

DIMENSI PARTISI GRAF BUNGA ASTER DAN BARBELNYA

(Skripsi)

Oleh

AULIA AJIE RACHMAWATI

NPM 2067031001



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024**

ABSTRACT

PARTITION DIMENSION OF THE DAISY GRAPH AND ITS BARBELL

By

AULIA AJIE RACHMAWATI

The Daisy graph $D(K_n)$ is a graph constructed from complete graph K_n with vertices $v_1, v_2, \dots, v_n$ and n vertices $w_1, w_2, \dots, w_n$ such that vertices v_i and v_{i+1} are adjacent to w_i for $i = 1, 2, \dots, n$ where $v_{n+1} = v_1$. Barbell graph of Daisy graph $B_{D(K_n)}$ is a graph formed by connecting two Daisy graphs with a bridge. In this research, we determine the partition dimension of Daisy graph and its barbell. Partition dimension of Daisy graph $pd(D(K_n))$ is 3 for $n = 3$, and $\left(n - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right)$ for $n > 3$. Partition dimension of barbell Daisy graph $pd(B_{D(K_n)})$ is 4 for $n = 3, 4$ and $\left(n - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right)$ for $n > 4$.

Keywords: Daisy graphs, barbell graph, partition dimension

ABSTRAK

DIMENSI PARTISI GRAF BUNGA ASTER DAN BARBELNYA

Oleh

AULIA AJIE RACHMAWATI

Graf Bunga Aster $D(K_n)$ merupakan graf hasil konstruksi graf lengkap K_n dengan simpul $v_1, v_2, \dots, v_n$ dan n simpul $w_1, w_2, \dots, w_n$ sehingga simpul v_i dan v_{i+1} bertetangga dengan w_i untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dengan $v_{n+1} = v_1$. Graf barbel Bunga Aster $B_{D(K_n)}$ merupakan graf yang terbentuk dari dua graf Bunga Aster yang dihubungkan dengan sebuah jembatan. Pada penelitian ini, dikaji mengenai dimensi partisi pada graf Bunga Aster dan barbelnya. Dimensi partisi dari graf Bunga Aster, $pd(D(K_n))$ adalah 3 untuk $n = 3$, dan $\left(n - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right)$ untuk $n > 3$. Dimensi partisi dari graf barbel Bunga Aster $pd(B_{D(K_n)})$ adalah 4 untuk $n = 3, 4$ dan $\left(n - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right)$ untuk $n > 4$.

Kata kunci: graf Bunga Aster, graf barbel, dimensi partisi

DIMENSI PARTISI GRAF BUNGA ASTER DAN BARBELNYA

Oleh

AULIA AJIE RACHMAWATI

Skripsi

**Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA**

Pada

**Jurusan Matematika
Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024**

Judul Skripsi

: **DIMENSI PARTISI GRAF BUNGA ASTER
DAN BARBELNYA**

Nama Mahasiswa

: **Aulia Ajie Rachmawati**

Nomor Pokok Mahasiswa

: **2067031001**

Jurusan

: **Matematika**

Fakultas

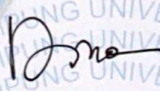
: **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**



MENYETUJUI

1. **Komisi Pembimbing**


Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.
NIP. 19760411 200012 2 001


Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si.
NIP. 19931106 201903 2 018

2. **Ketua Jurusan Matematika**

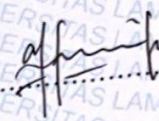

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

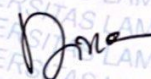
Ketua

: Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.



Sekretaris

: Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si.



Penguji

Bukan Pembimbing

: Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.



2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.

NIP. 19711001 200501 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: 10 Juni 2024

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama Mahasiswa : **Aulia Ajie Rachmawati**
Nomor Pokok Mahasiswa : **2067031001**
Jurusan : **Matematika**
Judul Skripsi : **DIMENSI PARTISI GRAF BUNGA ASTER
DAN BARBELNYA**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila dikemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil Salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 10 Juni 2024
Penulis,

A yellow revenue stamp from the Indonesian government, featuring the Garuda Pancasila emblem and the text "METERAN TEMPU". The stamp is partially obscured by a handwritten signature in black ink. The serial number "38AKX115655223" is visible at the bottom of the stamp.

Aulia Ajie Rachmawati

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Aulia Ajie Rachmawati yang merupakan anak kedua dari dua bersaudara pasangan Amsuddin dan Johar Mukminah. Penulis dilahirkan di Pringsewu pada 15 Mei 2002.

Penulis menyelesaikan pendidikan Sekolah Dasar di SD Muhammadiyah Pringsewu pada tahun 2014, Sekolah Menengah Pertama di SMP Negeri 1 Pringsewu pada tahun 2017, Sekolah Menengah Atas di SMA Negeri 1 Pringsewu pada tahun 2020. Pada tahun 2020 penulis terdaftar sebagai Mahasiswa Universitas Lampung pada Program Studi S1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam melalui jalur Prestasi Khusus.

Selama masa studi penulis di Universitas Lampung, penulis aktif di organisasi Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) sebagai anggota Bidang Eksternal periode 2021 dan 2022, penulis bergabung di organisasi tingkat Universitas yaitu AIESEC in Universitas Lampung sebagai *Quality Assurance Staff of AIESEC Future Leaders Summer Peak* tahun 2022 dan sebagai *Accounting Manager of Finance Governance and Legality* tahun 2023. Penulis aktif mengikuti kegiatan *volunteer* di bidang *environment* yang diselenggarakan oleh AIESEC tahun 2022. Penulis menerima beasiswa Djarum Beasiswa Plus tahun 2022-2023. Pada awal tahun 2023, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kampung Way Tawar, Kabupaten Way Kanan. Pada tahun yang sama, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di PT. PLN (Persero) Unit Layanan Pelanggan Way Halim Bandar Lampung. Selanjutnya, pada semester awal tahun 2024 penulis mengikuti program Magang Kampus Merdeka Batch 6 sebagai *Portfolio Analyst Intern* di PT. Home Credit Indonesia.

KATA INSPIRASI

‘Face everything in front of you, and done it perfectly’.

(Aulia Ajie Rachmawati)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucapkan Alhamdulillah sebagai rasa syukur kepada Allah SWT atas nikmat dan hidayah yang telah diberikan sehingga saya dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik dan tepat pada waktunya.

Kepada kedua orang tuaku (Amsuddin dan Johar Mukminah) dan abangku (Agungsewu Ajie Pratama), terima kasih untuk semua doa, motivasi, kasih sayang dan dukungan sehingganya dapat terselesaikan tanggung jawab untuk menyelesaikan pendidikan ini.

Kepada sahabat, teman, dan siapapun yang pernah hadir di hidupku. Terima kasih atas segala dukungan yang membuatku terus melangkah maju.

Kepada dosen pembimbing dan penguji atas jasanya untuk mendukung penulis menyelesaikan skripsi ini.

Almamater Universitas Lampung

SANWACANA

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas kehadiran-Nya yang telah melimpahkan segala nikmat, ridho serta karunianya kepada penulis sehingga penulis dapat menulis skripsi dengan judul **“Dimensi Partisi Graf Bunga Aster dan Barbelnya”** yang merupakan salah satu syarat untuk mencapai gelar sarjana Matematika (S.Mat.) pada program studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Ibu Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing 1 yang telah memberikan bimbingan, dukungan, arahan, dan motivasi kepada penulis sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik.
2. Ibu Dina Eka Nurvalzy, S.Pd., M.Si. selaku Dosen Pembimbing 2 yang telah memberika arahan, saran, dan nasihat kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.
3. Ibu Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji yang telah memberikan pengarahan, evaluasi, serta sarannya kepada penulis selama penyusunan skripsi ini.
4. Ibu Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing Akademik.
5. Bapak Aang Nuryaman, S.Si selaku Kedua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
6. Bapak Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si. selaku dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Ibu dan Bapak yang selalu memberikan doa, semangat, motivasi, dan dukungannya baik secara moral maupun finansial selama penyusunan skripsi dari awal hingga akhir.

8. Abang kandung penulis, Agungsewu Ajie Pratama yang telah memberikan segala bentuk dukungan dan juga menghibur penulis selama proses pengerjaan skripsi.
9. Sahabat yang selalu mendukung penulis selama perkuliahan, Intan, Ayu, Dea, dan Shafira. Asti dan Martha sebagai teman seperbimbingan yang selalu saling memberikan semangat dan motivasi.
10. Teman sesama anggota bidang Eksternal HIMATIKA, Rani, Callista, Demi, Salsa, Yazid, Najia, Eri, Ridho, Arvi, Falen, Margel, Erwin, dan Rara yang telah memberikan warna pada masa perkuliahan penulis.
11. Raihana yang memberikan motivasi dan fasilitas pendukung bagi penulis untuk melakukan penulisan skripsi ini.
12. Semua pihak lainnya yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu yang telah membantu penulis menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna dan masih memiliki banyak kekurangan karena keterbatasan pengetahuan, kemampuan, serta pengalaman penulis. Untuk itu, penulis mengharapkan adanya kritik dan saran yang bersifat membangun. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat serta menambah wawasan bagi penulis dan pembaca.

Bandar Lampung, 10 Juni 2024

Aulia Ajie Rachmawati
NPM. 2067031001

DAFTAR ISI

	Halaman
DAFTAR GAMBAR	xiv
I. PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang dan Masalah	1
1.2. Tujuan Penelitian.....	3
1.3. Manfaat Penelitian.....	3
II. TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1. Konsep Dasar Graf	4
2.2. Graf Bunga Aster dan Barbelnya	6
2.3. Dimensi Partisi Graf.....	7
III. METODE PENELITIAN.....	12
3.1. Waktu dan Tempat Penelitian	12
3.2. Tahapan Penelitian	12
IV. HASIL DAN PEMBAHASAN.....	14
4.1. Dimensi Partisi Graf Bunga Aster	15
4.2. Dimensi Partisi Graf Barbel Bunga Aster	30
V. SIMPULAN.....	46
5.1. Simpulan.....	46
5.2. Saran.....	46
DAFTAR PUSTAKA.....	47

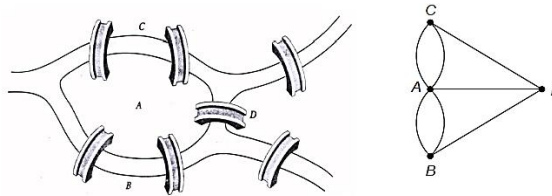
DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1. Jembatan Konigsberg dan Graf Pemisalannya	1
Gambar 2.1. Contoh graf dengan 5 simpul dan 7 sisi	5
Gambar 2.2. Graf Lengkap	6
Gambar 2.3. Cotoh Graf Bunga Aster $D(K_5)$	6
Gambar 2.4. Contoh Graf Barbel Bunga Aster $B_{D(K_4)}$	7
Gambar 2.5. Contoh Partisi Pembeda Minimal Graf Siklus C_n	8
Gambar 2.6. Contoh Partisi Pembeda Minimal Graf Bunga Aster $D(K_4)$	11
Gambar 4.1. Contoh Partisi Pembeda Minimal Graf Bunga Aster $D(K_3)$	16
Gambar 4.2. Contoh Partisi Pembeda Minimal Graf Bunga Aster $D(K_4)$	17
Gambar 4.3. Contoh Partisi Pembeda Minimal Graf Bunga Aster $D(K_5)$	18
Gambar 4.4. Contoh Partisi Pembeda Minimal Graf Bunga Aster $D(K_6)$	20
Gambar 4.5. Contoh Partisi Pembeda Minimal Graf Bunga Aster $D(K_7)$	21
Gambar 4.6. Contoh Partisi Pembeda Minimal Graf Bunga Aster $D(K_8)$	22
Gambar 4.7. Contoh Partisi Pembeda Minimal Graf Bunga Aster $D(K_9)$	24
Gambar 4.8. Contoh Partisi Pembeda Minimal Graf Barbel Bunga Aster $B_{D(K_3)}$	30
Gambar 4.9. Contoh Partisi Pembeda Minimal Graf Barbel Bunga Aster $B_{D(K_4)}$	32
Gambar 4.10. Contoh Partisi Pembeda Minimal Graf Barbel Bunga Aster $B_{D(K_5)}$	33
Gambar 4.11. Contoh Partisi Pembeda Minimal Graf Barbel Bunga Aster $B_{D(K_6)}$	34
Gambar 4.12. Contoh Partisi Pembeda Minimal Graf Barbel Bunga Aster $B_{D(K_7)}$	36
Gambar 4.13. Contoh Partisi Pembeda Minimal Graf Barbel Bunga Aster $B_{D(K_8)}$	38
Gambar 4.14. Contoh Partisi Pembeda Minimal Graf Barbel Bunga Aster $B_{D(K_9)}$	39

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang kini banyak dipelajari karena memiliki banyak fungsi atau penerapan pada kehidupan sehari-hari. Graf adalah kumpulan objek terstruktur di mana beberapa pasangan objeknya memiliki hubungan atau keterkaitan tertentu. Teori Graf pertama kali dikaji oleh Leonhard Euler, seorang matematikawan asal Swiss, pada tahun 1736. Melalui tulisannya, Euler memecahkan masalah jembatan Königsberg yang sangat terkenal di Eropa (Suryadi, 1996).



Gambar 1.1. Jembatan Königsberg dan Graf Pemisalnya

Euler memisalkan daratan dengan simpul dan jembatan dimisalkan dengan sisi atau garis. Euler berhasil menyimpulkan bahwa tidak mungkin untuk dapat melalui ketujuh jembatan itu masing-masing satu kali dan kembali lagi ke tempat semula. Pemecahan masalah ini lah yang menjadi gagasan konsep teori graf untuk pertama kalinya (Suryadi, 1996).

Hingga saat ini, teori graf terus mengalami banyak perkembangan. Salah satu konsep pada teori graf yang banyak berkembang akhir-akhir ini dan menarik untuk dibahas adalah konsep dimensi partisi. Dimensi partisi merupakan pengembangan

dari konsep dimensi metrik. Konsep dimensi metrik itu sendiri pertama kali dicetuskan oleh Slater pada tahun 1971 dan dikembangkan oleh Melter dan Harary pada tahun 1976. Dimensi metrik adalah banyaknya anggota minimum dari himpunan pembeda dari representasi suatu simpul terhadap jarak-jaraknya (Chartrand dkk., 1998).

Dimensi partisi pertama kali dikaji oleh Chartrand dkk. pada tahun 1998 sebagai salah satu variasi dari dimensi metrik. Dimensi partisi merupakan banyaknya anggota minimum dari partisi pembeda dari representasi setiap simpul terhadap jarak-jaraknya dan dinotasikan dengan $pd(G)$. Pada suatu graf, himpunan dari setiap simpulnya dapat dikelompokkan menjadi beberapa himpunan partisi S . Misalkan suatu partisi Π , dengan Π merupakan himpunan k -partisi yang teratur. $S \in \Pi$ disebut partisi pembeda dari graf tersebut jika setiap simpul pada graf mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π . Kardinalitas minimum dari k -partisi pembeda itulah yang disebut dimensi partisi (Chartrand dkk., 2000).

Penelitian mengenai dimensi partisi sebelumnya telah dilakukan yaitu diantaranya, pada 2011, Darmaji telah berhasil menunjukkan dimensi partisi dari graf *multipartite* dan graf hasil korona dari dua graf terhubung. Kemudian pada tahun 2014, Grigorious dkk., telah berhasil menentukan dimensi partisi pada kelas graf *circulant*. Selanjutnya pada tahun 2015, Ida Bagus dkk., telah berhasil menunjukkan dimensi partisi dari beberapa kelas graf pohon.

Graf Bunga Aster adalah graf yang dikonstruksi dari graf lengkap $K_n, n \geq 3$. Dengan notasi $D(K_n)$, graf Bunga Aster tersebut memiliki n simpul yang berderajat 2 dan n simpul lain berderajat $(n + 1)$ (Sugeng dkk., 2022). Dengan menggabungkan dua buah sebarang graf terhubung G dan H menggunakan sebuah jembatan maka diperoleh graf barbel yang dinotasikan $B_{n,n}$ (Asmiati dkk., 2018). Graf barbel Bunga Aster sendiri dibentuk dengan menggabungkan dua graf Bunga Aster dengan sebuah jembatan dan dinotasikan dengan $B(D(K_n))$.

Kajian yang membahas terkait dimensi partisi dari salah satu graf bunga yaitu graf Bunga Aster sejauh ini belum ditemukan. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan dibahas mengenai dimensi partisi dari graf Bunga Aster beserta dimensi partisi graf barbelnya.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan dimensi partisi graf Bunga Aster $D(K_n), n \geq 3$ dan barbelnya $B_{D(K_n)}, n \geq 3$.

1.3 Manfaat Penelitian

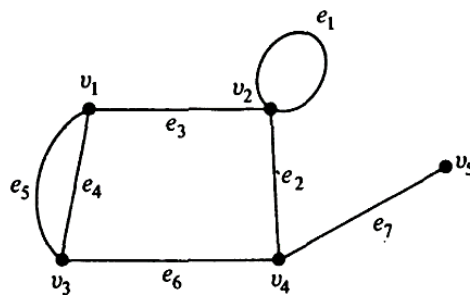
Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan pengetahuan dalam bidang teori graf tentang dimensi partisi graf Bunga Aster $D(K_n), n \geq 3$ dan barbelnya $B_{D(K_n)}, n \geq 3$.
2. Sebagai referensi untuk penelitian yang lebih lanjut mengenai dimensi partisi, graf Bunga Aster, dan graf barbel Bunga Aster.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

Graf $G = (V, E)$ adalah sebuah pasangan berurutan, dengan V himpunan berhingga tak kosong $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ yang disebut simpul (*vertices*), dan $E = \{e_1, e_2, \dots\}$ himpunan pasangan tak berurut dari simpul-simpul berbeda dari V yang disebut sisi (*edges*), sedemikian sehingga setiap sisi e_k didefinisikan sebagai sebuah pasangan tidak berurutan (v_i, v_j) dari simpul-simpul di V . Simpul-simpul v_i, v_j yang berasosiasi dengan e_k disebut ujung sisi dari e_k . Banyaknya anggota himpunan $V(G)$ disebut orde dari graf G . Jika sisi $e = \{p, q\} \in E$, maka p dan q keduanya dikatakan menempel (*incident*) dengan e dan saling bertetangga (*adjacent*). Jika sisi $e' = \{p, r\} \in E$, maka sisi-sisi e dan e' dikatakan saling bertetangga karena memiliki simpul yang sama yaitu p . Secara ringkas, sebuah sisi $\{p, q\}$ dinotasikan dengan pq (Foulds, 1992). Berikut salah satu contoh dari graf :



Gambar 2.1. Contoh graf dengan 5 simpul dan 7 sisi

Graf pada Gambar 2.1 merupakan graf $G = (V, E)$ dengan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$. Simpul yang bertetangga dengan v_1 adalah v_2 dan v_3 , sisi yang menempel dengan v_1 adalah e_3 dan e_4 . Derajat suatu simpul

dinotasikan dengan $d(v)$ diartikan sebagai banyaknya sisi yang menempel pada simpul tersebut. Dengan demikian, derajat simpul v_1 adalah $d(v_1) = 2$. Pada Gambar 2.1, simpul v_5 disebut daun. Daun adalah simpul yang berderajat satu. Pada Gambar 2.1 juga terdapat sisi paralel yaitu beberapa sisi yang memiliki simpul awal dan simpul akhir yang sama yaitu sisi e_4 dan e_5 pada simpul v_1 dan v_3 . Selain itu terdapat juga *Loop* yang merupakan sebuah sisi dengan simpul awal dan akhir yang sama yaitu simpul v_2 .

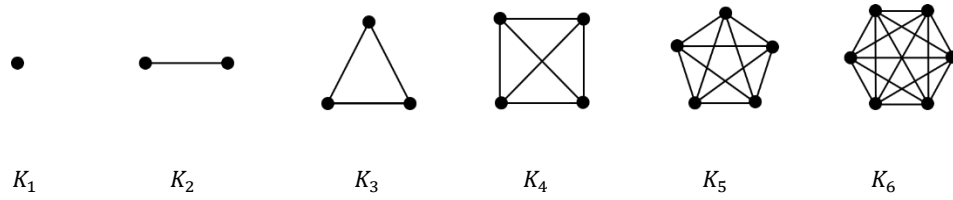
Jalan (*walk*) pada graf adalah barisan berhingga dari simpul dan sisi yang masing-masing simpulnya terhubung dengan simpul selanjutnya oleh sisi tertentu pada sebuah graf. Pada Gambar 2.1, yang merupakan Jalan adalah $v_1, e_4, v_3, e_5, v_1, e_3, v_2$. Lintasan (*path*) adalah jalan yang melewati simpul yang berbeda-beda di mana masing-masing simpul dilewati tepat satu kali. Pada Gambar 2.1 yang merupakan lintasan adalah $v_2, e_3, v_1, e_4, v_3, e_6, v_4, e_7, v_5$. Sirkuit adalah lintasan yang di mulai dan berakhir pada simpul yang sama. Contoh sirkuit pada Gambar 2.1 adalah $v_2, e_3, v_1, e_5, v_3, e_6, v_4, e_2, v_2$.

Terdapat dua jenis graf berdasarkan keterhubungannya. Yaitu graf terhubung dan graf tak terhubung. Graf G dikatakan terhubung jika terdapat lintasan yang menghubungkan setiap dua simpul yang berbeda. Jika tidak, maka graf G disebut graf tak terhubung (Junming, 2003).

2.2 Graf Bunga Aster dan Barbelnya

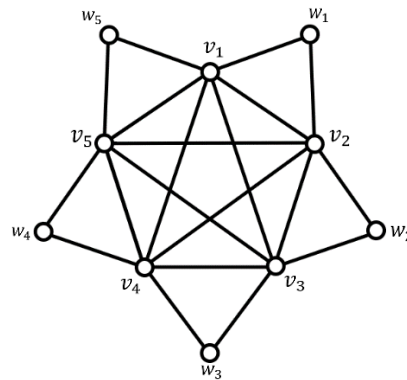
Graf Bunga Aster $D(K_n)$ adalah konstruksi dari graf lengkap K_n (Sugeng dkk., 2022) . Graf lengkap K_n itu sendiri adalah graf sederhana yang terdiri atas sebuah sisi dari setiap pasangan simpul. Setiap simpul pada graf lengkap dihubungkan dengan semua simpul lainnya oleh sebuah sisi. Derajat dari setiap simpul pada graf lengkap $K_n, n \geq 3$ adalah $(n - 1)$ dan banyaknya sisi dari graf lengkap $K_n, n \geq 3$ adalah $\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$ (Buhaerah dkk., 2022).

Berikut adalah contoh graf lengkap:



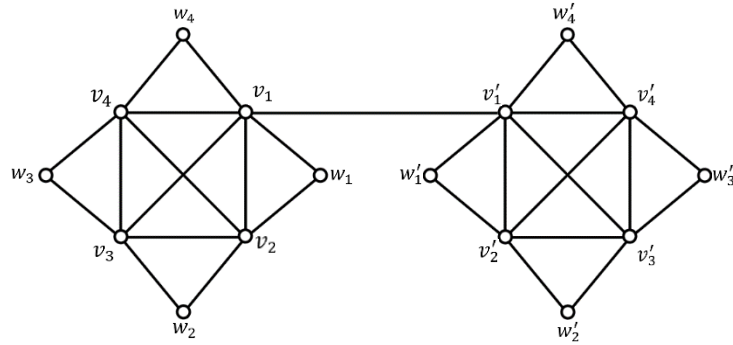
Gambar 2.2. Graf Lengkap

Graf lengkap $K_n, n \geq 3$ yang dikonstruksikan dengan simpul $v_1, v_2, \dots, v_n$ dan n simpul $w_1, w_2, \dots, w_n$ sehingga simpul v_i dan v_{i+1} bertetangga dengan w_i untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dengan $v_{n+1} = v_1$ akan membentuk graf Bunga Aster $D(K_n), n \geq 3$. Graf Bunga Aster $D(K_n), n \geq 3$ memiliki n simpul yang berderajat 2 dan n yang berderajat $(n + 1)$ (Sugeng dkk., 2022).



Gambar 2.3. Contoh Graf Bunga Aster $D(K_5)$

Sebuah graf barbel dikonstruksikan dengan menghubungkan dua graf terhubung G dan H oleh sebuah jembatan (Asmiati dkk., 2018). Graf barbel Bunga Aster adalah graf yang terbentuk dari dua graf Bunga Aster yang dihubungkan dengan sebuah jembatan (v_1, v'_1) dan dinotasikan dengan $B_{D(K_n)}$.



Gambar 2.4. Contoh Graf Barbel Bunga Aster $B_D(K_4)$

2.3 Dimensi Partisi Graf

Terlebih dahulu akan diberikan definisi secara umum dari dimensi partisi. Jumlah minimal koordinat yang dibutuhkan untuk menentukan simpul-simpul yang ada dalam suatu ruang atau objek disebut dengan dimensi. Sedangkan partisi diartikan sebagai pengelompokan anggota himpunan di mana setiap anggota himpunan termuat dalam satu kelompok tertentu dan tiap kelompok memiliki anggota yang berbeda. Secara umum, dimensi partisi artinya adalah banyaknya anggota minimum dari partisi pembeda dari representasi setiap simpul terhadap jarak-jaraknya (Chartrand dkk., 2000). Berikut akan dijelaskan definisi konsep dimensi partisi pada graf secara matematis beserta teorema-teorema terkait dimensi partisi.

Diberikan G graf terhubung. Jarak antara dua simpul u dan v di G , dinotasikan dengan $d(u, v)$, adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v di G . Jarak dari simpul v di G ke sebuah subhimpunan S dari simpul-simpul G didefinisikan sebagai $\min\{d(v, x) | x \in S\}$, dan dinotasikan dengan $d(v, S)$. S adalah pembeda dua simpul u dan v jika $d(u, S) \neq d(v, S)$.

Sebuah partisi $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ dari $V(G)$ adalah sebuah partisi pembeda dari $V(G)$ jika tiap dua simpul di G dibedakan oleh S_i untuk beberapa i ($1 \leq i \leq k$). Alternatifnya, jika $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ adalah partisi dari $V(G)$ menjadi k himpunan, maka Π adalah dimensi partisi jika dan hanya jika, untuk setiap dua

Bukti :

Graf siklus C_n dipartisi sedemikian sehingga diperoleh $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, dengan $S_1 = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-2}\}$, $S_2 = \{v_{n-1}\}$, $S_3 = \{v_n\}$. Diperoleh representasi tiap simpul adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} r(v_1|\Pi) &= (d(v_1, S_1), d(v_1, S_2), d(v_1, S_3)) = (0, 2, 1); \\ r(v_2|\Pi) &= (d(v_2, S_1), d(v_2, S_2), d(v_2, S_3)) = (0, 3, 2); \\ r(v_3|\Pi) &= (d(v_3, S_1), d(v_3, S_2), d(v_3, S_3)) = (0, 4, 3); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r(v_4|\Pi) &= (d(v_4, S_1), d(v_4, S_2), d(v_4, S_3)) = (0, 5, 4); \\
r(v_5|\Pi) &= (d(v_5, S_1), d(v_5, S_2), d(v_5, S_3)) = (0, 6, 5); \\
&\vdots \\
r(v_{n-2}|\Pi) &= (d(v_{n-2}, S_1), d(v_{n-2}, S_2), d(v_{n-2}, S_3)) = (0, n-1, n-2); \\
r(v_{n-1}|\Pi) &= (d(v_{n-1}, S_1), d(v_{n-1}, S_2), d(v_{n-1}, S_3)) = (1, 0, 1); \\
r(v_n|\Pi) &= (d(v_n, S_1), d(v_n, S_2), d(v_n, S_3)) = (1, 1, 0);
\end{aligned}$$

Karena representasi dari semua simpul berbeda, maka Π adalah partisi pembeda dari graf siklus C_n . Maka $pd(C_n) \leq 3$. Akibatnya $pd(C_n) = 3$. ■

Teorema 2.4.2. (Chartrand dkk., 2000) Diberikan G sebuah graf terhubung dengan orde n . Maka $pd(G) = n$ jika dan hanya jika $G = K_n$.

Bukti :

Diberikan G graf lengkap K_n . Akan dibuktikan bahwa $pd(G) = n$. Diberikan partisi $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$, di mana u dan v berada pada elemen yang sama, misalkan S_i . Maka $d(u, S_i) = d(v, S_i) = 0$. Karena semua simpul pada graf lengkap bertetangga, maka $d(u, w) = d(v, w)$ untuk semua $w \in V(G) - \{u, v\}$ sehingga $d(u, S_j) = d(v, S_j)$ untuk semua j , di mana $1 \leq j \neq i \leq k$. Artinya Π bukan partisi pembeda. Kontradiksi, sehingga u dan v harus berada pada elemen yang berbeda. Maka $k = n$, Jadi $pd(G) = n$.

Diberikan G graf berorde n dengan $pd(G) = n$, akan dibuktikan bahwa $G = K_n$ di mana $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Asumsikan kontradiksinya bahwa $G \neq K_n$, maka kita dapat mengasumsikan bahwa $d(v_1, v_n) = 1$ dan $d(v_{n-1}, v_n) = 2$. Diberikan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_{n-1}\}$ partisi dari $V(G)$ dengan $S_1 = \{v_1, v_n\}$ dan $S_i = \{v_i\}$ untuk $2 \leq i \leq n-1$. Untuk setiap i ($1 \leq i \leq n-1$), hanya entri ke- i dari $r(v_i|\Pi)$ adalah 0. Maka representasi $r(v_i|\Pi)$, $1 \leq i \leq n-1$, berbeda. Karena entri pertama dari $r(v_n|\Pi)$ adalah 0, $r(v_n|\Pi)$ berbeda untuk semua $r(v_i|\Pi)$, di mana $2 \leq i \leq n-1$. Juga, karena entri ke- $(n-1)$ dari $r(v_n|\Pi)$ adalah 2 dan entri ke- $(n-1)$ dari

$r(v_1|\Pi)$ adalah 1, akibatnya $r(v_n|\Pi) \neq r(v_1|\Pi)$. Sehingga, Π adalah sebuah partisi pembeda dari G dan $pd(G) \leq n - 1$, kontradiksi. Jadi, untuk $pd(G) = n$ maka $G = K_n$. ■

Teorema 2.4.3 Diketahui $x, y, z \in R$. Maka benar bahwa jika $x \leq y$ dan $y \leq x$, maka $x = y$.

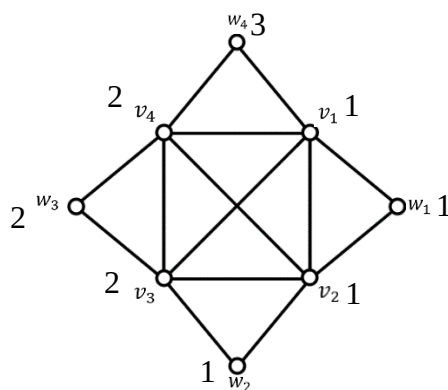
Bukti :

Andaikan $x \neq y$, maka $x < y$ atau $y < x$, kontradiksi. ■

Contoh 2.4.1 Berikut ini diberikan contoh graf Bunga Aster $D(K_4)$ dan akan ditentukan dimensi partisi dari graf tersebut.

Untuk menentukan dimensi partisi, terlebih dahulu ditentukan batas bawah dan batas atas dimensi partisi dari graf tersebut. Karena graf bunga Aster $D(K_4)$ memuat graf siklus, berdasarkan Teorema 2.4.1, batas bawah untuk dimensi partisi graf Bunga Aster $D(K_4)$ adalah $3 \leq pd(D(K_4))$.

Selanjutnya akan ditentukan batas atas $D(K_4)$ dengan mengelompokkan simpul-simpul ke dalam 3 partisi, yaitu sebagai berikut :



Gambar 2.6. Contoh Partisi Pembeda Minimal Graf Bunga Aster $D(K_4)$

Sesuai dengan gambar, diperoleh kelas-kelas partisi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{v_1, w_1, v_2, w_2\}$, $S_2 = \{v_3, w_3, v_4\}$, dan $S_3 = \{w_4\}$. Sehingga diperoleh representasi sebagai berikut :

$$r(v_1 | \Pi) = (0,1,1)$$

$$r(w_1 | \Pi) = (0,2,2)$$

$$r(v_2 | \Pi) = (0,1,2)$$

$$r(w_2 | \Pi) = (0,1,3)$$

$$r(v_3 | \Pi) = (1,0,2)$$

$$r(w_3 | \Pi) = (2,0,2)$$

$$r(v_4 | \Pi) = (1,0,1)$$

$$r(w_4 | \Pi) = (1,1,0)$$

Karena representasi dari tiap-tiap simpul berbeda, maka Π merupakan partisi pembeda. Jadi diperoleh batas atas $pd(D(K_4)) \leq 3$. Berdasarkan Teorema 2.4.3, karena $3 \leq pd(D(K_4))$ dan $pd(D(K_4)) \leq 3$, maka $pd(D(K_4)) = 3$.

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2023/2024 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Tahapan Penelitian

Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah metode kajian Pustaka pada buku-buku dan jurnal-jurnal terkait dengan penelitian ini. Adapun Langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Menentukan dimensi partisi graf Bunga Aster
 - a. Menentukan batas bawah dimensi partisi dari graf Bunga Aster $D(K_n), n \geq 3$.
 - b. Menentukan batas atas dari $pd(D(K_n))$. Batas atas dari $pd(D(K_n))$ diperoleh dengan mengkonstruksi graf $D(K_n)$. Himpunan simpul-simpul pada graf $D(K_n)$ dikelompokkan dalam kelas partisi pembeda. Minimum banyaknya partisi pembeda itulah yang merupakan dimensi partisi dari graf Bunga Aster $D(K_n)$.
 - c. Jika batas atas dimensi partisi graf Bunga Aster $D(K_n) \leq n$ dan batas bawah dimensi partisi pada graf Bunga Aster $D(K_n) \geq n$, maka akan diperoleh dimensi partisi graf Bunga Aster adalah $pd(D(K_n)) = n$.

- d. Memformulasikan hasil yang didapatkan ke dalam pernyataan matematika.
 - e. Membuktikan hasil yang telah diperoleh lalu menarik kesimpulan.
2. Menentukan dimensi partisi graf barbel Bunga Aster
- a. Menentukan batas bawah dimensi partisi dari graf barbel Bunga Aster $B_{D(K_n)}, n \geq 3$. Karena graf barbel Bunga Aster $B_{D(K_n)}$ memuat dua graf Bunga Aster $D(K_n)$, maka batas bawah graf barbel Bunga Aster $B_{D(K_n)}$ sekurang-kurangnya sama dengan partisi pada graf Bunga Aster itu sendiri. Akan tetapi, jika batas bawah ini belum memenuhi, maka menggunakan pembuktian kontradiksi.
 - b. Menentukan batas atas dimensi partisi dari graf barbel Bunga Aster $B_{D(K_n)}$. Penentuan batas atas dilakukan dengan mengkonstruksi graf $B_{D(K_n)}$. Setiap simpul pada graf barbel Bunga Aster $B_{D(K_n)}$ dikelompokkan ke dalam himpunan-himpunan partisi pembeda. Minimum banyaknya partisi pembeda itulah yang merupakan dimensi partisi dari graf barbel Bunga Aster $B_{D(K_n)}$.
 - c. Jika batas atas dimensi partisi graf barbel Bunga Aster $B_{D(K_n)} \leq n$ dan batas bawah dimensi partisi pada graf barbel Bunga Aster $B_{D(K_n)} \geq n$, maka akan diperoleh dimensi partisi graf barbel Bunga Aster adalah $pd(B_{D(K_n)}) = n$.
 - d. Memformulasikan hasil yang didapatkan ke dalam pernyataan matematika.
 - e. Membuktikan hasil yang telah diperoleh lalu menarik kesimpulan.

V. SIMPULAN

5.1 Simpulan

Pada penelitian ini telah berhasil ditentukan bahwa dimensi partisi dari graf Bunga Aster, $pd(D(K_n))$ adalah 3 untuk $n = 3$, dan $\left(n - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right)$ untuk $n > 3$. Dimensi partisi dari graf barbel Bunga Aster $pd(B_{D(K_n)})$ adalah 4 untuk $n = 3, 4$ dan $\left(n - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right)$ untuk $n > 4$.

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan menentukan dimensi partisi untuk operasi lain pada graf Bunga Aster.

DAFTAR PUSTAKA

- Asmiati, Sadha, K., dan Yulianti, L. 2018. On the Locating Chromatic Number of Certain Barbell Graphs. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. **2018**: 1-5.
- Buhaerah, Busrah, Z., dan Sanjaya, H. 2022. *Teori Graf dan Aplikasinya*. Living Spiritual Quotient, Makassar.
- Chartrand, G., Salehi, E., dan Zhang, P. 1998. On The Partition Dimension of Graph. *Congressus Numerantium*. **130**: 157-168.
- Chartrand, G., Salehi, E., dan Zhang, P. 2000. The Partition Dimension of A Graph. *Aequationes Mathematicae*. **59**: 45-54.
- Darmaji. 2011. *Dimensi Partisi Graf Multipartit dan Graf Hasil Korona Dua Graf Terhubung*. Disertasi. Bandung: Institut Teknologi Bandung, Indonesia.
- Deo, N. 1974. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. Mineola, New York.
- Foulds, L. R. 1992. *Graph Teory Applications*. Springer Science, Business Media New York.

- Grigorious, C., Stephen, S., Rajan, B., Miller, M. dan William, A. 2014. On The Partition Dimension of A Class of Circulant Graphs. *Information Processing Letters*. **114(7)**: 353-356.
- Ida Bagus, K., Baskoro, E. T. 2015. Partition Dimension of Some Classes of Trees. *Procedia Computer Science*. **74**: 67-72.
- Junming, X. 2003. *Theory and Application of Graphs*. Kluwer Academic Publishers, United State.
- Sugeng, K. A., Johna, P., Lawrencea, M. L., Baca, M., dan Semanocova, A. 2023. Modular Irregularity Strength on Some Flower Graphs. *Electronic Journal of Graphs Theory and Applications*. **11(1)**: 27-38.
- Suryadi, H. S. 1996. *Teori Graf Dasar*. Gunadarma. Jakarta.