siklus C_n, maka berdasarkan Teorema 2.3.1 $pd(M(C_6)) \geq 3$. Selanjutnya, pada Gambar 2.7 diberikan partisi pada setiap titik untuk mengetahui dimensi partisi graf bunga mawar $M(C_6)$.



Gambar 2.7 Contoh partisi pembeda minimal dari graf $M(C_6)$

Misalkan Π adalah partisi pembeda dengan menggunakan tiga kelas partisi, $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, dengan $S_1 = \{v_1, v_2, w_1, w_2\}$, $S_2 = \{v_3, v_4, w_3, w_4\}$, dan $S_3 = \{v_5, v_6, w_5, w_6\}$. Maka diperoleh representasi setiap titik pada graf $M(C_6)$ terhadap Π adalah sebagai berikut:

$r(v_1|\Pi) = (0,2,1)$ $\qquad$ $r(w_1|\Pi) = (0,2,2)$

$r(v_2|\Pi) = (0,1,2)$ $\qquad$ $r(w_2|\Pi) = (0,1,3)$

$r(v_3|\Pi) = (1,0,2)$ $\qquad$ $r(w_3|\Pi) = (2,0,2)$

$r(v_4|\Pi) = (2,0,1)$ $\qquad$ $r(w_4|\Pi) = (3,0,1)$

$r(v_5|\Pi) = (2,1,0)$ $\qquad$ $r(w_5|\Pi) = (2,2,0)$

$r(v_6|\Pi) = (1,2,0)$ $\qquad$ $r(w_6|\Pi) = (1,3,0)$

Karena setiap titik pada graf $M(C_6)$ memiliki representasi yang berbeda terhadap Π, maka Π adalah partisi pembeda dari graf $M(C_6)$ dan diperoleh batas atas $pd(M(C_6)) \leq 3$.

Diperoleh batas bawah $pd(M(C_6)) \geq 3$ dan batas atas $pd(M(C_6)) \leq 3$, maka dimensi partisi graf $M(C_6)$ adalah $pd(M(C_6)) = 3$.■

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2023/2024, di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Langkah-langkah Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan untuk menentukan dimensi partisi graf bunga mawar $M(C_n)$ dan graf barbel bunga mawar $B_{M(C_n)}$ adalah sebagai berikut:

1. Menentukan dimensi partisi graf bunga mawar $M(C_n)$, untuk $n \geq 3$.
   a. Mengonstruksi graf bunga mawar $M(C_n)$.
   b. Menentukan batas bawah dimensi partisi graf bunga mawar $M(C_n)$. Karena graf bunga mawar $M(C_n)$ memuat graf siklus C_n, maka batas bawah $pd(M(C_n))$ sekurang-kurangnya sama dengan dimensi partisi graf siklus, yaitu $pd(C_n) \geq 3$ untuk $n \geq 3$. Namun, jika batas bawah tersebut belum memenuhi syarat dimensi partisi, maka akan digunakan pembuktian kontradiksi.
   c. Menentukan batas atas dimensi partisi graf bunga mawar $M(C_n)$. Batas atas $pd(M(C_n))$ diperoleh dengan mengonstruksi graf $M(C_n)$. Setiap

titik pada graf bunga mawar $M(C_n)$ dikelompokkan dalam kelas partisi pembeda. Minimum banyaknya partisi pembeda itulah yang merupakan dimensi partisi graf bunga mawar $M(C_n)$.

d. Jika diperoleh batas atas $pd(M(C_n)) \leq x$ dan batas bawah $pd(M(C_n)) \geq x$, maka dimensi partisi graf bunga mawar adalah $pd(M(C_n)) = x$.

e. Memformulasikan hasil yang diperoleh dalam suatu pernyataan matematika.

f. Membuktikan hasil yang telah diperoleh pada langkah e.

g. Menarik kesimpulan.

2. Menentukan dimensi partisi graf barbel bunga mawar $B_{M(C_n)}$, untuk $n \geq 3$.

a. Mengonstruksi graf barbel bunga mawar $B_{M(C_n)}$.

b. Menentukan batas bawah dimensi partisi graf barbel bunga mawar $B_{M(C_n)}$. Karena graf barbel bunga mawar $B_{M(C_n)}$ memuat graf bunga mawar $M(C_n)$, maka batas bawah $pd\left(B_{M(C_n)}\right)$ sekurang-kurangnya sama dengan dimensi partisi graf bunga mawar, yaitu $pd(M(C_n)) \geq x$ untuk $n \geq 3$. Namun, jika batas bawah tersebut belum memenuhi syarat dimensi partisi, maka akan digunakan pembuktian kontradiksi.

c. Menentukan batas atas dimensi partisi graf barbel bunga mawar $B_{M(C_n)}$. Batas atas $pd\left(B_{M(C_n)}\right)$ diperoleh dengan mengonstruksi graf $B_{M(C_n)}$. Setiap titik pada graf barbel bunga mawar $B_{M(C_n)}$ dikelompokkan dalam kelas partisi pembeda. Minimum banyaknya partisi pembeda itulah yang merupakan dimensi partisi graf barbel bunga mawar $B_{M(C_n)}$.

d. Jika diperoleh batas atas $pd\left(B_{M(C_n)}\right) \leq x$ dan batas bawah $pd\left(B_{M(C_n)}\right) \geq x$, maka dimensi partisi graf barbel bunga mawar adalah $pd\left(B_{M(C_n)}\right) = x$.

e. Memformulasikan hasil yang diperoleh dalam suatu pernyataan matematika.

f. Membuktikan hasil yang telah diperoleh pada langkah e.

g. Menarik kesimpulan.

V. SIMPULAN DAN SARAN

5.1 Simpulan

Pada penelitian ini diperoleh dimensi partisi graf bunga mawar, $pd(M(C_n))$ adalah 3 untuk $n \geq 3$ dan dimensi partisi graf barbel bunga mawar, $pd\left(B_{M(C_n)}\right)$ adalah 4 untuk $n \geq 3$.

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dikembangkan untuk menentukan dimensi partisi graf bunga mawar pada operasi graf lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Asmiati, A. 2016. Dimensi Partisi n Graf Amalgamasi Bintang yang Dihubungkan Suatu Lintasan. *Jurnal Matematika*. **19**(3): 93-95.

Asmiati. 2012. Partition Dimension of Amalgamation of Stars. *Bulletinof Mathematics*. **4**(2): 161-167.

Chartrand, G., Salehi, E., & Zhang, P. 1998. On the Partition Dimension of a Graph. *Congress Numer*. **130**: 157-168.

Chartrand, G., Salehi, E., & Zhang, P. 2000. The Partition Dimension of a Graph. *Aequationes Math*. **59**(1): 45-54.

Daming, A. S., Hasmawati, H., Haryanto, L., & Nurwahyu, B. 2020. Dimensi Partisi Graf Hasil Amalgamasi Siklus. *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi*. **16**(2): 199-207.

Daniel, F., & Taneo, P. N. L. 2019. *Teori Graf*. Deepublish, Yogyakarta.

Deo, N. 1989. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. Prentice Hall of India Prive Limited, New Delhi.

Ihwan, M. D., & Rahmawati, A. 2014. Kajian Bilangan Clique Graf Gear G_n dan Graf Barbel B_n. *Gamatika*. **5**(1): 39-50.

Munir, R. 2010. *Matematika Disktrit*. Informatika Bandung, Bandung.

Ramdhani, V. 2019. Dimensi Partisi Graf Lengkap. *Sainstek: Jurnal Sains dan Teknologi*. **11**(2): 65-69.

Ramdhani, V., & Rahmi, F. 2021. The Partition Dimension of a Path Graph. *Sainstek: Jurnal Sains dan Teknologi*. **13**(2): 66-72.

Sanjaya, I., Narwen, N., & Rudianto, B. 2019. Dimensi Partisi dari Graf Kubik $C_{c,2n,n}$. *Jurnal Matematika UNAND*. **7**(3): 90-93.

Sugeng, K. A., John, P., Lawrence, M. L., Anwar, L. F., Bača, M., & Semaničová-Feňovčíková, A. 2022. Modular Irregularity Strength on Some Flower Graphs. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications (EJGTA)*. **11**(1): 27-38.

Suryadi, H. S. 1996. *Teori Graf Dasar*. Gunadarma, Jakarta.

Wahyudi, S. 2018. Aplikasi Dimensi Metrik untuk Meminimalkan Pemasangan Sensor Kebakaran Sebuah Gedung. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*. **15**(2): 89-96.