DERIVASI-n PADA RING MATRIKS $M_k(R)$

Skripsi

Oleh

ISTY RAFFI SASKIA RINI
NPM. 2117031042

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

ABSTRACT

n-DERIVATIONS ON MATRIX RINGS $M_k(R)$

By

Isty Raffi Saskia Rini

Given a ring R. The additive mapping $d : R \to R$ is called derivation if d satisfies Leibniz's rule, i.e., $d(ab) = d(a)b + ad(b)$, for every $a, b \in R$. The concept of n-derivation is not universal, but depends on the value of n and the specific algebraic context. This study proves that in a non-commutative $n!$-torsion free prime ring, there is no non-trivial symmetric n-derivation ($\Delta \neq 0$) if the trace is commutative. Moreover, this result shows that the derivation F preserves the commutator structure on the ideal I, which eventually forces R to be commutative. If ring R is a non-commutative ring then the condition $F([x, y]) = [x, y]$ is not satisfied because the commutator $[x, y]$ is not always zero in the non-commutative ring $M_2(\mathbb{R})$.

Keywords: n-derivation, derivation, rings, groups.

ABSTRAK

DERIVASI-n PADA RING MATRIKS $M_k(R)$

Oleh

Isty Raffi Saskia Rini

Diberikan ring R. Pemetaan aditif $d : R \to R$ disebut derivasi jika d memenuhi aturan Leibniz, yaitu, $d(ab) = d(a)b + ad(b)$ untuk setiap $a, b \in R$. Konsep derivasi-n tidak bersifat universal, melainkan bergantung pada nilai n dan konteks aljabar yang spesifik. Penelitian ini membuktikan bahwa dalam ring prima bebas torsi $n!$ yang non-komutatif, tidak ada derivasi-n simetrik yang tidak trivial($\Delta \neq 0$) jika *trace*-nya komutatif. Selain itu, hasil ini menunjukkan bahwa derivasi F mempertahankan struktur komutator pada ideal I, yang akhirnya memaksa R bersifat komutatif. Jika ring R merupakan ring non komutatif maka kondisi $F([x, y]) = [x, y]$ tidak terpenuhi karena komutator $[x, y]$ tidak selalu nol di ring non komutatif $M_2(\mathbb{R})$.

Kata-kata kunci: Derivasi-n, derivasi, ring, grup

DERIVASI-n PADA RING MATRIKS $M_k(R)$

ISTY RAFFI SASKIA RINI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

Judul Skripsi : **DERIVASI-n PADA RING MATRIKS $M_k(R)$**

Nama Mahasiswa : **Isty Raffi Saskia Rini**

Nomor Pokok Mahasiswa : **2117031042**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**
NIP 198406272006042001	NIP 198002062003121003

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	:	**Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**	…………
Sekretaris	:	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**	…………
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.**	…………

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **29 April 2025**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Isty Raffi Saskia Rini**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2117031042**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Derivasi-n pada ring matriks $M_k(R)$**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 29 April 2025

Penulis,

METERAI TEMPEL

SEPULUH RIBU RUPIAH

10000

35082AMX148294620

Isty Raffi Saskia Rini

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Isty Raffi Saskia Rini yang lahir di Bandar Lampung pada tanggal 11 Agustus 2003. Penulis merupakan putri kedua dari Bapak Sadrais dan Ibu Supriyati. Penulis memiliki kakak laki-laki bernama Muhammad Raffi Ramadhan dan adik laki-laki bernama Ahmad Raffi Al Fatah.

Penulis telah menyelesaikan pendidikan taman kanak-kanak di TK Perwanida 1 Bandar Lampung, sekolah dasar di SDN 1 Pecoh Raya, sekolah menengah pertama di MTsN 1 Bandar Lampung, dan sekolah menengah atas di MAN 2 Bandar Lampung.

Pada tahun 2021, penulis terdaftar sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN). Selain menjadi mahasiswa penulis aktif mengikuti kegiatan seperti menjadi wakil sekretaris umum di Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) periode 2022, Sekretaris Umum di Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) periode 2023, Dewan Pembina Organisasi (DPO) di Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) periode 2024.

Sebagai penerapan ilmu yang didapat, pada awal semester VI penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Badan Pendapatan Daerah Provinsi Lampung. Kemudian, pada awal semester VII penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata di Kelurahan Kemumu, Kecamatan Arma Jaya, Kabupaten Bengkulu Utara pada tanggal 1 Juli 2024 sampai dengan 16 Agustus 2024.

KATA INSPIRASI

"The beautiful thing about life, is that you can always change, grow and become better."

"And if you never bleed, you're never gonna grow."
Taylor Swift - The 1

"When your heart is feeling heavy and your mind is full of worry
don't forget you've made it this far."
Fearless Soul - Don't Worry (good things will come)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap Alhamdulillah dan syukur kepada Allah SWT atas nikmat serta hidayah-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan Bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Ayah dan Ibuku Tercinta

Terimakasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini. Terimakasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta
Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Derivasi-n pada ring matriks $M_k(R)$" dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing I yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

2. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

3. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.

4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

5. Ibu Dra. Dorrah Azis, M.Si. selaku dosen pembimbing akademik.

6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Ayah, Ibu, Mamas dan Adik yang senantiasa memberikan do'a dan motivasi kepada penulis.

8. Sahabat penulis sejak SMA diantaranya Adinda, Almira, Haniifah, Lintang, Martha, Nada, Qonita, Runi, dan Syifa yang telah banyak memberikan tawa dan selalu meluangkan waktu untuk saling membantu.

9. Teman seperjuangan dalam grup bukan sirkel biasa, diantaranya Retno Zahratunnisa, Safina Mujahidah dan Aini Shafira Rahmadini. Terimakasih sudah memberikan kesempatan untuk berada diantara kalian yang sangat membantu dan memotivasi selama berada di bangku perkuliahan.

10. Pimpinan HIMATIKA Periode 2023, terimakasih banyak karena sudah menjadi pimpinan yang sangat keren luar biasa.

11. Rekan seperjuangan skripsi, diantaranya Dania Azzahra, Desi Elena Sitompul, Ditha Lathifatul Mursyidah, Nadia Amalia Syaharani, Nafdhatulil Sholeha, Rena Puspita Angelika dan Retno Zahratunnisa. Terimakasih sudah bersama-sama menyelesaikan ini

12. Teman-teman seperjuangan Jurusan Matematika angkatan 2021.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 29 April 2025

Isty Raffi Saskia Rini

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI . . . . **xiii**

DAFTAR GAMBAR . . . . **xiv**

I PENDAHULUAN **1**

1.1 Latar Belakang Masalah 1

1.2 Tujuan Penelitian 2

1.3 Manfaat Penelitian 2

II TINJAUAN PUSTAKA **3**

2.1 Permutasi 3

2.2 Matriks 5

2.3 Grup 8

2.4 Ring 9

2.5 Ideal 12

2.6 Derivasi 14

2.7 Derivasi *Inner* 16

2.8 Derivasi-n 17

III METODE PENELITIAN **19**

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian 19

3.2 Metode Penelitian 19

IV HASIL DAN PEMBAHASAN **21**

4.1 Derivasi-n untuk $n = 2$ 21

4.2 Derivasi-n untuk $n = 3$ 29

4.3 Sifat-sifat derivasi$-n$ 43

4.3.1 Derivasi-n 44

4.3.2 *Trace* δ dari Δ 45

V KESIMPULAN DAN SARAN **52**

5.1 Kesimpulan 52

5.2 Saran 52

DAFTAR PUSTAKA **54**

DAFTAR GAMBAR

3.1 Diagram tahapan penelitian 20

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Derivasi merupakan salah satu konsep dalam matematika yang awalnya dikembangkan untuk menganalisis suatu perubahan dalam kalkulus. Pada abad ke-17 derivasi pertama kali dikenalkan oleh Isaac Newton dan Gottfried Wilhelm Leibniz untuk mempelajari kecepatan perubahaan dalam suatu fungsi. Seiring berjalannya waktu, konsep derivasi tidak hanya berkembang di bidang analisis tetapi di bidang aljabar juga. Pengembangan konsep derivasi dalam suatu aljabar diterapkan pada struktur yang lebih kompleks seperti pada ring.

Derivasi pada ring adalah suatu konsep dalam aljabar abstrak yang berkaitan dengan fungsi. Pada awal abad ke-20 derivasi pada ring didefinisikan sebagai suatu fungsi d dari ring R yang memetakan ke dirinya sendiri, serta memenuhi sifat-sifat tertentu yaitu sifat aditif dimana untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $d(a + b) = d(a) + d(b)$ dan aturan Leibniz yaitu dimana untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $d(ab) = d(a)b + ad(b)$ (Ali dkk., 2024). Sifat ini menyerupai aturan produk dalam turunan kalkulus yang menjelaskan bagaimana derivasi berperilaku terhadap penjumlahan dan perkalian elemen dalam ring. Salah satu derivasi yang sudah semakin berkembang adalah derivasi-n pada ring yang merupakan generalisasi dari konsep derivasi biasa menggunakan peta linear-n. Suatu derivasi-n d pada R adalah fungsi $d : R^n \to R$ yang memenuhi sifat aditif dan aturan Leibniz (Park, 2009).

Derivasi-n pada ring sebelumnya sudah pernah dibahas oleh beberapa peneliti dengan fokus yang beragam. Park (2009) membahas terkait ring prima dan semiprima dengan derivasi-n simetris. Kemudian Atteya (2019) membahas terkait jenis-jenis baru dari derivasi-n permutasi pada suatu ring assosiatif. Selanjutnya, Bodaghi & Feizabadi (2022) membahas terkait multi-derivasi dan beberapa perkiraan. Liang & Zhao (2023) yang membahas terkait bi-Lie derivasi-n pada ring segitiga. Aroonruviwat & Leerawat (2021) membahas terkait *On outer* $(\sigma, \tau) - n-$ *derivations and commutativity in prime near-ring*. Selanjutnya penelitian terbaru oleh (Ali dkk., 2024) yang membahas terkait berbagai jenis derivasi pada ring dalam suatu konteks teori aljabar salah satu yang dibahas mengenai derivasi-n.

Pada penelitian sebelumnya belum ada peneliti yang membahas terkait derivasi-n pada ring matriks $M_k(R)$. Oleh karena itu, penelitian ini akan membahas bagaimana derivasi-n bekerja pada suatu ring matriks $M_k(R)$ dengan $n = 2, 3$.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini yaitu:

1. mengkontruksi contoh-contoh derivasi-n pada ring matriks;
2. menyelidiki sifat-sifat derivasi-n pada ring matriks;
3. memberikan contoh ilustrasi dari sifat-sifat yang didapat.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini yaitu:

1. menambah pengetahuan dan pemahaman mengenai derivasi-n pada ring matriks;
2. menambah pengetahuan mengenai sifat-sifat dari derivasi-n pada ring matriks.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai definisi-definisi yang akan membantu dalam penelitian ini. Berikut beberapa definisi-definisi yang akan dibahas antara lain yaitu permutasi, matriks, grup, ring, derivasi dan derivasi-n.

2.1 Permutasi

Pada bagian ini membahas mengenai definisi permutasi.

Definisi 2.1.1 Diberikan himpunan tak kosong S, dan pemetaan bijektif α dari himpunan S ke S itu sendiri. Suatu permutasi bijektif berarti setiap elemen di S dipetakan ke elemen S yang berbeda tanpa pengulangan. Misalkan $S = \{1, 2, 3, ..., n\}$, merupakan permutasi yang dapat dinotasikan sebagai S_n dapat ditulis sebagai berikut:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) & ... & \alpha(n) \end{pmatrix}.$$

(Wahyuni dkk., 2023).

Berikut diberikan contoh terkait permutasi.

Contoh 2.1.2 Diberikan himpunan $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Permutasi yang mungkin pada himpunan S_4 yaitu:

1. $\alpha(1) = 1, \alpha(2) = 2, \alpha(3) = 3, \alpha(4) = 4.$
2. $\alpha(1) = 1, \alpha(2) = 2, \alpha(3) = 4, \alpha(4) = 3.$
3. $\alpha(1) = 1, \alpha(2) = 3, \alpha(3) = 2, \alpha(4) = 4.$
4. $\alpha(1) = 1, \alpha(2) = 3, \alpha(3) = 4, \alpha(4) = 2.$

5. $\alpha(1) = 1, \alpha(2) = 4, \alpha(3) = 2, \alpha(4) = 3.$
6. $\alpha(1) = 1, \alpha(2) = 4, \alpha(3) = 3, \alpha(4) = 2.$
7. $\alpha(1) = 2, \alpha(2) = 1, \alpha(3) = 3, \alpha(4) = 4.$
8. $\alpha(1) = 2, \alpha(2) = 1, \alpha(3) = 4, \alpha(4) = 3.$
9. $\alpha(1) = 2, \alpha(2) = 3, \alpha(3) = 1, \alpha(4) = 4.$
10. $\alpha(1) = 2, \alpha(2) = 3, \alpha(3) = 4, \alpha(4) = 1.$
11. $\alpha(1) = 2, \alpha(2) = 4, \alpha(3) = 1, \alpha(4) = 3.$
12. $\alpha(1) = 2, \alpha(2) = 4, \alpha(3) = 3, \alpha(4) = 1.$
13. $\alpha(1) = 3, \alpha(2) = 1, \alpha(3) = 2, \alpha(4) = 4.$
14. $\alpha(1) = 3, \alpha(2) = 1, \alpha(3) = 4, \alpha(4) = 2.$
15. $\alpha(1) = 3, \alpha(2) = 2, \alpha(3) = 1, \alpha(4) = 4.$
16. $\alpha(1) = 3, \alpha(2) = 2, \alpha(3) = 4, \alpha(4) = 1.$
17. $\alpha(1) = 3, \alpha(2) = 4, \alpha(3) = 1, \alpha(4) = 2.$
18. $\alpha(1) = 3, \alpha(2) = 4, \alpha(3) = 2, \alpha(4) = 1.$
19. $\alpha(1) = 4, \alpha(2) = 1, \alpha(3) = 3, \alpha(4) = 2.$
20. $\alpha(1) = 4, \alpha(2) = 1, \alpha(3) = 2, \alpha(4) = 3.$
21. $\alpha(1) = 4, \alpha(2) = 2, \alpha(3) = 1, \alpha(4) = 3.$
22. $\alpha(1) = 4, \alpha(2) = 2, \alpha(3) = 3, \alpha(4) = 1.$
23. $\alpha(1) = 4, \alpha(2) = 3, \alpha(3) = 1, \alpha(4) = 2.$
24. $\alpha(1) = 4, \alpha(2) = 3, \alpha(3) = 2, \alpha(4) = 1.$

Jumlah permutasinya adalah $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$
Permutasi S_4 dapat ditulis sebagai berikut:
$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},$
$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \alpha_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},$

$\alpha_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \alpha_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \alpha_9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$
$\alpha_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \alpha_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \alpha_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$
$\alpha_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \alpha_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \alpha_{15} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$
$\alpha_{16} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \alpha_{17} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \alpha_{18} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix},$
$\alpha_{19} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \alpha_{20} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \alpha_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$
$\alpha_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \alpha_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \alpha_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$
Penulisan matriks dapat dipersingkat sebagai berikut $\alpha_2 = (4, 3)$ dan $\alpha_9 = (2, 3, 1, 4)$.

2.2 Matriks

Matriks adalah sekumpulan bilangan yang disusun berdasarkan baris dan kolom. Suatu matriks diberi nama dengan menggunakan huruf kapital seperti A, B, C, dan seterusnya, sedangkan anggotanya dinyatakan dengan huruf kecil. Berikut diberikan definisi matriks.

Definisi 2.2.1 Matriks merupakan himpunan skalar (bilangan riil atau kompleks) yang disusun secara empat persegi panjang menurut baris-baris dan kolom-kolom (Indriati, 2019).

Matriks umumnya dinotasikan dengan huruf kapital, misalnya matriks A dengan ukuran $m \times n$ memiliki m baris dan n kolom. Matriks A dinyatakan sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

dengan a_{ij} merupakan elemen matriks pada baris i dan kolom j.

Selanjutnya, dijelaskan mengenai operasi pada matriks.

1. Penjumlahan matriks.

   Dua matriks dapat dijumlahkan jika keduanya memiliki ukuran yang sama.

   Contoh 2.2.2 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$.

   Diperoleh:

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

   Contoh 2.2.3 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. Matriks $A + B$ tidak terdefinisi karena ukuran matriks A dan B tidak sama.

2. Perkalian skalar matriks.

   Perkalian skalar matriks merupakan proses mengalikan setiap elemen dalam matriks dengan suatu skalar (bilangan real atau kompleks). Diberikan matriks A dan skalar k, maka hasil perkalian skalar kA didefinisikan sebagai:

$$kA = \begin{bmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & ... & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & ... & k \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ k \cdot a_{m1} & k \cdot a_{m2} & ... & k \cdot a_{mn} \end{bmatrix},$$

   dengan a_{ij} merupakan elemen-elemen dalam matriks A pada baris ke-i dan kolom ke-j.

   Contoh 2.2.4 Diberikan matriks $A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan $k = 3$, maka:

$$3A = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}.$$

3. Perkalian matriks.

   Perkalian matriks merupakan operasi antara dua matriks A dan B dikalikan untuk menghasilkan matriks baru yaitu matriks C. Matriks A dan B harus memiliki jumlah kolom dan baris yang sama agar perkalian dapat dilakukan. Jika matriks A berukuran $m \times n$ dan matriks B berukuran $n \times p$, maka matriks $C = A \cdot B$ akan menjadi matriks berukuran $m \times p$.

   Contoh 2.2.5 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, maka: perkalian $AB = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$.

Setelah memahami operasi-operasi dasar pada matriks seperti penjumlahan, perkalian skalar, dan perkalian matriks dapat disimpukan bahwa:

1. Operasi penjumlahan matriks berlaku hukum komutatif $A + B = B + A$ jika kedua matriks berukuran sama.

2. Operasi penjumlahan matriks berlaku hukum asosiatif $(A+B)+C = A+(B+C)$ jika kedua matriks berukuran sama.

3. Berlaku hukum distributif dengan skalar k, sehingga $k(A + B) = kA + kB$.

4. Operasi perkalian matriks tidak berlaku hukum komutatif sedemikian sehingga $AB \neq BA$.

5. Berlaku hukum asosiatif terhadap operasi perkalian matriks sehingga $(AB)C = A(BC)$.

6. Jika AB merupakan matriks nol, maka kemungkinannya;

   a. $A = 0$ dan $B = 0$

   b. $A = 0$ atau $B = 0$

   c. $A \neq 0$ dan $B \neq 0$

7. Jika $AB = AC$ belum tentu $A = B$.

2.3 Grup

Sebelum membahas terkait definisi dari grup, akan dibahas terlebih dahulu mengenai definisi operasi biner sebagai dasar pembentukan grup.

Definisi 2.3.1 Diberikan himpunan tak kosong S dan $a, b \in S$. Operasi biner " $*$ " pada himpunan tak kosong S merupakan fungsi yang menghubungkan setiap pasangan berurut (a, b) dari elemen-elemen himpunan S ke elemen lain yang berada dalam S. Dengan kata lain, $* : S \times S \to S$ untuk setiap $a, b \in S$ (Ayres dan Jaisingh, 2004).

Contoh 2.3.2 Diberikan contoh operasi biner sebagai berikut:

1. Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan operasi binernya yaitu penjumlahan $(+)$. Operasi $+$ dinyatakan sebagai suatu fungsi dari $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ untuk setiap $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, maka $(a + b) \in \mathbb{Z}$, dan penjumlahan dari dua bilangan bulat akan menghasilkan bilangan bulat lagi. Dengan kata lain, yaitu operasi $+$ tertutup di $\mathbb{Z}$.

2. Operasi pembagian $(:)$ pada himpunan bilangan $\mathbb{R}$ bukan merupakan operasi biner dikarenakan $\frac{a}{b}$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ tidak akan terdefinisi jika $b = 0$.

Selanjutnya akan dijelaskan mengenai grup.

Definisi 2.3.3 Suatu grup $\langle G, * \rangle$ merupakan himpunan G yang dilengkapi dengan operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut:

(1) Operasi $*$ bersifat tertutup, yaitu jika $a * b \in G$ untuk setiap $a, b \in G$;

(2) Operasi $*$ bersifat assosiatif, yaitu jika $(a * b) * c = a * (b * c)$ untuk setiap $a, b, c \in G$;

(3) Terdapat elemen identitas di G yaitu $e \in G$ sehingga

$$e * x = x * e = x$$

untuk setiap $x \in G$;

(4) Untuk setiap $a \in G$, terdapat $a' \in G$ sehingga $a * a' = a' * a = e$

(Fitriani & Faisol, 2022).

Berikut diberikan contoh mengenai grup.

Contoh 2.3.4 Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan operasi biner penjumlahan $+$. Akan ditunjukkan bahwa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup.

1. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, berlaku $a + b \in \mathbb{Z}$.
2. Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$, berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3. Dalam penjumlahan elemen identitasnya adalah 0 karena $a + 0 = 0 + a = a$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$.
4. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, terdapat $-a \in \mathbb{Z}$, sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (elemen identitas).

Jadi $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup.

Selanjutnya akan dibahas mengenai grup Abel atau dikenal sebagai grup komutatif.

Definisi 2.3.5 Grup $\langle G, * \rangle$ dinamakan grup Abel atau grup komutatif jika operasi $*$ bersifat komutatif yaitu:

$$g * h = h * g,$$

untuk setiap $g, h \in G$ (Fitriani & Faisol, 2022).

Berikut diberikan contoh terkait grup Abel atau grup komutatif.

Contoh 2.3.6 Grup $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ dengan $+$ merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$. Untuk setiap $g, h \in \mathbb{Z}$, berlaku $g + h = h + g$. Oleh karena itu, $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup komutatif.

2.4 Ring

Setelah memahami definisi dari grup dan grup komutatif selanjutnya akan dibahas mengenai definisi dari ring. Berikut diberikan definisi ring.

Definisi 2.4.1 Diberikan himpunan tak kosong R dan pada R didefinisikan dua operasi biner yang dinotasikan dengan $(+)$ dan $(\cdot)$. Himpunan R disebut ring terhadap operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$ jika memenuhi sifat-sifat berikut:

(i) $\langle R, + \rangle$ merupakan grup komutatif.

(ii) Operasi $\cdot$ di R bersifat assosiatif yaitu:

$$(r_1 \cdot r_2) \cdot r_3 = r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3),$$

untuk setiap $r_1, r_2, r_3 \in R$

(iii) Operasi penjumlahan dan perkalian di R bersifat:

(a) distributif kiri, yaitu:

$$r_1 \cdot (r_2 + r_3) = (r_1 \cdot r_2) + (r_1 \cdot r_3),$$

untuk setiap $r_1, r_2, r_3 \in R$

(b) distributif kanan, yaitu:

$$(r_1 + r_2) \cdot r_3 = (r_1 \cdot r_3) + (r_2 \cdot r_3),$$

untuk setiap $r_1, r_2, r_3 \in R$

$\langle R, +, \cdot \rangle$ merupakan notasi ring R terhadap operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$. Definisi ring merupakan abstraksi dari sifat-sifat yang dimiliki oleh himpunan semua bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan dan perkalian bilangan bulat (Wahyuni dkk., 2021).

Berikut diberikan contoh terkait definisi ring.

Contoh 2.4.2 Diberikan $\mathbb{Z}$ merupakan himpunan bilangan bulat dengan $(+)$ merupakan operasi penjumlahan dan $(\cdot)$ merupakan operasi perkalian, dapat diselidiki sesuai dengan Definisi 2.4.1 bahwa:

(i.) $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup komutatif.

(ii.) Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$, berlaku:

1. Sifat distributif kiri: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.
2. Sifat distributif kanan: $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.

Jadi $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

Selanjutnya diberikan definisi terkait ring komutatif.

Definisi 2.4.3 Ring komutatif merupakan bentuk khusus dari ring, yang memenuhi sifat komutatif terhadap perkaliannya yaitu $a \cdot b = b \cdot a$ untuk setiap $a, b \in R$ maka R disebut ring komutatif (Setiawan, 2014).

Diberikan contoh ring komutatif sebagai berikut.

Contoh 2.4.4 Ring $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, berlaku $a \cdot b = b \cdot a$. Oleh karena itu, operasi $\cdot$ bersifat komutatif di $\mathbb{Z}$. Bisa dikatakan $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ merupakan ring komutatif.

Selanjutnya diberikan definisi *center* dari ring.

Definisi 2.4.5 Diberikan ring R, *center* dari R adalah $Z(R)$ yang didefinisikan oleh

$$Z(R) = \{z \in R \mid zx = xz, \forall x \in R\}$$

(Persulessy & Mahmud, 2013).

Definisi 2.4.6 Suatu elemen $r \in R$ dikatakan elemen torsi jika terdapat bilangan bulat positif n sehingga $n \cdot r = 0$, dengan $n \cdot r$ didefinisikan sebagai penjumlahan r sebanyak n kali (Keating, 1998).

Definisi 2.4.7 $r \in R$ dikatakan sebagai elemen 2-torsi jika $2 \cdot r = 0$ (Keating, 1998).

Definisi 2.4.8 Ring dikatakan bebas 2-torsi jika tidak terdapat elemen tak nol $r \in R$ yang memenuhi $2 \cdot r = 0$ (Keating, 1998).

Contoh 2.4.9 Berikut diberikan contoh ring dan elemen torsinya.

1. Ring $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ yang beranggotakan $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ merupakan contoh ring bebas 2-torsi karena $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ tidak memiliki elemen selain nol yang menjadi nol ketika dikalikan dengan 2.

2. Ring $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ yang beranggotakan $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ bukan merupakan ring bebas 2-torsi karena didalamnya terdapat elemen $r = \overline{2}$ di $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ yang memenuhi $\overline{2r} = \overline{0}$, tetapi $r \neq \overline{0}$. Ini berarti $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ bukan merupakan ring bebas 2-torsi.

Definisi 2.4.10 Ring R merupakan prima jika memenuhi

$$(\forall a, b \in R)[aRb = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0)]$$

(Persulessy & Mahmud, 2013).

Selanjutnya diberikan contoh ring prima.

Contoh 2.4.11 Diberikan ring komutatif R yang tidak memuat pembagi nol sejati dan $a \in R$ dengan $ax = 0$, untuk setiap $x \in R$. Akan ditunjukkan bahwa R ring prima. Diketahui bahwa $ax = 0$, untuk setiap $x \in R$. Dengan mengalikan kedua ruas dengan $b \in R$ dari kanan akan diperoleh

$$axb = 0.$$

Karena R ring komutatif, berlaku

$$abx = 0 \cdot x$$

$$ab = 0.$$

Karena R ring yang tidak memuat pembagi nol sejati dapat diperoleh

$$a = 0 \vee b = 0.$$

Jadi R merupakan ring prima.

2.5 Ideal

Selanjutnya akan dijelaskan tentang ideal. I dikatakan ideal jika memenuhi aksioma-aksioma yang diberikan pada Definisi 2.5.1.

Definisi 2.5.1 Diberikan ring R, dan I dikatakan ideal dari ring R jika memenuhi dua aksioma yaitu:

1. untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a - b \in I$ (tertutup terhadap penjumlahan dan pengurangan);
2. untuk setiap $r \in R$ dan $a \in I$, berlaku $r \cdot a \in I$ dan $a \cdot r \in I$

(Dummit dan Foote, 2004).

Berikut diberikan contoh dari ideal.

Contoh 2.5.2 Diberikan $I = 2\mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan bahwa I merupakan ideal $\mathbb{Z}$.

1. Diberikan sebarang $a, b \in 2\mathbb{Z}$ maka $a = 2p$ dan $b = 2q$ untuk setiap $p, q \in \mathbb{Z}$, diperoleh yaitu:

$$a + b = 2p + 2q = 2(p + q).$$

   Karena $p + q \in \mathbb{Z}$ maka $a + b \in 2\mathbb{Z}$, sehingga ideal I tertutup terhadap penjumlahan.

2. Diberikan $a \in 2\mathbb{Z}$ dan $r \in \mathbb{Z}$, maka $a = 2p$ untuk setiap $m \in \mathbb{Z}$, diperoleh yaitu:

$$r \cdot a = r \cdot 2p = 2(r \cdot p).$$

   Karena $r \cdot p \in \mathbb{Z}$, maka $r \cdot a \in 2\mathbb{Z}$ maka ideal I tertutup terhadap perkalian elemen di $\mathbb{Z}$.

Selanjutnya akan diberikan definisi terkait ideal tak nol.

Definisi 2.5.3 Ideal tak nol dalam lapangan F adalah ideal yang mengandung setidaknya satu elemen $a \in I$ dengan $a \neq 0$ (Hungerford, 1974).

Berikut diberikan contoh ideal tak nol.

Contoh 2.5.4 Diberikan $I = \langle x^3 + 1 \rangle$ merupakan himpunan semua polinomial yang habis dibagi oleh $x^3 + 1$ yaitu:

$$I = \{(x^3 + 1) \cdot f(x) | f(x) \in F[x]\}.$$

Akan dibuktikan bahwa $I = \langle x^3 + 1 \rangle$ adalah ideal atas $F[x]$.

1. Diberikan sebarang $a(x), b(x) \in \langle x^3 + 1 \rangle$, maka $a(x) = (x^3 + 1) \cdot f(x)$ dan $b(x) = (x^3 + 1) \cdot g(x)$ untuk suatu $f(x), g(x) \in F[x]$. Diperoleh:

$$a(x) + b(x) = (x^3 + 1) \cdot f(x) + (x^3 + 1) \cdot g(x) = (x^3 + 1) \cdot (f(x) + g(x)).$$

   Karena $f(x) + g(x) \in F[x]$, maka $a(x), b(x) \in \langle x^3 + 1 \rangle$ sehingga terbukti ideal $(x^3 + 1)$ tertutup terhadap penjumlahan.

2. Diberikan sebarang $a(x) \in \langle x^3 + 1 \rangle$ dan $r(x) \in F[x]$, maka $a(x) = (x^3 + 1) \cdot f(x)$ untuk suatu $f(x) \in F[x]$, diperoleh:

$$r(x) \cdot a(x) = r(x) \cdot ((x^3 + 1) \cdot f(x)) = (x^3 + 1) \cdot (r(x) \cdot f(x)).$$

Karena $r(x) \cdot f(x) \in F[x]$ maka $r(x) \cdot a(x) \in \langle x^3 + 1 \rangle$. Jadi terbukti $\langle x^3 + 1 \rangle$ tertutup terhadap perkalian dengan elemen di $F[x]$.

Jadi, $I = \langle x^3 + 1 \rangle$ merupakan ideal tak nol $F[x]$.

2.6 Derivasi

Setelah memahami definisi dari grup dan ring selanjutnya akan dibahas mengenai derivasi.

Definisi 2.6.1 Derivasi pada ring R didefinisikan sebagai pemetaan $d : R \to R$ yang memenuhi sifat aditif dan memenuhi aturan Leibniz.

1. Sifat aditif yaitu untuk setiap $a, b \in R$ berlaku:

$$d(a + b) = d(a) + d(b).$$

2. Aturan Leibniz yaitu untuk setiap $a, b \in R$ berlaku:

$$d(ab) = d(a)b + ad(b).$$

Pemetaan d disebut sebagai derivasi pada R (Ali dkk., 2024).

Diberikan contoh derivasi sebagai berikut.

Contoh 2.6.2 Diberikan ring $M_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$. Didefinisikan pemetaan $d : M_2(\mathbb{Z}) \to M_2(\mathbb{Z})$ dan $d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix}$ untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$. Akan ditunjukkan pemetaan d merupakan derivasi.

1. Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ c & e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$, berlaku:

$$\begin{aligned} d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}\right) &= d\left(\begin{bmatrix} a+i & b+j \\ c+k & e+l \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(b+j) \\ c+k & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -b-j \\ c+k & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -j \\ k & 0 \end{bmatrix} \\ &= d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & e \end{bmatrix}\right) + d\left(\begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Jadi, pemetaan d bersifat aditif.

2. Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ c & e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$, berlaku:

$$\begin{aligned} d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}\right) &= d\left(\begin{bmatrix} ai+bk & aj+bl \\ ci+ek & cj+el \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(aj+bl) \\ ci+ek & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -bl \\ ci & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -aj \\ ek & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -bk & -bl \\ ci & cj \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bk & -aj \\ ek & -cj \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -j \\ k & 0 \end{bmatrix} \\ &= d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & e \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & e \end{bmatrix} d\left(\begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Jadi, pemetaan d memenuhi aturan Leibniz.

Karena telah memenuhi sifat aditif dan aturan Leibniz bisa dikatakan pemetaan d merupakan derivasi (Ernanto, 2018).

Diberikan contoh lain yang bukan derivasi.

Contoh 2.6.3 Diberikan ring $\mathbb{Z}$ dan pemetaan $d : R \rightarrow R$ yang didefinisikan oleh $d(a) = a^2 - 1$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$. Akan diperiksa apakah d memenuhi sifat derivasi.

1. Pilih $4, 5 \in \mathbb{Z}$, berlaku:
   Pada ruas kiri:
   $$d(4 + 5) = (4 + 5)^2 - 1 = (9)^2 - 1 = 80.$$
   Pada ruas kanan:
   $$d(4) + d(5) = (4)^2 - 1 + (5)^2 - 1 = 4^2 - 1 + 5^2 - 1 = 15 + 24 = 39.$$
   Jelas bahwa kedua ruas tidak sama karena:
   $$d(4 + 5) = 90 \neq 39 = d(4) + d(5).$$
   Karena kedua ruas tidak sama artinya d tidak bersifat aditif. Jadi, pemetaan d bukan derivasi pada ring $\mathbb{Z}$.

2.7 Derivasi *Inner*

Derivasi *inner* merupakan jenis derivasi pada suatu ring atau aljabar, dimana derivasi *inner* didefinisikan sebagai operasi yang terbentuk dari komutator dengan elemen tetap dari ring tersebut.

Lemma 2.7.1 Diberikan sebarang ring R dengan elemen satuan. Untuk setiap $a \in R$ dapat didefinisikan derivasi $d_a : R \rightarrow R$ dengan definisi $d_a(y) = ay - ya$ untuk setiap $y \in R$. Selanjutnya, derivasi d_a disebut derivasi *inner* pada R (Ernanto, 2018).

Berikut diberikan contoh derivasi *inner*.

Contoh 2.7.2 Diberikan ring matriks $M_2(\mathbb{Z})$ dan pemetaan $d(A) = BA - AB$ dengan $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Akan diperiksa apakah d merupakan derivasi *inner*.

1. Diberikan sebarang $X, Y \in M_2(\mathbb{Z})$, berlaku:

$$\begin{aligned} d(X+Y) &= B(X+Y) - (X+Y)B \\ &= BX + BY - XB - YB \\ &= BX - XB + BY - YB \\ &= d(X) + d(Y). \end{aligned}$$

   Jelas bahwa d memenuhi sifat aditif.

2. Diberikan sebarang $X, Y \in M_2(\mathbb{Z})$, berlaku:
   Pada ruas kiri:

$$d(XY) = B(XY) - (XY)B.$$

   Pada ruas kanan:

$$\begin{aligned} d(X)Y + Xd(Y) &= (BX - XB)Y + X(BY - YB) \\ &= (BX)Y - (XB)Y + X(BY) - X(YB) \\ &= (BX)Y - X(YB). \end{aligned}$$

   Jelas bahwa d memenuhi aturan Leibniz.

Jadi, derivasi $d = d_A$ merupakan derivasi pada $M_2(\mathbb{Z})$.

2.8 Derivasi-n

Derivasi-n pertama kali diperkenalkan oleh Kyoo-Hong Park pada tahun 2009. Selanjutnya akan diberikan definisi derivasi-n.

Definisi 2.8.1 Misalkan $n \geq 2$ adalah suatu bilangan bulat positif dan $R^n = R \times R \times \ldots \times R$. Suatu pemetaan $\Delta : R^n \to R$ dikatakan simetris (atau permutasi) jika persamaan $\Delta = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Delta(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(n)})$ berlaku untuk setiap $x_i \in R$ dan untuk setiap permutasi $\{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)\}$ (Park, 2009).

Berikut diberikan definisi lain dari derivasi-n.

Definisi 2.8.2 Misalkan $n \geq 2$ adalah sebuah bilangan bulat positif yang tetap. Suatu pemetaan aditif$-n$ $\Delta : R^n \to R$ (yaitu, aditif di setiap komponen) disebut derivasi ke-n jika memenuhi sifat aditif dan memenuhi aturan Leibniz sebagai berikut:

1. Sifat aditif pada setiap komponennya, yaitu:

$$\begin{aligned}
\Delta(x_1 + x_1', x_2, \ldots, x_n) &= \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \Delta(x_1', x_2, \ldots, x_n);\\
\Delta(x_1, x_2 + x_2', \ldots, x_n) &= \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \Delta(x_1, x_2', \ldots, x_n);\\
&\vdots\\
\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n + x_n') &= \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n').
\end{aligned}$$

2. Aturan Leibniz pada setiap komponennya, yaitu:

$$\begin{aligned}
\Delta(x_1 x_1', x_2, \ldots, x_n) &= \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)x_1' + x_1\Delta(x_1', x_2, \ldots, x_n);\\
\Delta(x_1, x_2 x_2', \ldots, x_n) &= \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)x_2' + x_2\Delta(x_1, x_2', \ldots, x_n);\\
&\vdots\\
\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n x_n') &= \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)x_n' + x_n\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n'),
\end{aligned}$$

berlaku untuk setiap $x_i, x_i' \in R$
Derivasi-n berperilaku seperti derivasi biasa di setiap komponen. Pada definisi derivasi-n, jika menambahkan syarat Δ menjadi simetris, maka akan diperoleh derivasi yang disebut sebagai derivasi-n simetris, karena sifat simetris dari Δ akan setara satu sama lain dan validitas dari salah satu akan memberikan identitas yang lainnya (Park, 2009).

Definisi 2.8.3 Suatu pemetaan $\delta : R \rightarrow R$ disebut sebagai $trace$ dari suatu pemetaan simetris n-aditif Δ dan didefinisikan oleh $\delta(x) = \Delta(x, x, ..., x)$, untuk setiap $x \in R$ (Ali dkk., 2024).

$Trace$ derivasi-n simetris memiliki peran penting karena membantu menjembatani kesenjangan antara derivasi-n dan derivasi biasa. Hal ini menjadi berguna ketika menggeneralisasi hasil-hasil yang telah dibuktikan untuk derivasi dengan derivasi-n.

BAB III

METODE PENELITIAN

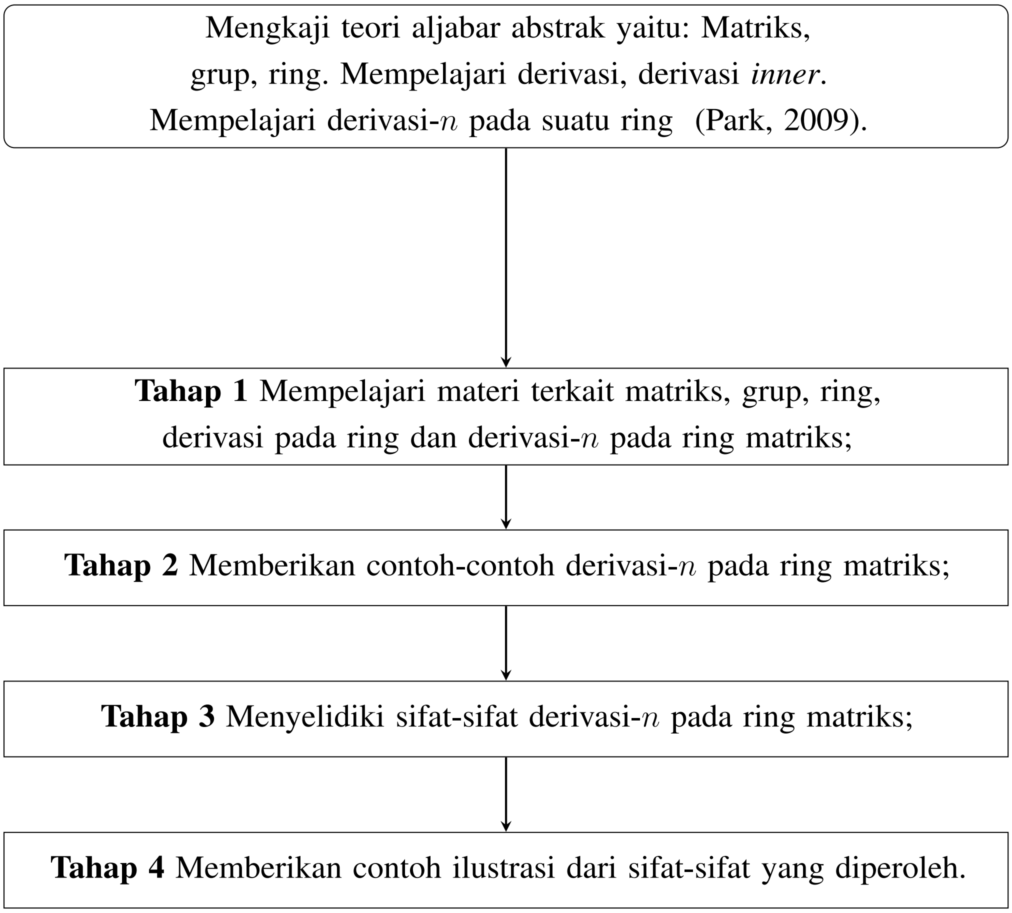
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2024/2025 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan penulis yaitu studi literatur untuk mengumpulkan dan mengolah informasi terkait penelitian berdasarkan referensi dari artikel, jurnal, dan buku. Berikut langkah-langkah penelitian.

1. Mempelajari materi matriks, grup, ring, derivasi pada ring dan derivasi-n pada ring.
2. Memberikan contoh-contoh derivasi-n pada ring matriks.
3. Menyelidiki sifat-sifat derivasi-n pada ring matriks.
4. Memberikan contoh ilustrasi dari sifat-sifat yang diperoleh.



Gambar 3.1 Diagram tahapan penelitian

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa konsep derivasi-n tidak dapat dianggap universal, melainkan harus diverifikasi untuk setiap nilai n dan konteks aljabar yang spesifik. Derivasi-2 pada ring matriks $M_k(R)$ berhasil dikontruksi, seperti pemetaan Δ yang memenuhi sifat aditif dan memenuhi aturan Leibniz pada setiap komponennya. Derivasi trivial $(d = 0)$ dan derivasi *inner* juga memenuhi syarat sebagai derivasi-2. Beberapa contoh derivasi-3 juga dikontruksi, seperti pemetaan Δ yang memenuhi sifat aditif dan memenuhi aturan Leibniz pada setiap komponennya. Namun, terdapat contoh lain yang gagal memenuhi aturan Leibniz. Hal ini menunjukkan bahwa tidak semua pemetaan multivariabel dapat menjadi derivasi-3. Dalam penelitian ini menunjukkan bahwa tidak ada sifat derivasi-n simetrik yang tidak trivial (yaitu, $\Delta \neq 0$) jika *trace* komutatif. Kemudian, dalam konteks ring prima dengan ideal tak nol I suatu derivasi F yang terkait dengan derivasi tak nol d mempertahankan komutator $[x, y]$ yaitu $F([x, y]) = [x, y]$ mengimplikasikan bahwa ring R harus komutatif ini menunjukkan bahwa F mempertahankan struktur komutator pada ideal I, yang memaksa R menjadi komutatif. jika ring R merupakan ring non komutatif maka kondisi $F([x, y]) = [x, y]$ tidak terpenuhi karena komutator $[x, y]$ tidak selalu nol di ring non komutatif $M_2(\mathbb{R})$.

5.2 Saran

Penelitian ini masih perlu mengkaji lebih dalam terkait struktur derivasi-n untuk $n = 3$ yang tidak valid dalam suatu ring matriks dengan menyelidiki lebih khusus sifat-sifat seperti asosiativitas, komutativitas yang memengaruhi validitas derivasi-n. Penelitian selanjutnya juga dapat mencari kondisi ataupun batasan tambahan yang dapat membuat derivasi-n berlaku untuk $n > 2$. Penelitian selanjutnya dapat mengidentifikasi terkait derivasi-n simetrik pada jenis ring lain, apakah kesimpulannya tetap serupa ($\Delta = 0$) tetap berlaku.

DAFTAR PUSTAKA

Ali, S., Rafiquee, N. N., & Varshney, V. (2024). Certain Types of Derivations in Rings: A Suvey. *Journal Indonesia Math. Soc*. Vol 30. 2:256-306.

Aroonruviwat, P., & Leerawat, U. (2021). *On outer* $(\sigma,\tau)-n-$ *derivations and commutativity in prime near-ring*. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 16(2021), no. 2, 563–575.

Atteya, M. J.(2019). New Types of Permuting n-Derivations with Their Applications on Associative Rings. artikel symmetry. 12(1).

Ayres, F., dan Jaisingh, L., (2004). *Theory and Problems of Abstract Algebra (2nd edition)*. McGraw-Hill Publishing Company.

Bodaghi, A., & Feizabadi, H. (2022). Multi-derivation and some approximations. *commun. korean math*. Soc.37 No. 3 : 801-812.

Dummit, D. S., dan Foote, R. M. 2004. *Abstract Algebra*. John Wiley & Sons, New Jersey.

Ernanto, I. (2018). Sifat-sifat ring faktor yang dilengkapi derivasi. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, 1(1), 12-21.

Fitriani, F., Faisol, A. (2022). *Grup*. Universitas Lampung, Lampung.

Hungerford, T.W. 1974. *Algebra*. Springer, New York.

Hura, O. L., Yanita, Y., & Bakar, N. N. (2019). Teorema Pembagian Pada Ring Polinomial $R[X]$. *Jurnal Matematika UNAND*, 8(1), 249-254.

Indriati, K. (2019). *Matriks, Vektor, dan Program Linier*. Penerbit Unika Atma Jaya Jakarta.

Keating, M. E., (1998). *A First Course in Module Theory*. London: Imperial College Press.

Liang, X., & Zhao, L. (2023). *Bi-Lie n-derivations on triangular rings AIMS Mathematics*, 8(7): 15411–15426.

Malik, D. S., Moderson J. M., dan Sen, M. K. (1998). *Fundamental of Abstract Algebra*. McGraw-Hill Company. New York.

Park, K. H., *On prime and semiprime rings with symmetric n-derivations, J. Chungcheong Math. Soc.,* 22 (2009), 451-458.

Persulessy, E, R., & Mahmud, A, H. (2013). Ring Prima dan Ring Semiprima. *Jurnal Barekeng*. Vol.7 No. 1 : 1-4.

Rehman, Nadeem Quadri, MA Khan, M.. (2003). On generalized derivations and commutativity of rings. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*. 34. 1393-1396.

Setiawan, A., (2014). *Dasar-dasar Aljabar Modern: Teori grup & Teori ring*. Tisara Grafika.

Wahyuni S., Wijayanti, I. E., & Munandar, A. (2023). *Teori Representasi Grup Hingga*. UGM PRESS.

Wahyuni S., Wijayanti, I. E., Yuwaningsih, D. A., & Hartanto, A. D. (2021). *Teori Ring dan Modul*. Gadjah Mada University Press.