DIMENSI PARTISI GRAF ORIGAMI DAN BARBELNYA

(Skripsi)

Oleh :

LUTFIA AYU FAKHIRA
2057031006

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

ABSTRACT

PARTITION DIMENSION OF ORIGAMI GRAPH AND ITS BARBELL

By

LUTFIA AYU FAKHIRA

Let $n \epsilon \mathbb{N}$, with $n \geq 3$. An Origami graph on is a graph with set of vertices $V(O_n) = \{u_i, v_i, w_i | 1 \leq i \leq n\}$ and set of edges $E(O_n) = \{u_i w_i, u_i v_i, v_i w_i, u_i u_{i+1}, w_i u_{i+1}, u_1 u_n, u_1 w_n | 1 \leq i \leq n\}$. The Origami barbell graph, denoted by Bo_n is a simple graph formed by connecting two Origami graphs on by edges $u_i u_i'$ as a bridge. In this research, we discuss the partition dimension of the Origami graphs and its barbell. The partition dimension of the Origami graph, $pd(O_n) = 3$ for $n \geq 3$ and for the barbell graph, $pd(Bo_n) = 4$.

Keywords: partition dimension, Origami graph, Origami barbell graph

ABSTRAK

DIMENSI PARTISI GRAF ORIGAMI DAN BARBELNYA

Oleh

LUTFIA AYU FAKHIRA

Misal $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Graf Origami merupakan graf dengan himpunan titik $V(O_n) = \{u_i, v_i, w_i | 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(O_n) = \{u_i w_i, u_i v_i, v_i w_i, u_i u_{i+1}, w_i u_{i+1}, u_1 u_n, u_1 w_n | 1 \leq i \leq n\}$. Graf barbel Origami dinotasikan oleh Bo_n adalah graf sederhana yang dibentuk dengan menghubungkan dua graf Origami yang dihubungkan oleh sisi $u_i u_i'$ sebagai jembatan. Pada penelitian ini, dikaji tentang dimensi partisi graf Origami dan barbelnya. Dimensi partisi graf Origami, $pd(O_n) = 3$ untuk $n \geq 3$ dan graf barbel Origami, $pd(Bo_n) = 4$.

Kata kunci: dimensi partisi, graf Origami, graf barbel Origami

DIMENSI PARTISI GRAF ORIGAMI DAN BARBELNYA

Oleh

LUTFIA AYU FAKHIRA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

Judul Skripsi : **DIMENSI PARTISI GRAF ORIGAMI DAN BARBELNYA**

Nama Mahasiswa : *Lutfia Ayu Fakhira*

Nomor Pokok Mahasiswa : **2057031006**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.
NIP. 197604112000122001

Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si.
NIP. 199311062019032018

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP 19711001 200501 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **27 Mei 2024**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama Mahasiswa	: **Lutfia Ayu Fakhira**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **2057031006**
Program Studi	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **DIMENSI PARTISI GRAF ORIGAMI DAN BARBELNYA**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 27, Mei 2024

Penulis,

Lutfia Ayu Fakhira
NPM. 2057031006

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Lutfia Ayu Fakhira, dilahirkan pada tanggal 15 April 2002 di Tangerang. Penulis merupakan putri kedua dari Bapak Sutoyo dan Ibu Siti Suryati.

Penulis mengawali pendidikan di Taman Kanak-Kanak (TK) Az-Zahra pada tahun 2007-2008. Kemudian menempuh pendidikan di Sekolah Dasar (SD) di SDN Parahu III pada tahun 2008-2014. Kemudian melanjutkan ke Sekolah Menengah Pertama di SMPN 2 Balaraja pada tahun 2014-2017. Selanjutnya belajar pada jenjang Sekolah Menengah Atas di SMAN 1 Kabupaten Tangerang pada tahun 2017-2020. Pada tahun 2020 penulis terdaftar sebagai mahasiswa Program Studi S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Pada tahun 2023 penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di *Great Giant Pineapple* sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu di dunia kerja. Pada tahun yang sama penulis juga melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Rukti Basuki, Kecamatan Rumbia, Kabupaten Lampung Tengah, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat.

KATA INSPIRASI

“ Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Maka apabila kamu telah selesai (dari sesuatu urusan), kerjakanlah dengan sungguh-sungguh (urusan) yang lain, dan hanya kepada Tuhanmulah hendaknya kamu berharap”

(QS. Al-Insyirah, 6-8)

PERSEMBAHAN

Dengan segala syukur kepada Allah SWT yang telah memberikan rahmat serta hidayah sehingga dapat terselesaikannya skripsi ini dengan tepat pada waktunya.

Oleh karena itu saya persembahkan rasa terima kasih saya atas terselesaikannya skripsi ini kepada

Bapak Ibu dan Kakakku

Tidak ada kata yang dapat saya sampaikan untuk kalian kecuali ucapan terima kasih atas semua cinta, kasih sayang, dukungan, motivasi, dan pengorbanan yang belum bisa saya balas, serta doa yang tidak pernah terputus dan sujud dalam solat mereka.

Terima kasih telah mendoakan dan mendukung setiap langkah yang saya pilih. Karena dengan doa dan ridho kalian, Allah memudahkan setiap perjalanan hidup ini. Terimalah bukti kecil ini sebagai hadiah keseriusan saya untuk membalas semua pengorbanan, keikhlasan, dan jerih payah yang selama ini kalian lakukan.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Puji syukur penulis ucapkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena atas rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang judul "**DIMENSI PARTISI GRAF ORIGAMI DAN BARBELNYA**" Penulis menyadari bahwa banyak sekali bantuan yang penulis dapatkan selama pengerjaan skripsi ini. Dengan terselesaikannya skripsi penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih kepada :

1. Ibu Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan waktu, bimbingan, arahan serta masukan dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si., selaku dosen pembimbing II tang telah memberikan bimbingan, pengarahan, serta saran sehingga penulis dapan menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Dr Muslim Ansori, S.Si., M.Si., selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.
4. Ibu Dr. Fitriani S.Si. M.Sc., selaku dosen pembimbing akademik.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman S.Si. M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Seluruh dosen, staff, karyawan Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Kedua orang tua penulis, Bapak dan Ibu yang selalu mendoakan disetiap waktu, memberi nasehat, membimbing, memotivasi, mendukung, serta menjadi semangat tersendiri bagi penulis dalam menjalani setiap proses meraih gelar sarjana.

8. Terima kasih untuk diri sendiri yang telah berjuang, berproses, dan bertahan hingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
9. Kakak penulis Dita Retno Wulandari, beserta keluarga besar yang selalu memberikan dukungan kepada penulis serta doa-doanya.
10. Sahabat baik penulis yaitu Salsabila Shafira, Aulia Ajie, Intan Candini, Nikadek Dea, dan Hasna Wida yang selalu menemani, memberikan motivasi, semangat, dan dukunan selama 4 tahun di perkuliahan.
11. Martha Magdalena, Asti Purwaningsih, Aulia Ajie, dan Salsabila Shafira selaku teman seperbimbingan yang telah menemani, menjadi tempat bertukar pikiran, serta memberi motivasi dan semangat kepada penulis.
12. Teman–teman Matematika angkatan 2020 khususnya kelas B yang telah membantu serta memberikan semangat kepada penulis yang tidak dapat disebutkan satu persatu

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, akan tetapi penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan informasi yang bermanfaat bagi yang membacanya.

Akhir kata, semoga skripsi ini dapat memberikan banyak manfaat bagi kita semua, serta penulis mengharapkan masukan dan saran untuk dijadikan pelajaran kedepannya.

Bandar Lampung, 27, Mei 2024
Penulis,

Lutfia Ayu Fakhira

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR xii

I. PENDAHULUAN 1

1.1 Latar Belakang Masalah 1
1.2 Tujuan Penelitian 3
1.3 Manfaat Penelitian 3

II. TINJAUAN PUSTAKA 4

2.1 Konsep Dasar Graf 4
2.2 Graf Origami 7
2.3 Graf Barbel Origami 7
2.4 Dimensi Partisi Graf 8

III. METODE PENELITIAN 13

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian 13
3.2 Langkah-Langkah Penelitian 13

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN 15

4.1 Dimensi Partisi Graf Origami O_n 15
4.2 Dimensi Partisi Graf Barbel Origami Bo_n 29

V. SIMPULAN DAN SARAN 61

5.1 Simpulan 61
5.2 Saran 61

DAFTAR PUSTAKA 62

DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 2.1 Representasi graf untuk masalah jembatan Konigsberg 4

Gambar 2.2 Graf dengan 6 titik dan 9 sisi 5

Gambar 2.3 Graf O_4 7

Gambar 2.4 Graf Bo_6 8

Gambar 2.5 Contoh partisi pembeda minimal dari C_n 10

Gambar 2.6 Dimensi partisi graf O_6..11

Gambar 4.1 Graf Origami O_3..15

Gambar 4.2 Contoh partisi pembeda minimal pada O_3 16

Gambar 4.3 Graf Origami O_4..17

Gambar 4.4 Contoh partisi pembeda minimal pada O_4..17

Gambar 4.5 Graf Origami O_5..18

Gambar 4.6 Contoh partisi pembeda minimal pada O_5 19

Gambar 4.7 Graf Origami O_6..20

Gambar 4.8 Contoh partisi pembeda minimal pada O_6 20

Gambar 4.9 Graf Origami O_7..21

Gambar 4.10 Contoh partisi pembeda minimal pada O_7 22

Gambar 4.11 Graf Origami O_8..23

Gambar 4.12 Contoh partisi pembeda minimal pada O_8 24

Gambar 4.13 Graf Origami O_9..25

Gambar 4.14 Contoh partisi pembeda minimal pada O_9.......................................25

Gambar 4.15 Graf barbel Origami Bo_3..30

Gambar 4.16 Contoh partisi pembeda minimal pada Bo_3 31

Gambar 4.17 Graf barbel Origami Bo_4..32

Gambar 4.18 Contoh partisi pembeda minimal pada Bo_4 33

Gambar 4.19 Graf barbel Origami Bo_5 34
Gambar 4.20 Contoh partisi pembeda minimal pada Bo_5 35
Gambar 4.21 Graf barbel Origami Bo_6 36
Gambar 4.22 Contoh partisi pembeda minimal pada Bo_6 37
Gambar 4.23 Graf barbel Origami Bo_7 38
Gambar 4.24 Contoh partisi pembeda minimal pada Bo_7 39
Gambar 4.25 Graf barbel Origami Bo_8 40
Gambar 4.26 Contoh partisi pembeda minimal pada Bo_8 41
Gambar 4.27 Graf barbel Origami Bo_9. 42
Gambar 4.28 Contoh partisi pembeda minimal pada Bo_9 43

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Ilmu pengetahuan dan teknologi terus mengalami perkembangan dan kemajuan seiring berjalannya waktu. Cabang ilmu matematika adalah salah satunya yang mengalami kemajuan dalam ilmu pengetahuan dan teknologi. Matematikawan terus melakukan penelitian dan penemuan-penemuan tersebut menjadi penunjang berkembangnya ilmu-ilmu lain. Graf adalah salah satu yang telah lama dikenal dan diterapkan pada berbagai bidang pada pokok bahasan Matematika Diskrit. Aplikasi graf yang dapat dijumpai dalam kehidupan sehari-hari seperti pada peta, transpostasi, dan jaringan komunikasi (Hanif dkk., 2019).

Seiring kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi, teori graf menjadi semakin berkembang sampai saat ini. Topik umum yang dikaji dalam teori graf meliputi pelabelan, pewarnaan, bilangan kromatik, dimensi metrik, dan dimensi partisi (Khairiah dkk., 2020). Dimensi metrik dan dimensi partisi adalah salah satu bahasan dalam teori graf yang di mana merupakan pengembangan dari dimensi metrik (Haspika dkk., 2023). Konsep dimensi partisi pada graf pertama kali diperkenalkan oleh (Slater, 1975) menyatakan bahwa himpunan pembeda pada W sebagai titik-titik di graf G sedemikian hingga untuk setiap titik di G diperoleh jarak yang berbeda terhadap setiap titik di W. Selanjutnya pada jurnal *on the metric dimension of a graph*, menyatakan bahwa dimensi metrik muncul dengan memperoleh himpunan pembeda (Harary & Melter, 1976).

Konsep dimensi partisi diperkenalkan oleh (Chartrand dkk., 1998) sebagai pengembangan dari konsep dimensi metrik, dimensi partisi adalah nilai minimum k agar terdapat partisi pembeda dari $V(G)$ yang dinotasikan dengan $pd(G)$. Beberapa penelitian mengenai dimensi partisi pada graf yang sudah dijalankan Chartrand dkk., di antaranya pada graf Lintasan, graf Siklus, graf Bintang ganda, dan lain-lain.

Asmiati pada tahun 2012 juga telah menemukan dimensi partisi pada graf Amalgamasi bintang. Graf Amalgamasi bintang $S_{k,m}$ adalah graf yang diperoleh dari m buah graf bintang $K_{1,m}$ dengan menyatukan sebuah daun dari setiap graf bintang tersebut. Dimensi partisi graf Amalgamasi bintang $pd\left(S_{k,m}\right) = m - 1$, untuk $2 \leq k \leq m - 2, m \geq 4$; m, untuk $m - 1 \leq k \leq m^2 - 1$; dan $m + a$, untuk $(m + a - 1)^2 - 1 \leq k \leq (m + a)^2 - 1, a \geq 1$.

Persoalan dalam menentukan dimensi partisi pada suatu graf merupakan persoalan yang sulit namun cukup menarik, karena belum terdapat teorema yang dapat digunakan dalam penentuan dimensi partisi pada sembarang graf. Penelitian tentang graf telah berkembang. Nabila dkk. (2023) berhasil memperoleh dimensi partisi hasil amalgamasi-sisi pada graf Siklus yaitu $pd\big(Amal(C_4, e, k)\big) = 4$ untuk $k = 4{,}5{,}6$ dan $pd\big(Amal(C_4, e, k)\big) = 3 + m$ untuk $k = 2m + 5$ dan $k = 2m + 6$ dengan $m = 1{,}2{,}3$. Penelitian oleh Silalahi dan Mulyono (2023) berhasil memperoleh dimensi partisi dari graf Kipas Ganda yaitu $pd(2k_1 + P_n) = \left\lceil \frac{dim(2k_1+P_n)}{2} \right\rceil + 2$. Penelitian oleh Hasmawati dkk. (2021) berhasil memperoleh dimensi partisi graf Kincir Angin Belanda yaitu untuk suatu $k \geq 3$, $pd(Amal(C_n)m) = k$ untuk suatu $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ dan $m \in I_k$. Penelitian oleh Safriadi dkk. (2020) berhasil memperoleh dimensi partisi graf Multipartit lengkap yaitu $pd(K_n, 2{,}2) = n + 1$ untuk $n \geq 3$ jika $k = 1$ dan $r = 2$ dan $pd(K_n, 2{,}2{,}2) = n + 3$ untuk $n \geq 3$ jika $k = 1$ dan $r = 3$. Penelitian oleh Rumahorbo dkk. (2024) berhasil memperoleh dimensi partisi graf Payung yaitu $pd\big(U_{m,n}(1)\big) = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ untuk $m \geq 5$ dan $n \geq 2$ dan $pd\big(U_{m,n}(2)\big) = \left\lceil \frac{m+2}{2} \right\rceil$ untuk $m \geq 7$ dan $n \geq 2$.

Pada graf Origami telah ditentukan bilangan terhubung pelangi dari graf Origami dan graf Pizza (Nabila & Salman, 2015), bilangan b-kromatik pada graf Origami, graf Lintang, dan graf *Tadpole* (Kornelia dkk., 2019), dan bilangan kromatik lokasi graf Origami (Irawan dkk., 2021). Sejauh penulusuran literatur, belum terdapat kajian mengenai dimensi partisi pada graf Origami. Sehingga pada penelitian ini akan dibahas mengenai dimensi partisi pada graf Origami dan graf barbel Origami.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan dimensi partisi dari graf Origami $pd(O_n)$ dan dimensi partisi dari graf barbel Origami $pd(Bo_n)$ untuk $n \geq 3$.

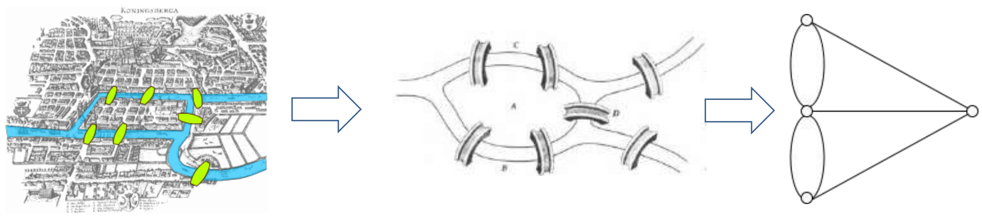
1.3 Manfaat Penelitian

1. Memberikan pengetahuan dan wawasan tentang dimensi partisi dari graf khususnya graf Origami dan graf barbel Origami.
2. Sebagai referensi untuk penelitian selanjutnya mengenai dimensi partisi dari suatu graf.

II. TINJAUAN PUSTAKA

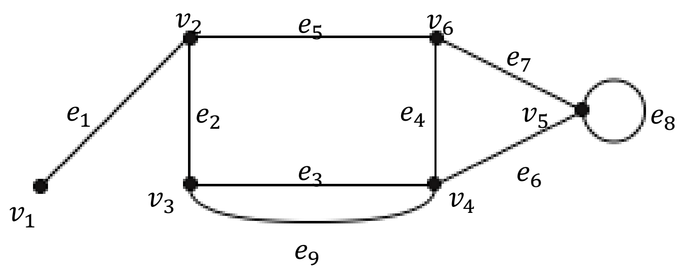
2.1 Konsep Dasar Graf

Leonhard Euler pada tahun 1736 memperkenalkan teori graf pertama kali dalam membuktikan kemungkinan untuk melintasi tepat satu kali jalan di empat wilayah yang dihubungkan oleh tujuh jembatan di atas sungai Pregel di Konigsberg, Rusia. Masalah ini dikenal sebagai masalah jembatan Konigsberg dan ditampilkan berupa gambar yang kemudian diketahui sebagai representasi graf, di mana titik menyatakan suatu wilayah dan sisi menyatakan jembatan yang menghubungkan dua wilayah. Menggunakan representasi graf, Euler membuktikan tidak mungkin untuk melintasi setiap jembatan tepat satu kali dan kembali ke posisi semula (Suryadi, 1996).



Gambar 2.1 Representasi graf untuk masalah jembatan Konigsberg
(sumber: https://id.wikipedia.org/wiki/Berkas:Konigsberg_bridges.png)

Beberapa Konsep dasar graf yang akan digunakan dalam penelitian ini diambil dari Deo (1989). Graf G adalah himpunan terurut $(V(G),\ E(G))$, dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ menyatakan himpunan titik dari G dengan $V(G)$ himpunan tak kosong, dan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ menyatakan himpunan sisi yaitu pasangan tak terurut dari $V(G)$. Banyaknya himpunan titik $V(G)$ disebut orde dari graf G $v, w \in V(G)$ dengan sisi $e = vw$, maka v dan w dikatakan bertetangga (*adjacent*), sedangkan titik v dan w dikatakan menempel (*incident*) dengan sisi e, demikian juga sisi e dikatakan menempel dengan titik v dan w. Himpunan tetangga (*Neigborhood*) dari suatu titik v, dinotasikan dengan $N(v)$ adalah himpunan titik-titik yang bertetangga dengan v.



Gambar 2.2 Graf dengan 6 titik dan 9 sisi

Pada Gambar 2.2 Graf (V, E) dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$. Titik v_2 bertetangga dengan v_1, v_3, dan v_6, sedangkan v_1 dan v_2 menempel pada e_1. Sebaliknya sisi e_1 menempel pada v_1 dan v_2. $N(v_1) = \{v_2\}$.

Derajat (*degree*) adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik v, dinotasikan dengan $d(v)$. Daun (*pendant vertex*) adalah titik yang berderajat 1. Pada Gambar 2.2 $d(v_1) = 1$, v_1 adalah daun karena berderajat satu, $d(v_2) = 3$, $d(v_3) = 3$, $d(v_4) = 4$, $d(v_5) = 4$, $d(v_6) = 3$.

Loop adalah sisi yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sisi paralel adalah dua sisi atau lebih yang memiliki dua titik ujung yang sama. Graf yang tidak memiliki sisi ganda dan atau loop disebut graf sederhana. Pada Gambar 2.2, terdapat loop pada titik v_5 yaitu e_8. Sedangkan e_3, dan e_9 disebut sisi paralel.

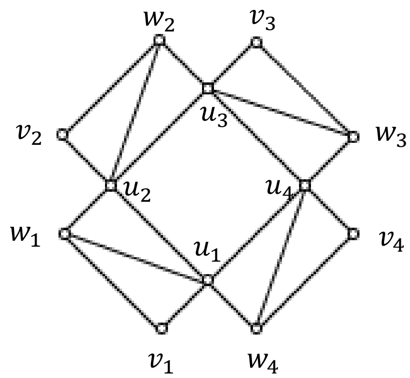
Jarak di antara x dan y pada graf terhubung G adalah panjang lintasan terpendek di antara kedua titik tersebut, dinotasikan dengan $d(x, y)$. Istilah lain yang sering muncul pada pembahasan graf adalah jalan (*walk*), lintasan (*path*), sirkuit (*circuit*). Jalan (*walk*) adalah barisan berhingga dari titik dan sisi dimulai dan diakhiri dengan titik sedemikian sehingga setiap sisi menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya. Contoh Jalan dari v_2 ke v_4 berdasarkan Gambar 2.2 adalah $v_2 - e_2 - v_3 - e_3 - v_4 - e_4 - v_6 - e_7 - v_5 - e_6 - v_4$.

Lintasan (*path*) adalah jalan yang melewati titik yang berbeda-beda pada suatu graf di mana titik-titik yang dilewati tepat satu kali. Contoh lintasan berdasarkan Gambar 2.2 dari $v_3 - e_3 - v_4 - e_4 - v_6 - e_5 - v_2 - e_1 - v_1$.

Sirkuit (*circuit*) adalah lintasan tertutup, yaitu lintasan yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sirkuit dibedakan menjadi dua macam, yaitu sirkuit genap dan sirkuit ganjil. Sirkuit genap adalah sirkuit dengan banyaknya titik genap, dan sirkuit ganjil adalah sirkuit dengan banyaknya titik ganjil. Contoh sirkuit berdasarkan Gambar 2.2 adalah $v_4 - e_6 - v_5 - e_7 - v_6 - e_4 - v_4$.

2.2 Graf Origami

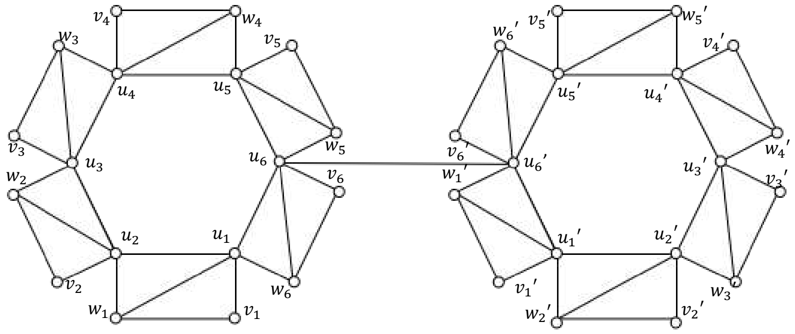
Graf Origami merupakan graf dengan pusat berupa graf Siklus dan lipatan-lipatan Origami yang mana gabungan dari dua buah graf Siklus C_3. Graf Origami dengan n titik dinotasikan dengan O_n. Misalkan $n \in \mathbb{N}$, graf Origami O_n dengan $3n$ titik adalah graf yang himpunan titiknya $V(O_n) = \{u_i, v_i, w_i | 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(O_n) = \{u_i w_i, u_i v_i, v_i w_i, u_i u_{i+1},\ w_i u_{i+1}, u_1 u_n, u_1 w_n | 1 \leq i \leq n\}$ (Kornelia dkk., 2019).



Gambar 2.3 Graf O_4

2.3 Graf Barbel Origami

Graf barbel Origami Bo_n dengan $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ adalah graf sederhana yang dibangun oleh dua graf Origami yang dihubungkan oleh satu jembatan pada sisi u_1, u_1' dengan $V(Bo_n) = \{u_i, v_i, w_i, u_i', v_i', w_i' | 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(Bo_n) = \{u_i w_i, u_i v_i, v_i w_i, u_i u_{i+1}, w_i u_{i+1}, u_1 u_n, u_1 w_n, u_n u_n' | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i' w_i', u_i' v_i', u_i' u_{i+1}', w_{i+1}' u_i', w_1' u_n' | 1 \leq i \leq n\}$. Graf barbel Origami dengan n titik dinotasikan dengan Bo_n (Irawan, 2021).



Gambar 2.4 Graf Bo_6

2.4 Dimensi Partisi Graf

Sebelum mendefinisikan apa itu dimensi partisi, terlebih dahulu akan diberikan definisi umum tentang dimensi dan partisi, dimensi diartikan sebagai jumlah minimal koordinat yang dibutuhkan untuk menentukan titik-titik yang ada dalam suatu ruang atau objek. Sedangkan, partisi diartikan sebagai pengelompokkan anggota himpunan di mana setiap kelompok memiliki anggota yang berbeda dan setiap anggota masuk dalam satu kelompok tertentu. Dimensi Partisi yaitu minimum panjang lintasan terpendek antara titik pada suatu graf terhadap k-partisi, adapun panjang lintasan yaitu banyaknya jumlah sisi yang dilewati antara titik pada suatu graf terhadap k-partisi (Chartrand dkk., 2000). selanjutnya akan diberikan definisi dimensi partisi pada suatu graf, teorema-teorema dan beberapa contoh graf yang sudah diperoleh dimensi partisnya.

Misalkan $G = (V, E)$, suatu graf, dengan $v \in V(G)$ dan $S \subset V(G)$. Jarak dari titik v ke himpunan S, dinotasikan dengan $d(v, S)$ adalah min $\{d(v, x), x \in S\}$ dengan $d(v, x)$ adalah jarak dari titik v ke x. Misalkan terdapat sebuah graf terhubung G dan k buah partisi $\prod = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_k\}$ adalah k-pasang terurut dari $V(G)$ dengan $S_1, S_2, \dots, S_k$ adalah kelas-kelas partisi. Representasi v terhadap $\prod$, dinotasikan sebagai $r(v|\prod) = \big(d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k)\big)$. Partisi $\prod$ dikatakan partisi pembeda dari $V(G)$ jika $r(v|\prod) \neq r(u|\prod)$ untuk setiap dua titik berbeda $u, v \in V(G)$. Dimensi partisi dari G atau dapat dinotasikan dengan $pd(G)$

adalah nilai minimum k agar terdapat partisi pembeda dari $V(G)$ (Chartrand dkk., 1998). Misalkan partisi pembeda $\prod = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_k\}$ pada graf G. Titik $v \in V(G)$ disebut titik dominan jika representasi titik v_i mempunyai nilai 0 pada ordinat ke$-i$ dan 1 untuk lainnya (Baskoro & Asmiati, 2013).

Teorema 2.4.1 (Chartrand dkk., 1998) Dimensi partisi graf Siklus C_n untuk $n \geq 3$ adalah 3.

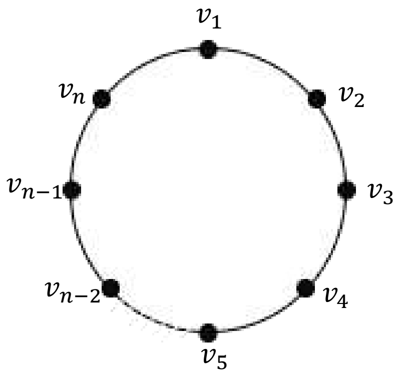
Berikut diberikan contohnya**:**

Graf Siklus C_n dipartisi sedemikian sehingga diperoleh $\prod = \{S_1, S_2, S_3\}$, dengan $S_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, \dots, v_{n-2}\}$, $S_2 = \{v_{n-1}\}$, $S_3 = \{v_n\}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
r(v_1|\Pi) &= \big(d(v_1,S_1), d(v_1,S_2), d(v_1,S_3)\big) &&= (0,2,1);\\
r(v_2|\Pi) &= \big(d(v_2,S_1), d(v_2,S_2), d(v_2,S_3)\big) &&= (0,3,2);\\
r(v_3|\Pi) &= \big(d(v_3,S_1), d(v_3,S_2), d(v_3,S_3)\big) &&= (0,4,3);\\
r(v_4|\Pi) &= \big(d(v_4,S_1), d(v_4,S_2), d(v_4,S_3)\big) &&= (0,5,4);\\
r(v_5|\Pi) &= \big(d(v_5,S_1), d(v_5,S_2), d(v_5,S_3)\big) &&= (0,6,5);\\
&\vdots\\
r(v_{n-2}|\Pi) &= \big(d(v_{n-2},S_1), d(v_{n-2},S_2), d(v_{n-2},S_3)\big) &&= (0,1,2);\\
r(v_{n-1}|\Pi) &= \big(d(v_{n-1},S_1), d(v_{n-1},S_2), d(v_{n-1},S_3)\big) &&= (1,0,1);\\
r(v_n|\Pi) &= \big(d(v_n,S_1), d(v_n,S_2), d(v_n,S_3)\big) &&= (1,1,0).
\end{aligned}$$

Karena representasi dari semua titik berbeda, maka $\prod$ adalah partisi pembeda dari graf Siklus C_n dan $pd(C_n) \leq 3$.

Untuk menunjukkan $pd(C_n) \geq 3$, andaikan terdapat partisi pembeda $\prod = \{S_1, S_2\}$ dari C_n dengan $S_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, \dots, v_{n-1}\}, S_2 = \{v_n\}$, maka titik v_1, v_{n-1} akan memiliki representasi yang sama yaitu $(0,1)$, kontradiksi. Jadi $pd(C_n) \geq 3$. Akibatnya $pd(C_n) = 3$.



Gambar 2.5 Graf C_n

Berikut ini diberikan contoh graf Origami O_6 dan akan ditentukkan dimensi partisi dari graf tersebut.

Terlebih dahulu akan ditentukkan batas bawah dari dimensi partisi graf O_6. Karena graf O_6 memuat graf Siklus, maka berdasarkan Teorema 2.4.1 $pd(O_6) \geq 3$. Untuk menunjukkan $pd(O_6) \geq 3$, andaikan terdapat partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2\}$ dengan $S_1 = \{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3\}$; $S_2 = \{u_4, u_5, u_6, v_4, v_5, v_6, w_4, w_5, w_6\}$. Representasi dari graf O_6 adalah

$$r(u_1|\Pi) = \big(d(u_1, S_1), d(u_1, S_2)\big) = (0,1);$$
$$r(u_2|\Pi) = \big(d(u_2, S_1), d(u_2, S_2)\big) = (0,2);$$
$$r(u_3|\Pi) = \big(d(u_3, S_1), d(u_3, S_2)\big) = (0,1);$$
$$r(u_4|\Pi) = \big(d(u_4, S_1), d(u_4, S_2)\big) = (1,0);$$
$$r(u_5|\Pi) = \big(d(u_5, S_1), d(u_5, S_2)\big) = (2,0);$$
$$r(u_6|\Pi) = \big(d(u_6, S_1), d(u_6, S_2)\big) = (1,0).$$

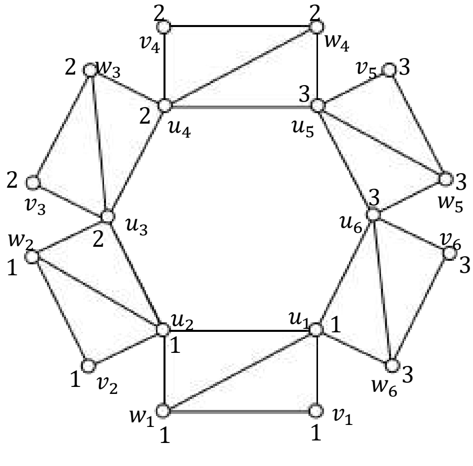
$$r(v_1|\Pi) = \big(d(v_1, S_1), d(v_1, S_2)\big) = (0,2);$$

$$r(v_2|\Pi) = \big(d(v_2, S_1), d(v_2, S_2)\big) = (0,3);$$
$$r(v_3|\Pi) = \big(d(v_3, S_1), d(v_3, S_2)\big) = (0,2);$$
$$r(v_4|\Pi) = \big(d(v_4, S_1), d(v_4, S_2)\big) = (2,0);$$
$$r(v_5|\Pi) = \big(d(v_5, S_1), d(v_5, S_2)\big) = (3,0);$$
$$r(v_6|\Pi) = \big(d(v_6, S_1), d(v_6, S_2)\big) = (2,0).$$

$$r(w_1|\Pi) = \big(d(w_1, S_1), d(w_1, S_2)\big) = (0,2);$$
$$r(w_2|\Pi) = \big(d(w_2, S_1), d(w_2, S_2)\big) = (0,3);$$
$$r(w_3|\Pi) = \big(d(w_3, S_1), d(w_3, S_2)\big) = (0,1);$$
$$r(w_4|\Pi) = \big(d(w_4, S_1), d(w_4, S_2)\big) = (2,0);$$
$$r(w_5|\Pi) = \big(d(w_5, S_1), d(w_5, S_2)\big) = (2,0);$$
$$r(w_6|\Pi) = \big(d(w_6, S_1), d(w_6, S_2)\big) = (1,0).$$

Terlihat bahwa terdapat representasi yang sama, kontradiksi dengan Π sebagai partisi pembeda dari graf O_6. Jadi pengandaian salah, maka dibutuhkan sekurang-kurangnya 3 partisi untuk graf O_6. Akibatnya, $pd(O_6) \geq 3$.

Selanjutnya, dari Gambar 2.6 diberikan kelas-kelas partisi untuk mengetahui dimensi partisi dari graf sebagai berikut:



Gambar 2.6 Contoh partisi pembeda minimal pada O_6

Misalkan Π adalah partisi pembeda yang diberikan dengan menggunakan 3 partisi, sehingga diperoleh kelas-kelas partisi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2\}$; $S_2 = \{u_3, u_4, v_3, v_4, w_3, w_4\}$; $S_3 = \{u_5, u_6, v_5, v_6, w_5, w_6\}$, sehingga didapatkan representasi masing-masing titik terhadap partisi pembedanya adalah:

$$r(u_1|\Pi) = \big(d(u_1,S_1), d(u_1,S_2), d(u_1,S_3)\big) = (0,2,1);$$
$$r(u_2|\Pi) = \big(d(u_2,S_1), d(u_2,S_2), d(u_2,S_3)\big) = (0,1,2);$$
$$r(u_3|\Pi) = \big(d(u_3,S_1), d(u_3,S_2), d(u_3,S_3)\big) = (1,0,2);$$
$$r(u_4|\Pi) = \big(d(u_4,S_1), d(u_4,S_2), d(u_4,S_3)\big) = (2,0,1);$$
$$r(u_5|\Pi) = \big(d(u_5,S_1), d(u_5,S_2), d(u_5,S_3)\big) = (2,1,0);$$
$$r(u_6|\Pi) = \big(d(u_6,S_1), d(u_6,S_2), d(u_6,S_3)\big) = (1,2,0).$$

$$r(v_1|\Pi) = \big(d(v_1,S_1), d(v_1,S_2), d(v_1,S_3)\big) = (0,3,2);$$
$$r(v_2|\Pi) = \big(d(v_2,S_1), d(v_2,S_2), d(v_2,S_3)\big) = (0,2,3);$$
$$r(v_3|\Pi) = \big(d(v_3,S_1), d(v_3,S_2), d(v_3,S_3)\big) = (2,0,3);$$
$$r(v_4|\Pi) = \big(d(v_4,S_1), d(v_4,S_2), d(v_4,S_3)\big) = (3,0,2);$$
$$r(v_5|\Pi) = \big(d(v_5,S_1), d(v_5,S_2), d(v_5,S_3)\big) = (3,2,0);$$
$$r(v_6|\Pi) = \big(d(v_6,S_1), d(v_6,S_2), d(v_6,S_3)\big) = (2,3,0).$$

$$r(w_1|\Pi) = \big(d(w_1,S_1), d(w_1,S_2), d(w_1,S_3)\big) = (0,2,2);$$
$$r(w_2|\Pi) = \big(d(w_2,S_1), d(w_2,S_2), d(w_2,S_3)\big) = (0,1,3);$$
$$r(w_3|\Pi) = \big(d(w_3,S_1), d(w_3,S_2), d(w_3,S_3)\big) = (2,0,2);$$
$$r(w_4|\Pi) = \big(d(w_4,S_1), d(w_4,S_2), d(w_4,S_3)\big) = (3,0,1);$$
$$r(w_5|\Pi) = \big(d(w_5,S_1), d(w_5,S_2), d(w_5,S_3)\big) = (2,2,0);$$
$$r(w_6|\Pi) = \big(d(w_6,S_1), d(w_6,S_2), d(w_6,S_3)\big) = (1,3,0).$$

Karena representasi dari setiap titik-titik berbeda, maka Π adalah partisi pembeda dari graf O_6, $pd(O_6) \leq 3$. Jadi terbukti $pd(O_6) = 3$

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2023/2024 bertempat di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Langkah-Langkah Penelitian

Dalam penelitian ini, langkah-langkah yang digunakan untuk menentukan dimensi partisi pada graf Origami dan barbelnya adalah sebagai berikut:

1. Menentukan dimensi partisi graf Origami
   a. Mengonstruksi graf Origami O_n untuk $n \geq 3$.
   b. Menentukan batas bawah dari $pd(O_n)$, $n \geq 3$. Batas bawah dimensi partisi graf Origami dapat ditentukan dengan Teorema 2.4.1 karena graf Origami memuat graf Siklus, maka $pd(O_n) \geq 3$. Akan tetapi, jika batas bawah ini belum memenuhi syarat dimensi partisi, maka digunakan pembuktian kontradiksi.
   c. Menentukan batas atas dari $pd(O_n)$. Batas atas dari $pd(O_n)$ diperoleh dengan mengonstruksi graf Origami untuk $n \geq 3$. Himpunan titik-titik pada graf Origami dikelompokkan ke dalam kelas partisi pembeda.

Minimum banyaknya partisi pembeda itulah yang merupakan dimensi partisi dari graf Origami.

d. Jika batas bawah dimensi partisi graf Origami $pd(O_n) \geq x$ dan batas atas dimensi partisi graf Origami $pd(O_n) \leq x$, maka akan diperoleh dimensi partisi graf Origami adalah $pd(O_n) = x$.
e. Menyimpulkan hasil-hasil yang diperoleh dalam suatu pernyataan matematika.
f. Membuktikan hasil yang diperoleh pada langkah e.

2. Menentukan dimensi partisi graf barbel Origami
   a. Mengonstruksi graf barbel Origami Bo_n untuk $n \geq 3$.
   b. Menentukan batas bawah dari $pd(Bo_n)$, $n \geq 3$. Karena graf Bo_n memuat dua graf Origami, maka batas bawah graf barbel Origami sekurang-kurangnya sama dengan partisi pada graf Origami itu sendiri. Akan tetapi, jika batas bawah ini belum memenuhi syarat dimensi partisi, maka digunakan pembuktian kontradiksi.
   c. Menentukan batas atas dari $pd(Bo_n)$. Batas atas dari $pd(Bo_n)$ diperoleh dengan mengonstruksi graf barbel Origami. Himpunan titik-titik pada graf Origami dikelompokkan ke dalam kelas partisi pembeda. Minimum banyaknya partisi pembeda itulah yang merupakan dimensi partisi dari graf barbel Origami.
   d. Jika batas bawah dimensi partisi graf barbel Origami $pd(Bo_n) \geq x$ dan batas atas dimensi partisi graf barbel Origami $pd(Bo_n) \leq x$, maka akan diperoleh dimensi partisi graf barbel Origami adalah $pd(Bo_n) = x$.
   e. Menyimpulkan hasil-hasil yang diperoleh dalam suatu pernyataan matematika.
   f. Membuktikan hasil yang diperoleh pada langkah e.

V. SIMPULAN DAN SARAN

5.1 Simpulan

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan diperoleh dimensi partisi dari graf Origami, $pd(O_n)$ adalah 3 untuk $n \geq 3$. Dimensi partisi dari graf barbel Origami, $pd(Bo_n)$ adalah 4 untuk $n \geq 3$.

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dikembangkan dengan menentukkan dimensi partisi graf Origami pada operasi graf lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Asmiati. (2012). Partition Dimension of Amalgamation of Stars. *Bulletin of Mathematics, 4*(2): 161-167.

Baskoro, E. T., & Asmiati. (2013). Characterizing all trees with locating-chromatic number 3. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications, 1*(2), 109-117.

Chartrand, G., Salehi, E., & Zhang, P. (1998). On The Partition Dimension of a Graph. *CongressusNumerantium, 130*: 157-160.

Chartrand, G., Salehi, E., & Zhang, P. (2000). The Partition Dimension of a Graph. *Aequationes Math* 59: 45-54.

Deo, N. (1989). *Graph Theory with Application to Engineering and Computer Science.* Prentince Hall of India Private Limited, New Delhi. 496 hlm.

Hanif, M. F., Welyyanti, D., & Efendi. (2019). Dimensi Partisi dari Graf Lolipop dan Graf Jahangir Diperumum. *Jurnal Matematika UNAND, 3*(3): 104-109.

Harary, F., & Melter, R. (1976). On the Metric Dimension of a Graph. *Ars Combin, 2*: 191-195.

Hasmawati, Nurwahyu, B., Daming, A. S., & Amir, A. K. (2021). Dimensi Partisi Graf Kincir Angin Belanda. *Jurnal Matematika, Statistika & Komputasi, 17*(3): 472-483.

Haspika, Hasmawati, & Aris, N. (2023). The Partition Dimension on the Grid Graph. *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi, 19*(2): 351-358.

Irawan, A., Asmiati, Zakaria, L., & Muludi, K. (2021). The Locating-Chromatic Number of Origami Graphs. *Algorithms, 14*(6): 167.

Khairiah, A., Noviani, E., & Fran, F. (2020). Dimensi Partisi pada Graf. *Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster), 9*(1): 189-194.

Kornelia, P., Noviani, E., & Fran, F. (2019). Bilangan B-Kromatik pada Graf Origami, Graf Lintang, dan Graf Tadpole. *Buletin Ilmiah Mat, Stat, dan Terapannya (Bimaster), 8*(4): 861-868.

Nabila, A. D., Hasmawati, & Nur, M. (2023). Dimensi Partisi Hasil Amalgamasi-Sisi pada Graf Siklus. *Jurnal Matematika, Statistika & Komputasi, 20*(1): 65-74.

Nabila, S., & Salman, A. (2015). The Rainbow Connection Number of Origami Graphs and Pizza Graphs. *Procedia Computer Science,74*: 162-167.

Rumahorbo, Y. A., Suwilo, S., Mardiningsih, & Nasution, P. K. (2024). Dimensi Partisi pada Graf Payung. *Journal of Mathematics Education and Science, 9*(2): 1-10.

Safriadi, Hasmawati, & Haryanto, L. (2020). Dimensi Partisi Graf Multipartit Lengkap. *Jurnal Matematika, Statistika & Komputasi, 16*(3): 365-374.

Silalahi, R., & Mulyono. (2023). Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi dari Graf Kipas Ganda. *Formosa Journal of Science and Technology (FJST), 2*(1): 81-88.

Slater, P. (1975). Leaves of Trees. *Congressus Numerantium, 14*: 549-559.

Suryadi, H. S. (1996). *Teori Graf Dasar.* Universitas Gunadarma, Jakarta. 147 hlm.