KONSTRUKSI SEMIMODUL ATAS SEMIRING PADA HIMPUNAN *ROUGH* MENGGUNAKAN KONSEP PRABA

Tesis

Oleh

DONA RANI MANINJA
2227031007

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

ABSTRAK

THE CONSTRUCTION OF ROUGH SEMIMODULE OVER ROUGH SEMIRING BY USING PRABA CONCEPT

By

Dona Rani Maninja

Semimodule over semiring is a generalization of a module over the ring. Rough sets are formed using the Praba concept by providing an information system $I = (U, A)$ whose membership values are fuzzy sets. For any $X \subseteq U$, we can form equivalence classes, lower approximation and upper approximation. In this research, we construct semimodules over semirings in the rough set and the direct sum of the two semimodules over semirings uses the Praba concept with meet $\triangle$ and join $\triangledown$ operations. Additionally, an example of construction semimodules over semirings in the rough set is given.

Keywords:*Approximation space, rough set, rough semiring, rough semimodule over semiring, Praba concept.*

ABSTRAK

KONSTRUKSI SEMIMODUL ATAS SEMIRING PADA HIMPUNAN *ROUGH* MENGGUNAKAN KONSEP PRABA

Oleh

Dona Rani Maninja

Semimodul atas semiring merupakan generalisasi dari modul atas ring. Himpunan *rough* terbentuk menggunakan konsep Praba dengan diberikannya sistem informasi $I = (U, A)$ dengan nilai keanggotaannya himpunan *fuzzy*. Selanjutnya X yang merupakan subset dari U berkoresponden membentuk kelas-kelas ekuivalensi, aproksimasi bawah dan aproksimasi atas. Pada penelitian ini, akan dikonstruksi semimodul atas semiring pada himpunan *rough* dan *direct sum* dari dua semimodul atas semiring menggunakan konsep Praba dengan operasi *meet* $\triangle$ dan *join* $\triangledown$. Selain itu, diberikan contoh konstruksi semimodul atas semiring pada himpunan *rough*.

Kata-kata kunci: *Ruang aproksimasi, himpunan rough, semiring, semimodul atas semiring, konsep Praba.*

KONSTRUKSI SEMIMODUL ATAS SEMIRING PADA HIMPUNAN *ROUGH* MENGGUNAKAN KONSEP PRABA

DONA RANI MANINJA

Tesis

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
MAGISTER MATEMATIKA

pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

Judul Skripsi	:	**KONSTRUKSI SEMIMODUL ATAS SEMI-RING PADA HIMPUNAN *ROUGH* MENG-GUNAKAN KONSEP PRABA**
Nama Mahasiswa	:	**Dona Rani Maninja**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2227031007**
Program Studi	:	**Magister Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Fitriani, S.Si.,M.Sc.	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si.,M.Sc.**
NIP 19840627 200604 2 001	NIP 19800206 200312 1 003

2. Ketua Program Studi Magister Matematika

Prof. Dr. Asmiati, S.Si.,M.Si.
NIP. 19760411 200012 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim penguji

Ketua	:	**Dr. Fitriani, S.Si.,M.Sc.**	....
Sekretaris	:	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si.,M.Sc.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**1. Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.**	....
		2. Prof. Dr. Asmiati, S.Si.,M.Si.	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 19711001 200501 1 002

3. Direktur Program Pasca Sarjana

Prof. Dr. Ir. Murhadi, M.Si.
NIP. 19640326 199802 1 001

Tanggal Lulus Ujian Tesis: **7 Juni 2024**

PERNYATAAN TESIS MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Dona Rani Maninja**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2227031007**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul tesis	:	**KONSTRUKSI SEMIMODUL ATAS SEMIRING PADA HIMPUNAN *ROUGH* MENGGUNAKAN KONSEP PRABA**

Dengan ini menyatakan bahwa tesis ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa tesis ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 7 Juni 2024

Penulis,

Dona Rani Maninja

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Dona Rani Maninja yang lahir di Tanjung Karang pada tanggal 27 Januari 1986. Penulis merupakan anak pertama dari tiga bersaudara yang terlahir dari pasangan Bapak Ruada dan Ibu Suhaini Wati. Pada tahun 2011, penulis menikah dengan Shondi Saputra dan memiliki seorang putri yang bernama Karen Azra Earlyta.

Penulis menyelesaikan pendidikan Sekolah Dasar di SD Negeri 2 Way Kandis pada tahun 1997, menyelesaikan Pendidikan Sekolah Lanjutan Tingkat Pertama di SLTP Negeri 21 Bandar Lampung pada tahun 2000, dan menyelesaikan Sekolah Menengah Umum di SMU Negeri 6 Bandar Lampung pada tahun 2003. Selanjutnya, penulis menyelesaikan Sarjana Strata-1 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung pada tahun 2007. Pada tahun 2022, penulis terdaftar sebagai mahasiswa Program Magister di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.

KATA INSPIRASI

” Jika kamu meminta, mintalah kepada Allah, dan jika kamu memohon pertolongan, mohonlah pertolongan kepada Allah.”
(HR. Ahmad dan At-Tirmidzi)

”Barangsiapa yang hendak menginginkan dunia, maka hendaklah ia menguasai ilmu. Barangsiapa menginginkan akhirat hendaklah ia menguasai ilmu, dan barangsiapa yang menginginkan keduanya (dunia dan akhirat) hendaklah ia menguasai ilmu,”
(HR. Ahmad)

”Yakinlah bahwa kamu pasti bisa, semangat!!!”

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin,

Puji dan syukur kehadirat Allah Subhanahu Wata'ala atas limpahan nikmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad Shallallahu 'Alaihi Wasallam.

Dengan penuh syukur, kupersembahkan karya ini kepada:

Keluarga Tercinta

Terimakasih kepada seluruh keluargaku untuk semua do'a, kasih sayang, dukungan dan semangat dalam segala hal serta nasehat yang diberikan.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat berjasa dalam membantu, memberikan masukan, arahan, serta ilmu yang berharga.

Sahabat – Sahabatku

Terimakasih kepada sahabat – sahabatku atas semua do'a, dukungan, semangat, serta canda tawa keceriaan selama masa perkuliahan ini.

Almamater Tercinta Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini yang berjudul ”Konstruksi Semimodul atas Semiring pada Himpunan *Rough* Menggunakan Konsep Praba” dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing I atas kesediaan waktu dalam memberikan arahan, motivasi, bimbingan, serta saran kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini.

2. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan, serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyeesaikan tesis ini.

3. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Penguji I serta Ketua Jurusan Matematika yang telah memberikan saran, motivasi serta evaluasi yang membangun kepada penulis selama proses penyusunan tesis ini.

4. Ibu Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku Penguji II serta Ketua Prodi Magister Matematika yang telah memberikan arahan, motivasi, bimbingan, serta saran kepada penulis selama proses penyusunan tesis ini.

5. Bapak Ir. Warsono, M.S., Ph.D. selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan motivasi dan bimbingan selama proses penyusunan tesis ini.

6. Seluruh dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Papa, Karen, Umak, (Alm) Ubak, Ibu, Bapak dan keluarga besar yang selalu memotivasi, memberikan dukungan dan do'a kepada penulis.

8. Terimakasih kepada diriku sendiri karena sudah berjuang dan bertahan sejauh ini.

9. Teman – teman satu bimbingan, Bidari, Lisa, Aira, Sandi, Anggita, Retno, Salsa dan Evi yang telah memberikan semangat, motivasi maupun saran kepada penulis.

10. Teman – teman Jurusan Magister Matematika angkatan 2022 yang sudah banyak membantu selama masa perkuliahan.

11. Teman-teman SMAN 1 Bandar Lampung yang telah memberikan dukungan selama masa perkuliahan.

12. Mbak Novrita, mbak Tri Septiani, ses Camelia, mbak Yolanda, yunda Mertha dan mbak Neti serta Santi yang telah memberikan dukungan selama masa perkuliahan.

13. Semua pihak yang membantu dalam proses penyusunan tesis ini yang tidak dapat penulis sebut satu persatu.

Semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa tesis ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan tesis ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung,

Dona Rani Maninja

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Konsep grup dan ring berperan penting pada struktur aljabar, karena diperlukan dalam mengkontruksi modul. Grup merupakan sistem matematika yang terdiri atas satu himpunan dan satu operasi biner yang memenuhi aksioma tertentu (Fitriani dan Faisol, 2022), sedangkan semigrup merupakan generalisasi dari grup tanpa elemen identitas atau invers. Semigrup terdiri dari operasi biner yang bersifat asosiatif (Howie, 1976). Selanjutnya, semigrup komutatif memenuhi sifat asosiatif, tertutup dan komutatif. Monoid dengan memenuhi sifat asosiatif, tertutup dan terdapat unsur identitas (Lisapaly dan Persulessy, 2011).

Ring merupakan struktur aljabar yang terdiri atas suatu himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan dan perkalian (Rasiman dkk., 2018). Selanjutnya, semiring dibentuk dari ring *R* yang dihilangkan satu sifatnya yaitu elemen invers terhadap operasi penjumlahan (Subiono, 2013). Setiap ring adalah semiring, tapi sebaliknya belum tentu semua semiring itu adalah ring (Kandasamy, 2002).

Hal-hal yang diperlukan dalam pembentukan modul atas ring *R* adalah grup Abel $\langle M, + \rangle$, ring dengan elemen satuan $\langle R, +, . \rangle$, serta operasi $* : R \times M \to M$ dengan definisi $*(r, m) = r * m$, untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$ (Wijayanti dkk., 2016). Semimodul atas semiring merupakan generalisasi dari modul atas ring. Perbedaan utama pada modul atas ring dan semimodul atas semiring adalah jika pada modul disyaratkan setiap elemen memiliki invers, maka pada semimodul tidak terdapat syarat setiap elemennya memiliki invers terhadap operasi penjumlahan (Andari, 2016).

Konsep himpunan dapat membangun hampir untuk semua aspek matematika. Himpunan *rough* dan himpunan *fuzzy* merupakan perluasan dari himpunan. Himpunan *fuzzy* pertama kali dikembangkan oleh Zadeh pada tahun 1965. Himpunan *fuzzy* biasanya terletak pada rentang [0,1].

Pawlak pertama kali memperkenalkan konsep himpunan *rough* pada tahun 1982 yang merupakan himpunan bagian dari semesta yang dideskripsikan oleh suatu pasangan dari himpunan aproksimasi atas dan bawah. Himpunan *rough* juga telah dibahas pada beberapa peneliti antara lain Miao dkk. pada tahun 2005 melakukan penelitian tentang grup *rough* dan sifat-sifatnya. Zhang dkk. pada tahun 2006 juga melakukan penelitian tentang modul *rough*. Pada tahun 2013, Isaac dan Neelima membahas penelitian tentang ring *rough*. Selanjutnya, Praba dkk. pada tahun 2013 membahas mengenai penerapan monoid regular komutatif pada himpunan *rough*. Manimaran dkk. pada tahun 2014 melakukan penelitian mengenai monoid regular *idempotent* pada himpunan *rough* dengan operasi Praba *join* $\triangledown$. Kemudian penelitian dikembangkan kembali oleh Praba dkk. pada tahun 2015 mengenai penerapan konsep semiring pada himpunan *rough* dan pada tahun yang sama Sinha dan Prakas membahas mengenai modul proyektif *rough*. Selanjutnya, pada tahun 2016 Praba dkk. membahas mengenai graf total dan graf komplemen dari semiring pada himpunan *rough*. Penelitian terbaru oleh Hafifullah dkk. pada tahun 2022 membahas mengenai sifat-sifat barisan V-Koeksak pada grup *rough* dan pada tahun yang sama Nugraha dkk. membahas mengenai penerapan konsep struktur grup pada himpunan *rough*. Selanjutnya pada tahun 2023, Yanti dkk. membahas mengenai penerapan konsep himpunan *rough* pada struktur modul proyektif.

Himpunan *rough* dapat terbentuk menggunakan konsep Praba dengan diberikan sistem informasi $I = (U, A)$ dengan nilai keanggotaannya himpunan *fuzzy*. Selanjutnya X yang merupakan subset dari U membentuk kelas-kelas ekuivalensi, aproksimasi bawah dan aproksimasi atas. Pada penelitian ini, dikonstruksi semimodul atas semiring pada himpunan *rough* menggunakan konsep Praba. Selanjutnya, dikonstruksi *direct sum* dari dua semimodul atas semiring pada himpunan *rough*.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. mengkonstruksi semimodul atas semiring pada himpunan *rough* menggunakan konsep Praba;
2. mengkonstruksi *direct sum* dari dua semimodul atas semiring menggunakan konsep Praba;
3. menyelidiki sifat *direct sum* yang telah dikonstruksi sebelumnya.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini yaitu menambah pengetahuan mengenai penerapan himpunan *rough* pada konstruksi semimodul atas semiring menggunakan konsep Praba, serta menjadi sarana pembelajaran dan referensi untuk mengembangkan wawasan dalam mempelajari semimodul atas semiring pada himpunan *rough*.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai definisi-definisi beserta contoh yang berkaitan dan mendukung pembahasan dalam tesis ini yaitu tentang semimodul atas semiring, himpunan *rough*, penerapan himpunan *rough* pada beberapa struktur aljabar, dan himpunan *rough* menggunakan konsep Praba.

2.1 Semimodul atas Semiring

Sebelum membahas mengenai semimodul atas semiring, terlebih dahulu diberikan definisi-definisi tentang operasi biner, grup, semigrup, monoid, ring, semiring, dan modul atas ring.

Jika a dan b merupakan bilangan asli, maka hasil operasi penjumlahan $a + b$ juga merupakan bilangan asli dan hasilnya unik (tunggal). Jadi operasi $+$ merupakan operasi dua bilangan asli yang menghasilkan secara tunggal elemen himpunan yang sama, yaitu himpunan bilangan asli. Berikut definisi operasi biner.

Definisi 2.1.1 Operasi biner $*$ pada himpunan S adalah fungsi dari $S \times S$ ke S. Untuk setiap $(a, b) \in S \times S, *(a, b)$ di S dinotasikan dengan $a * b$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Berdasarkan Definisi 2.1.1, operasi biner pada himpunan S memetakan pasangan berurutan $(a, b) \in S \times S, *(a, b)$ di S dinotasikan dengan $a * b$ yang merupakan elemen dari S. Sebagai ilustrasi, jika dipilih $S = \mathbb{Z}$, dan $*$ adalah operasi penjumlahan bilangan bulat, maka $+$ merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$ karena $+(a, b)$ yang dinotasikan dengan $a + b$ merupakan bilangan bulat. Berikut contoh operasi biner.

Contoh 2.1.2 Operasi penjumlahan bilangan pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ merupakan operasi biner.

Berikut definisi himpunan bagian yang tertutup terhadap suatu operasi biner.

Definisi 2.1.3 Diberikan operasi biner $*$ dan himpunan bagian tak kosong H di S. Himpunan H dikatakan tertutup terhadap operasi biner $*$ jika untuk setiap $a, b \in H$, berlaku $a * b \in H$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Berikut contoh himpunan bagian yang tertutup terhadap suatu operasi biner.

Contoh 2.1.4 Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ beserta operasi penjumlahan bilangan pada $\mathbb{Z}$. Telah diketahui bahwa operasi penjumlahan bilangan merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$. Selanjutnya, $2\mathbb{Z} = \{2z | z \in \mathbb{Z}\}$ merupakan himpunan bagian dari $\mathbb{Z}$. Untuk setiap dua elemen di $2\mathbb{Z}$, hasil penjumlahan kedua bilangan tersebut berada di dalam himpunan $2\mathbb{Z}$. Akibatnya, himpunan $2\mathbb{Z}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan bilangan.

Operasi penjumlahan bilangan $+$ pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ bersifat komutatif yaitu $a + b = b + a$ dan bersifat asosiatif, yaitu $(a + b) + c = a + (b + c)$, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Demikian halnya dengan operasi perkalian bilangan pada $\mathbb{Z}$. Berikut definisi sifat operasi biner pada suatu himpunan.

Definisi 2.1.5 Diberikan operasi biner $*$ pada himpunan A.

1. Operasi $*$ bersifat asosiatif, jika $(a*b)*c = a*(b*c)$, untuk setiap $a, b, c \in A$;
2. Operasi $*$ bersifat komutatif, jika $a*b = b*a$ untuk setiap $a, b \in A$ (Setiawan, 2011).

Berikut diberikan contoh dari sifat operasi biner.

Contoh 2.1.6

1. Operasi $*$ didefinisikan pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dengan $a * b = \frac{1}{2}ab$. Akan ditunjukkan bahwa $*$ bersifat asosiatif dan komutatif. Diberikan sebarang $a, b, c \in \mathbb{R}$. Karena $(a * b) * c = (\frac{1}{2}ab) * c = (\frac{1}{2})((\frac{1}{2}ab)c) = (\frac{1}{4})(ab)c$ dan pada sisi lain $a * (b * c) = a * ((\frac{1}{2})bc) = (\frac{1}{2})a(\frac{1}{2}bc) = (\frac{1}{4})(ab)c$, maka $*$ bersifat asosiatif, dan karena $a * b = (\frac{1}{2})ab = (\frac{1}{2})ba = b * a$ maka $*$ bersifat komutatif.

2. Operasi $\oplus$ didefinisikan pada bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan aturan $a \oplus b = a + 2b$. Akan ditunjukkan bahwa $\oplus$ tidak komutatif dan tidak asosiatif. Diberikan sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Karena pada satu sisi $(a \oplus b) \oplus c = (a + 2b) \oplus c = (a + 2b) + 2c$ dan pada sisi lain $a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b + 2c) = a + 2(b + 2c) = a + (2b + 4c) = (a + 2b) + 4c$.

Sebagai contoh, pilih $a = 1, b = 2, c = 3$, diperoleh $(a \oplus b) \oplus c = 11$ dan $a \oplus (b \oplus c) = 17$. Hal ini menyatakan bahwa $\oplus$ tidak bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$. Karena $a \oplus b = a + 2b$ dan $b \oplus a = b + 2a$ dan kedua hasil ini tidak sama untuk $a \neq b$ maka $\oplus$ tidak komutatif.

Pada Definisi 2.1.5, dijelaskan sifat operasi biner asosiatif dan komutatif. Selain itu, operasi biner memenuhi hukum identitas dan invers. Berikut definisi hukum identitas dan invers.

Definisi 2.1.7

1. $\langle A, * \rangle$ memenuhi hukum identitas asalkan A memuat suatu anggota e sehingga $e * a = a * e = a$, untuk setiap $a \in A$. Sifat demikian dinamakan identitas untuk $\langle A, * \rangle$;

2. $\langle A, * \rangle$ memenuhi hukum invers asalkan A memuat suatu identitas e untuk operasi $*$ dan untuk sebarang $a \in A$ terdapat suatu anggota $a' \in A$ yang memenuhi $a * a' = a' * a = e$. Elemen a' yang memenuhi sifat tersebut dinamakan invers dari a (Setiawan, 2011).

Berikut diberikan contoh hukum identitas dan invers.

Contoh 2.1.8

1. Himpunan $\mathbb{Z}$ dengan operasi $*$ yang didefinisikan oleh $a * b = a + b - 5$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ merupakan operasi biner. Akan diselidiki elemen identitas operasi $*$ pada $\mathbb{Z}$ ini untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, karena $a * e = a + e - 5 = a$ dan $e * a = e + a - 5 = a$, dimana $e = 5$, maka berlaku $a * e = e * a = a$;

2. Himpunan $\mathbb{Z}$ dengan operasi $*$ yang didefinisikan oleh $a*b = a+b-5$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ merupakan operasi biner yang memiliki elemen identitas 5. Akan diselidiki setiap elemen $\mathbb{Z}$ mempunyai invers terhadap operasi $*$. Untuk $a * a^{-1} = e$ jika dan hanya jika $a * a^{-1} = a + a^{-1} - 5 = 5$ jika dan hanya jika $a^{-1} = 10 - a$ dan untuk $a^{-1} * a = e$ jika dan hanya jika $a^{-1} * a = a^{-1} + a - 5 = 5$ jika dan hanya jika $a^{-1} = 10 - a$. Jadi dapat disimpulkan bahwa untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, terdapat $a^{-1} \in \mathbb{Z}$ yaitu $a^{-1} = 10 - a$.

Sistem matematika yang terdiri atas satu himpunan dan satu operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu dinamakan grup. Berikut definisi grup.

Definisi 2.1.9 Sistem matematika $\langle G, *\rangle$ adalah grup jika memenuhi aksioma-aksioma berikut.

1. Operasi biner $*$ bersifat asosiatif, yaitu $(a * b) * c = a * (b * c)$ untuk setiap $a, b, c \in G$.

2. Terdapat elemen identitas $e \in G$ untuk operasi biner $*$ sehingga untuk setiap $x \in G$, berlaku $e * x = x * e = x$.

3. Untuk setiap $a \in G$, berlaku terdapat elemen invers dari a di G, dinotasikan dengan a^{-1} sehingga $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Grup $\langle G, *\rangle$ ditulis dengan G, yang berarti grup G dengan operasi biner $*$ pada himpunan tersebut. Berikut diberikan contoh grup.

Contoh 2.1.10 Himpunan $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ dan $\mathbb{R}$ merupakan grup terhadap operasi penjumlahan. Himpunan $\mathbb{R}^*$ (himpunan bilangan real yang tak nol), $\mathbb{Q}^*$ (himpunan bilangan rasional yang tak nol), $\mathbb{C}^*$ (himpunan bilangan kompleks yang tak nol) merupakan grup terhadap operasi perkalian.

Grup komutatif disebut juga dengan grup Abel. Nama ini diberikan sebagai bentuk penghargaan terhadap matematikawan Norwegia bernama Niels Hendrik Abel. Berikut definisi grup Abel.

Definisi 2.1.11 Grup G dikatakan grup komutatif (grup Abel) jika operasi biner $*$ bersifat komutatif, yaitu $a * b = b * a$, untuk setiap $a, b \in G$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Berikut contoh grup Abel.

Contoh 2.1.12 Akan ditunjukkan himpunan bilangan $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan bilangan merupakan grup Abel. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ adalah grup karena memenuhi syarat grup (tertutup, asosiatif, identitas dan invers) dan komutatif karena untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + b = b + a$. Karena memenuhi kelima syarat tersebut, dapat dikatakan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan bilangan merupakan grup Abel.

Grup yang tidak memenuhi sifat komutatif disebut grup non komutatif atau grup non Abel. Berikut diberikan contoh grup non Abel.

Contoh 2.1.13 Diberikan himpunan matriks yang dapat dibalik *invertible* ber-ordo 2×2 dengan entri bilangan real $M_2(\mathbb{R})$ terhadap operasi perkalian matriks. Akan ditunjukkan bahwa $\langle M, \cdot \rangle$ bukan grup Abel. Diberikan sebarang $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

1. $AB = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

   Jadi operasi perkalian bersifat tertutup di M;

2. Operasi perkalian matriks bersifat asosiatif, yaitu: $A(BC) = (AB)C$, untuk setiap $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$;

3. Untuk setiap $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ terdapat $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

sehingga $AI = IA = A$. Jadi I merupakan elemen netral terhadap operasi perkalian matriks;

4. Karena sudah diketahui bahwa matriks tersebut adalah matriks *invertible*, maka setiap elemen di M mempunyai invers.

Dari (1)-(4), dapat disimpulkan bahwa $\langle M, \cdot \rangle$ merupakan grup.

Misalkan diambil matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,
maka $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ sedangkan
$BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $AB \neq BA$. Karena sifat komutatif tidak terpenuhi, maka $\langle M, \cdot \rangle$ bukan merupakan grup Abel.

Semigrup adalah struktur aljabar yang terdiri dari himpunan dengan operasi biner yang bersifat asosiatif. Semigrup sebagai generalisasi grup tanpa elemen identitas atau invers. Berikut definisi semigrup.

Definisi 2.1.14 Himpunan tak kosong S yang dilengkapi dengan operasi biner $*$ dikatakan semigrup jika $*$ bersifat asosiatif yaitu: untuk setiap $x, y, z \in S$ maka $(x * y) * z = x * (y * z)$ (Howie, 1976).

Semigrup juga bersifat tertutup terhadap operasi binernya. Berikut diberikan definisi yang bersifat tertutup terhadap operasi biner.

Definisi 2.1.15 Misalkan S suatu semigrup. Himpunan bagian tak kosong T dari S dikatakan subsemigrup dari S jika T tertutup terhadap operasi binernya (Howie, 1976).

Berdasarkan Definisi 2.1.14 dan 2.1.15. $\langle G, * \rangle$ disebut semigrup jika memenuhi sifat asosiatif dan tertutup terhadap operasi biner. Berikut contoh semigrup.

Contoh 2.1.16 Akan dibuktikan $\mathbb{Z}$ merupakan semigrup terhadap operasi $+$ dengan kedua syarat semigrup pada Definisi 2.1.14 dan Definisi 2.1.15 yaitu operasi $+$ pada $\mathbb{Z}$ bersifat tertutup karena untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}, a + b \in \mathbb{Z}$ dan operasi $+$ pada $\mathbb{Z}$ bersifat asosiatif. Karena untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}, (a + b) + c = a + (b + c) \in \mathbb{Z}$. Jadi, karena kedua syarat semigrup terpenuhi maka $\mathbb{Z}$ merupakan semigrup terhadap operasi $+$.

Jika operasi semigrup bersifat komutatif maka semigrup disebut semigrup komutatif atau semigrup Abel. Berikut definisi semigrup komutatif.

Definisi 2.1.17 Diberikan himpunan $S \neq \varnothing$, himpunan S merupakan semigrup komutatif jika $\langle S, * \rangle$ memenuhi sifat komutatif terhadap operasi $*$ (Lisapaly dan Persulessy, 2011).

Berdasarkan Definisi 2.1.17 semigrup komutatif harus memenuhi sifat asosiatif, tertutup dan komutatif. Berikut contoh semigrup komutatif.

Contoh 2.1.18 Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_5$ dengan operasi biner $+_5$. Akan ditunjukkan bahwa $\langle \mathbb{Z}_5, +_5 \rangle$ merupakan semigrup komutatif. Berikut diberikan tabel *Cayley* semigrup komutatif.

Tabel 2.1 Tabel *Cayley* semigrup komutatif

$+_5$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

Berdasarkan Tabel 2.1 dapat diketahui bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_5$, dengan operasi biner $+_5$ berlaku $x +_5 y = y +_5 x$. Jadi $\mathbb{Z}_5$ merupakan semigrup komutatif

Monoid adalah struktur aljabar antara grup dan semigrup, yaitu semigrup yang memiliki elemen identitas. Berikut definisi monoid.

Definisi 2.1.19 Himpunan $\langle S, *\rangle$ merupakan semigrup dengan elemen identitas jika S memuat elemen netral terhadap operasi $*$ yaitu terdapat $e \in S$, untuk setiap $s \in S, e{*}s = s{*}e = s$. Selanjutnya, $\langle S, *\rangle$ disebut monoid (Lisapaly dan Persulessy, 2011).

Diketahui bahwa semua grup adalah semigrup dan semua semigrup adalah monoid. Berikut contoh monoid.

Contoh 2.1.20 Diberikan himpunan bilangan $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ dengan operasi biner perkalian bilangan $*$. Akan dibuktikan bahwa $\langle \mathbb{Z}, *\rangle$ merupakan monoid.

1. Karena untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}, a * b \in \mathbb{Z}$ yang berarti operasi $*$ pada $\mathbb{Z}$ bersifat tertutup;
2. Karena untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}, (a * b) * c = a * (b * c) \in \mathbb{Z}$ yang berarti operasi $*$ pada $\mathbb{Z}$ bersifat asosiatif;
3. Karena untuk setiap a, terdapat $1 \in \mathbb{Z}$, sehingga $a * 1 = 1 * a = a$, yang berarti 1 adalah elemen identitas terhadap operasi perkalian.

Dari (1)-(3), dapat disimpulkan bahwa $\langle \mathbb{Z}, *\rangle$ merupakan monoid.

Setelah mengetahui definisi semigrup dan monoid, akan didefinisikan mengenai elemen *idempotent*.

Definisi 2.1.21 Diberikan semigrup S. Jika $a \in S$ dan $a = a^2 = aa$, maka a disebut elemen *idempotent* (Clifford, 1954).

Berikut contoh elemen *idempotent* pada suatu semigrup.

Contoh 2.1.22 Diberikan himpunan tak kosong $X = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{5}\} \subset \mathbb{Z}_{20}$ terhadap operasi biner $\cdot_{20}$. Akan ditunjukkan himpunan X merupakan semigrup. Setiap elemen himpunan X terhadap operasi biner $\cdot_{20}$ merupakan elemen *idempotent* dinyatakan dalam tabel *Cayley* berikut.

Tabel 2.2 Tabel *Cayley* perkalian *idempotent*

$\cdot_{20}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$

Berdasarkan Tabel 2.2 telah ditunjukkan bahwa untuk setiap $a, b, c \in X$, berlaku $a \cdot_{20} b \in X$, dan memenuhi sifat asosiatif untuk setiap $a, b, c \in X$ berlaku $a \cdot_{20} (b \cdot_{20} c) = (a \cdot_{20} b) \cdot_{20} c$. Jadi $\langle X, \cdot_{20} \rangle$ merupakan semigrup. Setiap elemen dari himpunan X merupakan elemen *idempotent*, karena memenuhi $a \cdot_{20} a = a$.

Selanjutnya diberikan definisi *band*.

Definisi 2.1.23 Suatu semigrup S yang setiap elemennya merupakan elemen *idempotent* disebut *band* (Clifford, 1954).

Berikut contoh *band*.

Contoh 2.1.24 Berdasarkan Contoh 2.1.22, karena setiap elemen dari himpunan tak kosong X merupakan elemen *idempotent*, jadi himpunan X merupakan *band*.

Selanjutnya, struktur aljabar yang terdiri dari suatu himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yaitu terhadap penjumlahan dan perkalian disebut dengan ring. Berikut definisi ring.

Definisi 2.1.25 Diberikan suatu himpunan tak kosong R yang dilengkapi dengan dua operasi yakni $+$ (operasi penjumlahan) dan $*$ (operasi perkalian), selanjutnya dilambangkan dengan $\langle R, +, * \rangle$. Struktur $\langle R, +, * \rangle$ dinamakan ring, jika memenuhi aksioma:

1. $\langle R, + \rangle$ merupakan grup Abel, yaitu:

    (a) $+$ bersifat tertutup di R, yakni untuk setiap $a, b \in R, a + b \in R$;

    (b) $+$ bersifat assosiatif di R, yakni untuk setiap $a, b, c \in R, (a + b) + c = a + (b + c)$;

(c) Terdapat elemen identitas, yakni terdapat $e \in R$, untuk setiap $a \in R, a+ e = e + a = a$;

(d) Setiap elemen punya invers, yakni untuk setiap $a \in R$, terdapat $a^{-1} \in R, a + a^{-1} = a^{-1} + a = e$. Untuk selanjutnya a^{-1} dinamakan invers dari a;

(e) $+$ bersifat Komutatif, yakni untuk setiap $a, b \in R, a + b = b + a$.

2. $\langle R, *\rangle$ merupakan semigrup, yaitu:

   (a) $*$ bersifat tertutup di R, yakni untuk setiap $a, b \in R, a * b \in R$;

   (b) $\cdot$ bersifat assosiatif di R, yakni untuk setiap $a, b, c \in R, (a * b) * c = a * (b * c)$.

3. Sifat distributif kiri dan distributif kanan, yakni untuk setiap $a, b, c \in R$.

   (a) $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$;

   (b) $(a + b) * c = (a * b) + (b * c)$ (Rasiman dkk., 2018).

Berdasarkan Definisi 2.1.25 dapat disimpulkan bahwa suatu struktur aljabar dengan dua operasi biner dikatakan suatu ring jika memenuhi syarat-syarat tersebut. Agar lebih memahami definisi ring, berikut diberikan contoh ring.

Contoh 2.1.26 Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}$ bersama operasi penjumlahan biasa dan operasi perkalian biasa yaitu $\langle \mathbb{Z}, +, *\rangle$ merupakan ring.

1. Akan dibuktikan bahwa $\langle \mathbb{Z}, +\rangle$ merupakan grup Abel, yaitu:

   (a) Operasi $+$ bersifat tertutup di R, yakni untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}, a + b \in \mathbb{Z}$;

   (b) Operasi $+$ bersifat assosiatif di $\mathbb{Z}$, yakni untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}, (a + b) + c = a + (b + c)$;

   (c) Terdapat elemen identitas, yakni terdapat $e = 0 \in \mathbb{Z}$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}, a + 0 = 0 + a = a$;

(d) Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, terdapat invers dari a terhadap operasi $+$ yaitu $a^{-1} = -a \in \mathbb{Z}$, berlaku $a + (-a) = (-a) + a = 0$;

(e) Operasi $+$ bersifat komutatif terhadap penjumlahan bilangan bulat, yakni untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}, a + b = b + a$.

Karena kelima syarat terpenuhi, diperoleh $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ grup Abel.

2. Akan dibuktikan bahwa $\langle \mathbb{Z}, * \rangle$ merupakan semigrup, yaitu:

   (a) $*$ bersifat tertutup di $\mathbb{Z}$, yakni untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}, a * b \in \mathbb{Z}$;

   (b) $*$ bersifat assosiatif di $\mathbb{Z}$, yakni untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}, (a * b) * c = a * (b * c)$.

   Karena kedua syarat terpenuhi, maka diperoleh $\langle \mathbb{Z}, * \rangle$ semigrup.

3. Sifat distributif kiri dan distributif kanan, yakni untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$, berlaku:

   (a) $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$;

   (b) $(a + b) * c = (a * b) + (b * c)$.

   Karena kedua syarat terpenuhi, maka berlaku distributif.

Karena memenuhi semua syarat ring, $\langle \mathbb{Z}, +, * \rangle$ merupakan ring.

Suatu ring dikatakan komutatif bila pada operasi perkalian terpenuhi sifat komutatifnya. Secara singkat akan dijelaskan syarat dari ring komutatif pada definisi berikut.

Definisi 2.1.27 Suatu struktur aljabar dengan dua operasi biner $\langle R, +, * \rangle$ dikatakan suatu ring komutatif jika operasi $*$ bersifat komutatif, yaitu $a * b = b * a$, untuk setiap $a, b \in R$ (Rasiman dkk., 2018).

Berikut diberikan contoh ring komutatif.

Contoh 2.1.28 Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. $\mathbb{Z}_6$ merupakan suatu ring komutatif $\langle \mathbb{Z}_6, +, * \rangle$.

Semiring didefinisikan juga sebagai himpunan tak kosong dengan dua operasi biner (penjumlahan dan perkalian), tetapi tanpa persyaratan bahwa setiap elemen harus mempunyai invers terhadap operasi penjumlahan. Jika pada ring $\langle R, + \rangle$ grup Abel, maka pada semiring $\langle S, + \rangle$ hanya membentuk monoid komutatif, yang berarti setiap elemennya tidak perlu memiliki invers terhadap operasi penjumlahan. Berikut definisi semiring.

Definisi 2.1.29 Suatu semiring $\langle S, +, * \rangle$ adalah suatu himpunan tak kosong S disertai dengan dua operasi biner $+$ dan $*$, yang memenuhi aksioma berikut:

1. $\langle S, + \rangle$ merupakan semigrup komutatif dengan elemen netral 0, yaitu Untuk setiap $x, y, z \in S$ memenuhi:
   (a) $x + y = y + x$ (komutatif terhadap penjumlahan);
   (b) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (assosiatif terhadap penjumlahan);
   (c) $x + 0 = 0 + x = x$.
2. $\langle S, * \rangle$ adalah semigrup dengan elemen satuan 1, yaitu untuk setiap $x, y, z \in S$ memenuhi:
   (a) $(x * y) * z = x * (y * z)$ (assosiatif terhadap perkalian);
   (b) $x * 1 = 1 * x = x$.
3. Sifat penyerapan elemen netral 0 terhadap operasi $*$, yaitu untuk setiap $x \in S$ memenuhi: $x * 0 = 0 * x = 0$;
4. Operasi $*$ distributif terhadap $+$, yaitu $x, y, z \in S$ berlaku: $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$ dan $(x + y) * z = (x * z) + (y * z)$ (Subiono, 2013).

Dari ring R dapat dibentuk struktur baru yang dinamakan semiring jika dihilangkan satu sifat yaitu element invers terhadap operasi penjumlahan. Semua ring adalah semiring, tapi sebaliknya belum tentu berlaku (Kandasamy, 2002).

Bila suatu semiring $\langle S, +, * \rangle$ bersifat komutatif terhadap operasi $*$, yaitu untuk setiap $x, y \in S$ berlaku $x * y = y * x$, $\langle S, +, * \rangle$ disebut semiring komutatif. Sedangkan bila suatu semiring $\langle S, +, * \rangle$ mempunyai sifat idempoten terhadap operasi $+$ yaitu untuk setiap $x \in S$ berlaku $x + x = x$, maka $\langle S, +, * \rangle$ disebut semiring idempoten (dioid). Berikut contoh semiring.

Contoh 2.1.30 Diberikan $\mathbb{R}^0$ adalah himpunan semua bilangan riil positif digabung bilangan nol. Himpunan $\mathbb{R}^0$ merupakan semiring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian bilangan riil biasa, sebab untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}^0$ berlaku:

1. $\langle \mathbb{R}^0, + \rangle$ merupakan semigrup komutatif dengan elemen netral 0, yaitu untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}^0$ memenuhi:

   (a) $x + y = y + x$ (komutatif terhadap penjumlahan);

   (b) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (assosiatif terhadap penjumlahan);

   (c) $x + 0 = 0 + x = x$.

   Karena (a)-(c) terpenuhi, $\langle \mathbb{R}^0, + \rangle$ merupakan semigrup komutatif dengan elemen netral 0.

2. $\langle \mathbb{R}^0, * \rangle$ adalah semigrup dengan elemen satuan 1, yaitu untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}^0$ memenuhi:

   (a) $(x * y) * z = x * (y * z)$ (assosiatif terhadap perkalian);

   (b) $x * 1 = 1 * x = x$.

   Karena (a)-(b) terpenuhi, $\langle \mathbb{R}^0, * \rangle$ merupakan semigrup dengan elemen satuan 1.

3. $x * 0 = 0 * x = 0$ sifat penyerapan elemen netral 0 terhadap operasi $*$;

4. $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$ dan $(x + y) * z = (x * z) + (y * z)$, yaitu operasi $*$ bersifat distributif terhadap $+$.

Modul atas ring merupakan perumuman dari ruang vektor atas lapangan. Hal-hal yang diperlukan dalam pembentukan modul atas ring R yaitu grup Abel $\langle M, + \rangle$, ring dengan elemen satuan $\langle R, +, \cdot \rangle$, serta operasi $\circ : R \times M \to M$ dengan definisi $\circ(r, m) = r * m$, untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$. Pada modul, syarat skalar diperumum menjadi elemen pada suatu ring dan bukan lapangan. Berikut definisi modul kanan dan modul kiri atas ring.

Definisi 2.1.31 Diberikan grup Abel $\langle M, + \rangle$ dan ring $\langle R, +, \cdot \rangle$. Diberikan pula operasi (disebut pergandaan skalar) $\circ : R \times M \to M$. Himpunan M disebut modul kiri atas R (dinotasikan M R - Modul), jika memenuhi ketiga aksioma pergandaan skalar berikut:

1. $r \circ (m_1 + m_2) = r \circ m_1 + r \circ m_2$; untuk setiap $m_1, m_2 \in M, r \in R$;
2. $(r_1 + r_2) \circ m = r_1 \circ m + r_2 \circ m$; untuk setiap $m \in M, r_1, r_2 \in R$;
3. $(r_1 \cdot r_2) \circ m = r_1 \circ (r_2 \circ m)$; untuk setiap $m \in M, r_1, r_2 \in R$;
4. (Jika R memenuhi elemen satuan 1) maka $1m = m$ (Wijayanti dkk., 2016).

Definisi 2.1.32 Diberikan grup Abel $\langle M, + \rangle$ dan ring $\langle R, +, \cdot \rangle$. Diberikan pula operasi biner (disebut pergandaan skalar) $\circ : M \times R \to M$. Himpunan M disebut modul kanan atas R (dinotasikan M Modul - R), jika memenuhi ketiga aksioma pergandaan skalar berikut:

1. $(m_1 + m_2) \circ r = m_1 \circ r + m_2 \circ r$; untuk setiap $m_1, m_2 \in M, r \in R$;
2. $m \circ (r_1 + r_2) = m \circ r_1 + m \circ r_2$; untuk setiap $m \in M, r_1, r_2 \in R$;
3. $m \circ (r_1 \cdot r_2) = (m \circ r_1) \circ r_2$; untuk setiap $m \in M, r_1, r_2 \in R$;
4. (Jika R memenuhi elemen satuan 1) maka $m1 = m$ (Wijayanti dkk., 2016).

Akan tetapi tidak menutup kemungkinan bahwa operasi pergandaan skalar pada modul dapat berlaku dari kiri dan sekaligus dari kanan. Sifat modul dengan operasi pergandaan tersebut dapat dinyatakan dengan definisi berikut.

Definisi 2.1.33 Diberikan grup Abel $\langle M, +\rangle$ dan ring $\langle R, +, \cdot\rangle$. Jika M adalah modul kiri sekaligus modul kanan atas R maka M disebut *bimodul* (Yuwaningsih, 2020).

Berikut diberikan contoh modul atas ring.

Contoh 2.1.34 Diberikan sebarang ring R. Grup Abel R^n merupakan modul kiri atas R terhadap operasi pergandaan skalar: $a(r_1, r_2, \cdots, r_n) = (ar_1, ar_2, \cdots, ar_n)$, untuk setiap $a \in R$ dan $(r_1, r_2, \cdots, r_n) \in R^n$. Karena untuk setiap $a, b \in R$ dan $(r_1, r_2, \cdots, r_n), (s_1, s_2, \cdots, s_n) \in R^n$, berlaku:

1. $a((r_1, r_2, \cdots, r_n) + (s_1, s_2, \cdots, s_n))$
   $= a(r_1 + s_1, r_2 + s_2, \cdots, r_n + s_n)$
   $= (ar_1 + as_1, ar_2 + as_2, \cdots, ar_n + as_n)$
   $= (ar_1, ar_2, \cdots, ar_n) + (as_1, as_2, \cdots, as_n)$
   $= a(r_1, r_2, \cdots, r_n) + a(s_1, s_2, \cdots, s_n)$;

2. $(ab)(r_1, r_2, \cdots, r_n)$
   $= ((ab)r_1, (ab)r_2, \cdots, (ab)r_n)$
   $= (a(br_1), a(br_2), \cdots, a(br_n))$
   $= a(br_1, br_2, \cdots, br_n)$
   $= a(b(r_1, r_2, \cdots, r_n))$;

3. $(a + b)(r_1, r_2, \cdots, r_n)$
   $= ((a + b)r_1, (a + b)r_2, \cdots, (a + b)r_n)$
   $= (ar_1 + br_1, ar_2 + br_2, \cdots, ar_n + br_n)$
   $= (ar_1, ar_2, \cdots, ar_n) + (br_1, br_2, \cdots, br_n)$
   $= a(r_1, r_2, \cdots, r_n) + b(r_1, r_2, \cdots, r_n)$;

4. $1(r_1, r_2, \cdots, r_n)$
$= (1r_1, 1r_2, \cdots, 1r_n)$
$= (r_1, r_2, \cdots, r_n)$.

Jadi R^n merupakan modul kiri atas R.

Semimodul merupakan generalisasi dari modul. Perbedaan antara modul dengan semimodul terletak pada syarat pertama, yaitu $\langle M, + \rangle$. Jika pada modul $\langle M, + \rangle$ merupakan grup komutatif yang memenuhi sifat tertutup, assosiatif, memiliki elemen identitas terhadap $+$, setiap elemen memiliki invers terhadap $+$, dan bersifat komutatif, maka pada semimodul $\langle M, + \rangle$ merupakan monoid komutatif yang memenuhi sifat tertutup, assosiatif, memiliki elemen identitas, dan komutatif. Dengan kata lain, perbedaan utama pada modul dan semimodul adalah jika pada modul disyaratkan setiap elemen memiliki invers, maka pada semimodul tidak terdapat syarat memiliki invers untuk setiap elemen (Andari, 2016). Semimodul atas semiring adalah perluasan dari teori modul atas ring. Definisi dari semimodul atas semiring sedikit berbeda dari definisi modul atas ring.

Definisi 2.1.35 Diberikan himpunan tak kosong M dan semiring komutatif dengan elemen satuan S. M disebut semimodul kanan atas semiring S, dinotasikan M:S-semimodul kanan, apabila memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. $\langle M, + \rangle$ merupakan monoid komutatif;
2. Didefinisikan pemetaan fungsi $\bullet : M \times S \to M$
$(m, r) \mapsto \bullet(m, r) = m \bullet r = mr$ dan untuk setiap $r, r_1, r_2 \in S$, untuk setiap $m, m_1, m_2 \in M$ memenuhi:
   (a) $(m_1 + m_2)r = m_1 r + m_2 r$;
   (b) $m(r_1 + r_2) = mr_1 + mr_2$;
   (c) $m(r_1 r_2) = (mr_1)r_2$;
   (d) $m \cdot 1 = m$;
   (e) $m0_s = 0_m = 0_m \cdot m$ (Andari, 2016).

Berikut diberikan contoh semimodul kanan atas semiring.

Contoh 2.1.36 Diberikan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. $\mathbb{Z}_6$ merupakan semimodul kanan atas semiring $\mathbb{Z}_6$, dinotasikan $\mathbb{Z}_6 : \mathbb{Z}_6-$ semimodul kanan, sebab:

1. $\langle \mathbb{Z}_6, + \rangle$ merupakan monoid komutatif;
2. Didefinisikan pemetaan $\bullet : \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$
   $(m, r) \mapsto \bullet(m, r) = mr$ dan untuk setiap $r, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}_6$, untuk setiap $m, m_1,$ $m_2 \in \mathbb{Z}_6$ memenuhi:
   (a) $(m_1 + m_2)r = m_1r + m_2r$;
   (b) $m(r_1 + r_2) = mr_1 + mr_2$;
   (c) $m(r_1r_2) = (mr_1)r_2$;
   (d) $m \cdot 1 = m$;
   (e) $m0_s = 0_m = 0_m \cdot m$

   Diperoleh $\mathbb{Z}_6$ merupakan semimodul kanan, sedemikian sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{Z}_6$ merupakan semimodul atas semiring $\mathbb{Z}_6(\mathbb{Z}_6 : \mathbb{Z}_6-$ semimodul).

Definisi 2.1.37 Diberikan M himpunan tak kosong dan S merupakan semiring komutatif dengan elemen satuan. M disebut semimodul kiri atas semiring S, dinotasikan M:S- semimodul kiri, apabila memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. $\langle M, + \rangle$ merupakan monoid komutatif;
2. Didefinisikan pemetaan fungsi $\bullet : S \times M \to M$
   $(r, m) \mapsto \bullet(r, m) = r \bullet m = rm$ dan untuk setiap $r, r_1, r_2 \in S$, untuk setiap $m, m_1, m_2 \in M$ memenuhi:
   (a) $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$;
   (b) $(r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m$;
   (c) $(r_1r_2)m = r_1(r_2m)$;

(d) $1 \cdot m = m$;

(e) $0_s m = 0_m = m \cdot 0_m$ (Andari, 2016).

Berikut diberikan contoh semimodul kiri atas semiring.

Contoh 2.1.38 Diberikan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. $\mathbb{Z}_6$ merupakan semimodul kiri atas semiring $\mathbb{Z}_6$, dinotasikan $\mathbb{Z}_6 : \mathbb{Z}_6-$ semimodul kiri, sebab:

1. $\langle \mathbb{Z}_6, + \rangle$ merupakan monoid komutatif;

2. Didefinisikan pemetaan $\bullet : \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$
   $(r, m) \mapsto rm$ dan untuk setiap $r, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}_6$, untuk setiap $m, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_6$ memenuhi:

   (a) $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$;

   (b) $(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$;

   (c) $(r_1 r_2)m = r_1(r_2 m)$;

   (d) $1 \cdot m = m$;

   (e) $0_s m = 0_m = m \cdot 0_m$.

   Diperoleh $\mathbb{Z}_6$ merupakan semimodul kiri, sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{Z}_6$ merupakan semimodul atas semiring $\mathbb{Z}_6(\mathbb{Z}_6 : \mathbb{Z}_6-$ semimodul).

2.2 Himpunan *Rough*

Sebelum membahas mengenai himpunan *rough*, terlebih dahulu diberikan definisi-definisi tentang relasi, ruang aproksimasi, dan himpunan *fuzzy*.

Relasi merupakan hubungan antara dua elemen himpunan. Berikut definisi relasi pada himpunan.

Definisi 2.2.1 Relasi R dari himpunan A ke himpunan B adalah himpunan bagian dari $A \times B$. Dalam simbol dapat dituliskan: Relasi $R \subseteq A \times B$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Berdasarkan Definisi 2.2.1, produk kartesius $A \times B$, dapat dinyatakan $A \times B = \{(a, b)|a \in A \text{ dan } b \in B\}$. Himpunan A disebut daerah asal *(domain)* dari R dan himpunan B disebut daerah hasil *(range)* dari R. Misalkan R relasi dari himpunan A ke himpunan B. Jika $(x, y) \in R$ maka ditulis ${}_xR_y$, dibaca x berelasi dengan y terhadap relasi R. Jika $A = B$, maka relasi R disebut relasi biner pada A. Berikut contoh relasi R.

Contoh 2.2.2 Diberikan himpunan $A = \{2, 3, 4\}$ dan himpunan $B = \{p, q, r\}$. Jika didefinisikan $R = \{(2, p), (2, q), (3, p)\} \subseteq A \times B$, maka R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B. Karena $(2, p) \in R$, dapat dikatakan bahwa 2 berelasi dengan p dan dapat ditulis ${}_2R_p$.

Berikut definisi dari sifat-sifat relasi R.

Definisi 2.2.3 Diberikan relasi biner R pada himpunan A. Relasi R disebut:

1. refleksif, jika untuk setiap $x \in A,_x R_x$;
2. simetris, jika untuk setiap $x, y \in A,_x R_y$ berakibat ${}_yR_x$;
3. transitif, jika untuk setiap $x, y, z \in A,_x R_y$ dan ${}_yR_z$ berakibat ${}_xR_z$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

Berdasarkan Definisi 2.2.3 relasi R tidak bersifat refleksif jika terdapat $x \in A$ sedemikian sehingga x tidak berelasi dengan x. Relasi R tidak bersifat simetris jika terdapat $(x, y) \in A$ tetapi $(x, y) \notin A$. Relasi R tidak bersifat transitif jika terdapat (x, y) dan (y, z) didalam R tetapi (x, z) tidak didalam R. Berikut diberikan contoh relasi R yang berkaitan dengan sifat-sifatnya.

Contoh 2.2.4 Misalkan himpunan $A = \{2, 3, 4\}$ dan didefinisikan relasi R pada himpunan A yaitu $R = \{(2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 3), (3, 4)\}$. Karena $\{(2, 2), (3, 3), (4, 4)\} \subset R$ yang berarti ${}_xR_x$, untuk setiap $x \in A$, maka relasi R bersifat refleksif. Karena $(2, 3) \in R$ dan $(3, 2) \notin R$, maka relasi R R tidak bersifat simetris. Karena $(2, 3) \in R, (3, 4) \in R$ dan $(2, 4) \notin R$, maka relasi R tidak bersifat transitif.

Jika suatu relasi R bersifat refleksif, simetris, dan transitif, maka relasi R tersebut dinamakan relasi ekuivalensi. Berikut diberikan definisinya.

Definisi 2.2.5 Diberikan relasi biner R pada himpunan A. Relasi R disebut relasi ekuivalensi jika relasi R bersifat refleksif, simetris dan transitif (Fitriani dan Faisol, 2022).

Berikut contoh relasi ekuivalensi.

Contoh 2.2.6 Didefinisikan relasi R pada himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ sebagai berikut: ${}_xR_y$ jika dan hanya jika $x^2 = y^2$, untuk setiap $x, y \in \mathbb{N}$. Akan ditunjukkan relasi R merupakan relasi ekuivalensi.

1. Diberikan sebarang $x \in \mathbb{N}$. Karena $x^2 = x^2$, diperoleh ${}_xR_x$. Oleh karena itu, relasi R bersifat refleksif;

2. Diberikan sebarang $x, y \in \mathbb{N}$, dengan ${}_xR_y$. Oleh karena itu, $x^2 = y^2$ yang berakibat $y^2 = x^2$ sehingga diperoleh ${}_yR_x$. Jadi, relasi bersifat simetris;

3. Diberikan sebarang $x, y, z \in \mathbb{N}$ dengan ${}_xR_y$ dan ${}_yR_z$. Oleh karena itu, $x^2 = y^2$ dan $y^2 = z^2$ yang berakibat $x^2 = z^2$ atau ${}_xR_z$. Jadi, relasi R bersifat transitif.

Dari (1)-(3), dapat disimpulkan bahwa relasi R merupakan relasi ekuivalensi.

Kelas ekuivalensi adalah partisi dalam suatu himpunan yang dilakukan berdasarkan suatu relasi ekuivalensi. Berikut definisi kelas ekuivalensi.

Definisi 2.2.7 Diberikan relasi ekuivalensi R pada himpunan tak kosong A. Untuk suatu $x \in A$, kelas ekuivalensi dari x yang ditentukan oleh relasi R adalah himpunan: $[x]_R = \{y \in A|(x, y) \in R$. Himpunan semua kelas ekuivalensi pada A disebut A modulo R didefinisikan sebagai: $A|R = \{[x]_R|x \in A\}$ (Fitriani dan Faisol, 2022).

$A|R$ atau A habis membagi R artinya $R = kA$. Berikut contoh kelas ekuivalensi.

Contoh 2.2.8 Diberikan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan relasi R pada A yaitu $R = \{(1, 1),$ $(1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 4), (5, 5)\}$. Relasi R merupakan relasi ekuivalensi. Misalkan S_x dinotasikan sebagai himpunan elemen-elemen A yang berelasi dengan x, maka diperoleh tabel sebagai berikut:

Tabel 2.3 Tabel kelas ekuivalensi pada A

x	S_x
1	$\{1, 2\}$
2	$\{1, 2\}$
3	$\{3\}$
4	$\{4, 5\}$
5	$\{4, 5\}$

Berdasarkan Tabel 2.3, diperoleh kelas-kelas ekuivalensi pada himpunan A adalah $[1]_R = [2]_R = \{1, 2\}, [3]_R = \{3\}$ dan $[4]_R = [5]_R = \{4, 5\}$. Himpunan semua kelas ekuivalensi pada A adalah $A|R = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$.

Setelah memahami definisi dan contoh relasi dan kelas ekuivalensi, selanjutnya diberikan definisi dari ruang aproksimasi.

Definisi 2.2.9 Pasangan terurut (U, θ), dengan $U \neq \emptyset$ dan θ merupakan relasi ekuivalensi pada U disebut ruang aproksimasi (Miao dkk., 2005).

Berikut diberikan contoh ruang aproksimasi.

Contoh 2.2.10 Berdasarkan Contoh 2.2.6, pasangan $(\mathbb{N}, R)$ merupakan ruang aproksimasi, dengan $\mathbb{N} \neq \emptyset$ dan R merupakan relasi ekuivalensi dengan definisi untuk setiap $x, y \in \mathbb{N}$ dan ${}_xR_y$ jika dan hanya jika $x^2 = y^2$.

Berikut diberikan definisi aproksimasi bawah dan aproksimasi atas.

Definisi 2.2.11 Diberikan pasangan (U, θ) adalah ruang aproksimasi dan X adalah himpunan bagian dari U dengan pemetaan: $Apr : P(U) \to P(U) \times P(U)$.

Aproksimasi bawah dan aproksimasi atas didefinisikan sebagai berikut: untuk setiap $X \in P(U), Apr(X) = (\underline{X}, \overline{X})$ dengan $\underline{X} = \{x \in X | [x]_\theta \subseteq X\}$, dan $\overline{X} = \{x \in X | [x]_\theta \cap X \neq \emptyset\}$. Dalam hal ini $\underline{X}$ disebut aproksimasi bawah dari X di (U, θ) sedangkan $\overline{X}$ disebut aproksimasi atas dari X di (U, θ) (Davvaz, 2004).

Untuk memahami Definisi 2.2.11 Berikut diberikan contoh aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari suatu himpunan bagian U.

Contoh 2.2.12 Diberikan ruang aproksimasi (U, θ) dengan himpunan $U = \{x_1, x_2, \cdots, x_{10}\}$ dan θ adalah relasi ekuivalensi sebagai berikut: $E_1 = \{x_1, x_2\}$, $E_2 = \{x_3, x_4\}, E_3 = \{x_5\}, E_4 = \{x_6, x_7\}, E_5 = \{x_8, x_9\}, E_6 = \{x_{10}\}$. Jika dipilih $X = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$, maka aproksimasi bawah X adalah $\underline{X} = \{x_3, x_4\} \cup \{x_5\} \cup \{x_6, x_7\} = \{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ dan aproksimasi atas X adalah $\overline{X} = \{x_1, x_2\} \cup \{x_3, x_4\} \cup \{x_5\} \cup \{x_6, x_7\} \cup \{x_8, x_9\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$. Dengan demikian $Apr(X) = (\underline{X}, \overline{X}) = (\{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\})$.

Zadeh pertama kali mengembangkan himpunan *fuzzy* pada tahun 1965. Berikut definisi dasar himpunan *fuzzy*.

Definisi 2.2.13 Jika X adalah kumpulan objek yang dilambangkan secara umum dengan x, maka himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ dalam X adalah himpunan pasangan terurut: $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$, dengan $\mu_{\tilde{A}}(x)$ adalah derajat keanggotaan dari x di $\tilde{A}$ yang memetakan X keruang keanggotaan M yang terletak pada rentang $[0, 1]$ (Zimmermann, 1991).

Definisi 2.2.14 Keanggotaan suatu elemen di dalam himpunanf *fuzzy* dinyatakan dengan derajat keanggotaan yang nilainya terletak di dalam selang $[0, 1]$.

$$\mu_F : X \to [0, 1].$$

Arti derajat keanggotaan adalah sebagai berikut.

1. Jika $\mu_F(x) = 1$, maka x adalah anggota penuh dari himpunan A.

2. Jika $\mu_F(x) = 0$, maka x adalah bukan anggota himpunan A.

3. Jika $\mu_F(x) = \mu$, dengan $0 < \mu < 1$, maka x adalah anggota himpunan A derajat keanggotaan sebesar μ (Munir, 2012).

Berikut diberikan contoh berdasarkan Definisi 2.2.13.

Contoh 2.2.15 Seorang agen properti ingin mengklasifikasikan rumah yang akan ditawarkan kepada konsumennya. Salah satu indikator kenyamanan rumah tersebut adalah letaknya yang strategis. Misalkan $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ adalah himpunan tipe rumah yang dideskripsikan oleh $x =$ letak rumah yang strategis, dengan 1 adalah tipe rumah ke-1, 2 adalah tipe rumah ke-2, dan seterusnya. Himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ dapat ditulis sebagai $\tilde{A} = \{(1; 0,8), (2; 0,6), (3; 0,3), (4; 0,1), (5; 0,2)\}$ yang berarti tipe rumah pertama memenuhi tingkat kenyamanan 0,8 dari skala kenyamanan antara 0 sampai 1, tipe rumah kedua memenuhi tingkat kenyamanan 0,6 dari skala kenyamanan antara 0 sampai 1, tipe rumah ketiga memenuhi tingkat kenyamanan 0,3 dari skala kenyamanan antara 0 sampai 1, tipe rumah keempat memenuhi tingkat kenyamanan 0,1 dari skala kenyamanan antara 0 sampai 1, dan tipe rumah kelima memenuhi tingkat kenyamanan 0,2 dari skala kenyamanan antara 0 sampai 1.

Konsep himpunan *rough* pertama kali diperkenalkan oleh Pawlak, sebagai alat formal untuk memodelkan dan memproses informasi lengkap di sistem informasi. Teori himpunan *rough* merupakan perluasan dari teori himpunan, yaitu suatu himpunan bagian dari semesta dideskripsikan oleh suatu pasangan dari himpunan asli yang dinamakan himpunan aproksimasi atas dan bawah. Kunci gagasan pada model himpunan *rough* adalah relasi ekivalensi. Kelas ekivalensi adalah pondasi dalam mengkonstruksi aproksimasi bawah dan atas. Aproksimasi bawah dari suatu himpunan adalah gabungan dari seluruh kelas ekivalensi yang merupakan himpunan bagian dari himpunan tersebut, dan aproksimasi atas adalah gabungan seluruh kelas ekivalen yang irisannya tidak kosong dengan himpunan tersebut. Berikut definisi himpunan *rough*.

Definisi 2.2.16 Diberikan relasi ekuivalensi R pada himpunan semesta U, pasangan (U, R) merupakan ruang aproksimasi. Suatu himpunan bagian $X \subseteq U$ dapat didefinisikan $\overline{X} - \underline{X} \neq \emptyset$ sehingga X disebut himpunan *rough* (Pawlak, 1982).

Berikut diberikan contoh himpunan *rough*.

Contoh 2.2.17 Berdasarkan Contoh 2.2.12, pasangan terurut aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari X yaitu:

$$
\begin{aligned}
Apr(X) &= (\underline{X}, \overline{X}) \\
&= (\{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\})
\end{aligned}
$$

Karena $\overline{X} - \underline{X} = \{x_1, x_2, x_8, x_9\} \neq \emptyset, X$ merupakan himpunan *rough*.

Berikut diberikan sifat himpunan *rough*.

Proposisi 2.2.18 Diberikan himpunan $X, Y \subset$ berlaku sifat-sifat berikut:

1. $\underline{X} \subset X \subset \overline{X}$;
2. $\underline{R} = \overline{R} = R, \underline{U} = \overline{U} = U$;
3. $\underline{X \cap Y} = \underline{X} \cap \underline{Y}$;
4. $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$;
5. $\underline{X} \cup \underline{Y} \subset \underline{X \cup Y}$;
6. $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$;
7. $X \subset Y$ Jika dan hanya jika $\overline{X} \subset \overline{Y}$ dan $\underline{X} \subset \underline{Y}$ (Isaac dan Neelima, 2013).

Bukti.

1. Jika $x \in \underline{X}, x \in [x]_R \subset X$. Akibatnya, $X \subset \underline{X}$. Selanjutnya, jika $x \in X$ maka dari $x \in [x]_R$, diperoleh $[x]_R \cap X \neq \emptyset$ sehingga $x \in \overline{X}$. Jadi $X \subset \overline{X}$.
2. Jika $\underline{X} = X$, dengan $X \subset U$ dan $U \neq \emptyset$, maka $\underline{\emptyset} = \emptyset$ dan $\underline{U} = U$.
3. $x \in \underline{X \cap Y} \iff [x]_R \subset (X \cap Y) \iff [x]_R \subset X$ dan $\iff [x]_R \subset Y \iff [x]_R \subset \underline{X}$ dan $[x]_R \subset \underline{Y} \iff x \in X \cap x \in Y$. Jadi, $\underline{X \cap Y} = \underline{X} \cap \underline{Y}$.

4. Jika $X \cap Y \subset X$ dan $X \cap Y \subset Y$ maka $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X}$ dan $\overline{X \cap Y} \subset \overline{Y}$ akibatnya $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$.

5. Jika $X \subset X \cup Y$ dan $Y \subset X \cup Y$ maka $\underline{X} \subset \underline{X \cup Y}$ dan $\underline{Y} \subset \underline{X \cup Y}$ akibatnya $\underline{X} \cup \underline{Y} \subset \underline{X \cup Y}$.

6. $x \in \overline{X \cup Y} \iff [x]_R \subset (X \cup Y) \neq \emptyset \iff ([x]_R \cap X) \cup ([x]_R \cap Y) \neq \emptyset \iff [x]_R \cap X$ atau $[x]_R \cap Y \neq \emptyset \iff [x]_R \cap X \neq \emptyset$ atau $[x]_R \cap Y \neq \emptyset \iff x \in \overline{X} \cup \overline{Y}$. Jadi, $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$.

7. Diketahui $X \subset Y$ jika dan hanya jika $\overline{X} \subset \overline{Y}$ dan $\underline{X} \subset \underline{Y}$. Berdasarkan (4), terbukti $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$ dan berdasarkan (5), terbukti $\underline{X} \cup \underline{Y} \subset \underline{X \cup Y}$ akibatnya $X \subset Y \iff \overline{X} \subset \overline{Y}$ dan $\underline{X} \subset \underline{Y}$ (Kuroki, 1997).

$\blacksquare$

Berikut diberikan ilustrasi Proposisi 2.2.18.

Contoh 2.2.19 Diberikan himpunan tak kosong $A = \mathbb{Z}_{20}$, dan relasi R merupakan relasi ekuivalensi pada himpunan A dengan definisi untuk setiap $x, y \in A$ berlaku ${}_xR_y$ jika dan hanya jika $x - y$ habis dibagi 4. Berikut kelas-kelas ekuivalensi untuk $A = \mathbb{Z}_{20}$ adalah $E_1 = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{9}, \bar{13}, \bar{17}\}, E_2 = \{\bar{2}, \bar{6}, \bar{10}, \bar{14}, \bar{18}\}, E_3 = \{\bar{3}, \bar{7}, \bar{11}, \bar{15}, \bar{19}\}$, dan $E_4 = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \bar{12}, \bar{16}\}$. Diberikan $X = \{\bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{15}, \bar{19}\}$ dan $Y = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{14}, \bar{15}, \bar{18}, \bar{19}\}$. Diperoleh aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari himpunan X dan himpunan Y sebagai berikut:
$\underline{X} = E_3 = \{\bar{3}, \bar{7}, \bar{11}, \bar{15}, \bar{19}\}$,
$\overline{X} = E_2 \cup E_3 = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{14}, \bar{15}, \bar{18}, \bar{19}\}$,
$\underline{Y} = E_2 \cup E_3 = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{14}, \bar{15}, \bar{18}, \bar{19}\}$,
$\overline{Y} = E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{13}, \bar{14}, \bar{15}, \bar{17}, \bar{18}, \bar{19}\}$,
Selanjutnya, diberikan himpunan $X, Y \subset$ berlaku sifat-sifat berikut:

1. Diketahui $X = \{\bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{15}, \bar{19}\}$,
   $\overline{X} = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{14}, \bar{15}, \bar{18}, \bar{19}\}$,
   $\underline{X} = \{\bar{3}, \bar{7}, \bar{11}, \bar{15}, \bar{19}\}$.
   Jadi $\underline{X} \subseteq X \subseteq \overline{X}$.

2. Diketahui $A = \mathbb{Z}_{20}, \overline{A} = \mathbb{Z}_{20}, \underline{A} = \mathbb{Z}_{20}$.

   Jadi $\underline{A} = \overline{A} = A$.
3. Diketahui $X = \{\bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{1}0, \bar{1}1, \bar{1}5, \bar{1}9\}$, dan

   $Y = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{1}0, \bar{1}1, \bar{1}4, \bar{1}5, \bar{1}8, \bar{1}9\}$,

   $X \cap Y = \{\bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{1}0, \bar{1}1, \bar{1}5, \bar{1}9\}$,

   $\underline{X \cap Y} = \{\bar{3}, \bar{7}, \bar{1}1, \bar{1}5, \bar{1}9\}$,

   $\underline{X} \cap \underline{Y} = \{\bar{3}, \bar{7}, \bar{1}1, \bar{1}5, \bar{1}9\}$.

   Jadi $\underline{X \cap Y} = \underline{X} \cap \underline{Y}$.
4. Diketahui $X = \{\bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{1}0, \bar{1}1, \bar{1}5, \bar{1}9\}$, dan

   $Y = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{1}0, \bar{1}1, \bar{1}4, \bar{1}5, \bar{1}8, \bar{1}9\}$,

   $X \cup Y = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{1}0, \bar{1}1, \bar{1}4, \bar{1}5, \bar{1}8, \bar{1}9\}$,

   $\overline{X \cup Y} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{9}, \bar{1}0, \bar{1}1, \bar{1}3, \bar{1}4, \bar{1}5, \bar{1}7, \bar{1}8, \bar{1}9\}$, dan

   $\overline{X} \cup \overline{Y} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{9}, \bar{1}0, \bar{1}1, \bar{1}3, \bar{1}4, \bar{1}5, \bar{1}7, \bar{1}8, \bar{1}9\}$.

   Jadi $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$.
5. Diketahui $X = \{\bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{1}0, \bar{1}1, \bar{1}5, \bar{1}9\}$, dan

   $Y = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{1}0, \bar{1}1, \bar{1}4, \bar{1}5, \bar{1}8, \bar{1}9\}$, sehingga $X \subseteq Y$, diperoleh $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$ yaitu $\{\bar{2}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{1}0, \bar{1}1, \bar{1}4, \bar{1}5, \bar{1}8, \bar{1}9\} \subseteq \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{9}, \bar{1}0, \bar{1}1, \bar{1}3, \bar{1}4, \bar{1}5, \bar{1}7, \bar{1}8, \bar{1}9\}$, dan $\underline{X} \subseteq \underline{Y}$ yaitu $\{\bar{3}, \bar{7}, \bar{1}1, \bar{1}5, \bar{1}9\} \subseteq \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{1}0, \bar{1}1, \bar{1}4, \bar{1}5, \bar{1}8, \bar{1}9\}$.

   Jadi $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$ dan $\underline{X} \subseteq \underline{Y}$.
6. Diketahui $X = \{\bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{1}0, \bar{1}1, \bar{1}5, \bar{1}9\}$, dan

   $Y = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{1}0, \bar{1}1, \bar{1}4, \bar{1}5, \bar{1}8, \bar{1}9\}$,

   $X \cup Y = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{1}0, \bar{1}1, \bar{1}4, \bar{1}5, \bar{1}8, \bar{1}9\}$,

   $\underline{X \cup Y} = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{1}0, \bar{1}1, \bar{1}4, \bar{1}5, \bar{1}8, \bar{1}9\}$, dan

   $\underline{X} \cup \underline{Y} = \{\bar{3}, \bar{7}, \bar{1}1, \bar{1}5, \bar{1}9\}$.

   Jadi $\underline{X} \cup \underline{Y} \subseteq X \cup Y$.
7. Diketahui $X = \{\bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{1}0, \bar{1}1, \bar{1}5, \bar{1}9\}$, dan

   $Y = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{1}0, \bar{1}1, \bar{1}4, \bar{1}5, \bar{1}8, \bar{1}9\}$,

   $X \cap Y = \{\bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{1}0, \bar{1}1, \bar{1}5, \bar{1}9\}$,

   $\overline{X \cap Y} = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{1}0, \bar{1}1, \bar{1}4, \bar{1}5, \bar{1}8, \bar{1}9\}$,

   $\overline{X} \cap \overline{Y} = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{1}0, \bar{1}1, \bar{1}4, \bar{1}5, \bar{1}8, \bar{1}9\}$.

$\underline{X \cup Y} = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, 1\bar{0}, 1\bar{1}, 1\bar{4}, 1\bar{5}, 1\bar{8}, 1\bar{9}\}$,
$\underline{X} \cup \underline{Y} = \{\bar{3}, \bar{7}, 1\bar{1}, 1\bar{5}, 1\bar{9}\}$.
Sehingga $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$ dan $\underline{X} \cup \underline{Y} \subset \underline{X \cup Y}$, akibatnya $X \subset Y$ $\Longleftrightarrow \overline{X} \subset \overline{Y}$ dan $\underline{X} \subset \underline{Y}$.

2.3 Penerapan Himpunan *Rough* pada Beberapa Struktur Aljabar

Berikut diberikan definisi grup *rough*.

Definisi 2.3.1 Misalkan $K = (S, \theta)$ adalah ruang aproksimasi dan $*$ adalah operasi biner pada S. Himpunan $G \subseteq S$ disebut grup *rough* jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. untuk setiap $x, y \in G$, berlaku $x * y \in \overline{G}$;

2. untuk setiap $x, y, z \in \overline{G}$, berlaku $(x * y) * z = x * (y * z) \in \overline{G}$ ($*$ bersifat assosiatif di $\overline{G}$);

3. terdapat $e \in \overline{G}$ sedemikian sehingga $x * e = e * x = x$, untuk setiap $x \in G$, elemen e disebut sebagai elemen identitas *rough* di G;

4. untuk setiap $x \in G$, terdapat $y \in G$ sedemikian sehingga $x * y = y * x = e$. Elemen y disebut sebagai elemen invers *rough* dari x di G (Miao dkk., 2005).

Berikut diberikan contoh grup *rough*.

Contoh 2.3.2 Diberikan $\mathbb{Z}_9 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}\}$ dengan operasi penjumlahan modulo 9 dan $+_9$. Kelas-kelas ekuivalensi $\mathbb{Z}_9$ adalah $\mathbb{Z}_9/R = \{E_1, E_2, E_3\}$, dengan: $E_1 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}, E_2 = \{\bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ dan $E_3 = \{\bar{6}, \bar{7}, \bar{8}\}$. Diberikan $X_1 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{7}, \bar{8}\}$, diperoleh $\overline{X_1} = E_1 \cup E_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}\}$. Karena $\bar{2}(+_9)\bar{1} = \bar{3} \notin \overline{X_1}$, sehingga X_1 bukan grup *rough*.
Diberikan $X_2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$, diperoleh $\overline{X_2} = E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \mathbb{Z}_9$. Karena:

1. untuk setiap $x, y \in X_2, x(+_9)y \in \overline{X_2}$;

2. operasi $(+_9)$ bersifat assosiatif di $\overline{X_2}$;

3. terdapat $\bar{0} \in \overline{X_2}$, sehingga $\bar{2}(+_9)\bar{0} = \bar{0}(+_9)\bar{2} = \bar{2}$;

4. untuk setiap $\bar{x} \in \overline{X_2}$, terdapat $\bar{y} \in \overline{X_2}$ sehingga, $\bar{x}(+_9)\bar{y} = \bar{0}$ atau $\bar{y} = (\bar{x})^{-1}$, yaitu $(\bar{0})^{-1} = \bar{0} \in X_2, (\bar{2})^{-1} = \bar{7} \in X_2, (\bar{7})^{-1} = \bar{2} \in X_2, (\bar{3})^{-1} = \bar{6} \in X_2, (\bar{6})^{-1} = \bar{3} \in X_2, (\bar{5})^{-1} = \bar{4} \in X_2, (\bar{4})^{-1} = \bar{5} \in X_2$.

Karena $(1) - (4)$ terpenuhi, X_2 merupakan grup *rough* (Miao dkk., 2005).

Berikut diberikan definisi semigrup *rough*.

Definisi 2.3.3 Misalkan (U, R) adalah ruang aproksimasi dan $*$ operasi biner yang didefinisikan pada U. S himpunan bagian dari U disebut semigrup *rough* pada ruang aproksimasi, jika memenuhi sifat-sifat berikut:

1. untuk setiap $x, y \in S, xy \in \bar{R}(S)$;

2. untuk setiap $x, y, z \in S, (xy)z = x(yz)$ di $\bar{R}(S)$ (Bagirmaz dan Ozcan, 2015).

Berikut diberikan definisi ring *rough*.

Definisi 2.3.4 Diberikan ruang aproksimasi (U, θ) dan $(+, *)$ adalah dua operasi biner pada U. Himpunan bagian dari disebut ring *rough* jika memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $\langle R, + \rangle$ merupakan grup *rough* komutatif yaitu:

   (a) untuk setiap $x, y \in X, x + y \in \bar{R}$;

   (b) untuk setiap $x, y, z \in \bar{R}, (x+y)+z = x+(y+z)$ sifat asosiatif berlaku di $\bar{R}$;

   (c) untuk setiap $x \in R$, terdapat $e \in \bar{R}$ sedemikian hingga $x + e = x = e + x, e$ disebut elemen identitas *rough (rough identity element)*;

   (d) untuk setiap $x \in R$, terdapat $y \in R$ sedemikian hingga $x + y = e = y + x, y$ disebut elemen invers *rough (rough inverse element)*;

   (e) untuk setiap $x, y \in R, x + y = y + x, \langle R, + \rangle$ bersifat komutatif.

Dari lima kondisi pertama ini menunjukkan bahwa $\langle R, +\rangle$ adalah grup *rough* komutatif *(commutative rough group)*.

2. $\langle R, *\rangle$ merupakan semigrup *rough* yaitu:

   (a) Untuk setiap $x, y \in R, xy \in \bar{R}$;

   (b) Untuk setiap $x, y, z \in \bar{R}, (xy)z = x(yz)$ sifat asosiatif berlaku di $\bar{R}$;

   Dari dua kondisi ini menunjukkan bahwa $\langle R, *\rangle$ adalah semigrup *rough* *(rough semigroup)*.

3. Untuk setiap $x, y, z \in R$, berlaku:

   (a) $(x + y)z = (xz) + (yz)$;

   (b) $x(y + z) = (xy) + (xz)$.

   Dua sifat ini merupakan sifat distributif di R (Isaac dan Neelima, 2013).

Berikut diberikan definisi modul *rough*.

Definisi 2.3.5 Diberikan ring *rough* $(Apr(R), +, *)$ dan grup komutatif *rough* $(Apr(M), +)$. $Apr(M)$ disebut modul kiri *rough* dari ring *rough* $Apr(R)$ jika terdapat pemetaan $\overline{R} \times \overline{M} \to \overline{M}, (a, x) \to ax$ sehingga:

1. $a(x + y) = ax + ay, a \in \overline{R}; x, y \in \overline{M}$;

2. $(a + b)x = ax + bx, a, b \in \overline{R}; x \in \overline{M}$;

3. $(ab)x = a(bx), a, b \in \overline{R}; x \in \overline{M}$;

4. $1 \cdot x = x, 1$ adalah elemen unit dari $\overline{R}$ dan $x \in \overline{M}$.

Modul kanan *rough* dari ring $Apr(R)$ dapat didefinisikan dengan cara yang sama (Zhang dkk., 2006).

2.4 Himpunan *Rough* Menggunakan Konsep Praba

Indiscernibility merupakan konsep inti dari teori himpunan *rough* dan didefinisikan ekuivalensi antara objek (Praba dkk., 2015). Berikut definisi relasi *indiscernibility*.

Definisi 2.4.1 Misalkan himpunan $P \subseteq R$, terdapat kelas ekuivalensi $IND(P)$, dengan $IND(P) = \{(x, y) \in U^2 | \forall a \in P, a(x) = a(y)\}$. $IND(P)$ atau relasi *indiscernibility* ini berhubungan dengan kelas ekuivalensi yang mana dua objek ekuilvalensi jika dan hanya jika keduanya memiliki kesamaan vektor nilai atribut untuk atribut di P. Partisi U yang ditentukan oleh $IND(P)$ dilambangkan dengan $U/IND(P)$ atau U/P yang merupakan himpunan kelas ekuivalen yang dihasilkan oleh $IND(P)$.

$$U/IND(P) = \otimes\{U/IND(\{a\}) | a \in P\},$$

dengan,

$$A \otimes B = \{X \cap Y | \forall X \in A, \forall Y \in B, X \cap Y \neq \emptyset\}.$$

Jika $(x, y) \in IND(P)$, maka x dan y adalah *indiscernibility* dari atribut P. Kelas ekuivalen dari relasi *indiscernibility* terhadap P dilambangkan dengan $[x]_p$, $x \in U$ (Jensen dkk., 2014).

Berikut contoh relasi *indiscernibility*.

Contoh 2.4.2 Misalkan himpunan $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$ dan $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$ merupakan himpunan *fuzzy* yang nilai keanggotaannya dinyatakan dengan bilangan antara 0 dan 1 seperti pada tabel berikut.

Tabel 2.4 Tabel nilai keanggotaan himpunan *fuzzy*

A/U	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
x_1	0	$0,2$	$0,3$	$0,1$	$0,7$	$0,5$	$0,6$	$0,4$
x_2	1	$0,3$	$0,8$	$0,2$	$0,9$	$0,1$	$0,7$	$0,5$
x_3	0	$0,2$	$0,3$	$0,1$	$0,7$	$0,5$	$0,6$	$0,4$
x_4	1	$0,3$	$0,8$	$0,2$	$0,9$	$0,1$	$0,7$	$0,5$
x_5	$0,1$	$0,5$	$0,4$	$0,7$	$0,6$	$0,3$	1	$0,2$
x_6	1	$0,3$	$0,8$	$0,2$	$0,9$	$0,1$	$0,7$	$0,5$
x_7	0	$0,2$	$0,3$	$0,1$	$0,7$	$0,5$	$0,6$	$0,4$
x_8	1	$0,3$	$0,8$	$0,2$	$0,9$	$0,1$	$0,7$	$0,5$
x_9	$0,2$	$0,4$	$0,1$	$0,3$	$0,5$	$0,6$	$0,8$	1
x_{10}	$0,1$	$0,5$	$0,4$	$0,7$	$0,6$	$0,3$	1	$0,2$

Kelas-kelas ekuivalensi berdasarkan definisi $IND(P)$, diberikan sebagai berikut.

$$E_1 = [x_1]_p = \{x_1, x_3, x_7\};$$

$$E_2 = [x_2]_p = \{x_2, x_4, x_6, x_8\};$$

$$E_3 = [x_5]_p = \{x_5, x_{10}\};$$

$$E_4 = [x_9]_p = \{x_9\}.$$

Selanjutnya dijelaskan mengenai himpunan *rough*, *indiscernibility weight*, Praba *meet* $\triangle$, operasi biner Praba *meet* $\triangle$, elemen pivot, Praba *join* $\triangledown$, operasi biner Praba *join* $\triangledown$,monoid dari himpunan *rough*, semiring dan order dari semiring *rough*.

Diberikan $I = (U, A)$ merupakan sistem informasi dan untuk setiap $X \subseteq U$ dan $(\underline{P}(X), \overline{P}(X))$ merupakan aproksimasi bawah dan aproksimasi atas, maka berikut definisi himpunan *rough* dan struktur aljabar.

Definisi 2.4.3 Himpunan *rough* yang berkoresponden dengan X, dengan X merupakan sebarang subset dari U di ruang aproksimasi P, dapat dinyatakan $RS(X) = (\underline{P}(X), \overline{P}(X))$ (Praba dkk., 2013).

Berikut contoh himpunan *rough*.

Contoh 2.4.4 Berdasarkan Contoh 2.4.2, diberikan himpunan $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$ dengan kelas-kelas ekuivalensi berdasarkan definisi *IND(P)* sebagai berikut:

$$E_1 = [x_1]_p = \{x_1, x_3, x_7\};$$
$$E_2 = [x_2]_p = \{x_2, x_4, x_6, x_8\};$$
$$E_3 = [x_5]_p = \{x_5, x_{10}\};$$
$$E_4 = [x_9]_p = \{x_9\}.$$

Diberikan himpunan $X = \{x_1, x_3, x_6, x_7, x_9, x_{10}\}, Y = \{x_1, x_6, x_{10}\}$ dan $P = A$. Karena aproksimasi bawah dari X adalah $\underline{P}(X) = E_1 \cup E_4 = \{x_1, x_3, x_7, x_9\}$ dan aproksimasi atas dari X adalah $\overline{P}(X) = U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$, maka diperoleh himpunan *rough* dari X adalah $RS(X) = (\{x_1, x_3, x_7, x_9\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\})$. Karena aproksimasi bawah dari Y adalah $\underline{P}(Y) = \emptyset$ dan aproksimasi atas dari Y adalah $\overline{P}(Y) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{10}\}$, maka diperoleh himpunan *rough* dari Y adalah $RS(Y) = (\emptyset, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{10}\})$.

Berikut diberikan definisi *indiscernibility weight*.

Definisi 2.4.5 Jika $X \subseteq U$, maka banyaknya kelas ekuivalensi (berdasarkan $IND(P)$) pada X disebut *Indiscernibility weight* dari X, dinotasikan dengan $IW(X)$ (Praba dkk., 2013).

Berikut diberikan definisi Praba *meet* $\triangle$.

Definisi 2.4.6 Misalkan $X, Y \subseteq U$, Praba *meet* $\triangle$ didefinisikan sebagai berikut:

1. Jika $IW(X \cup Y) = IW(X) + IW(Y) - IW(X \cap Y)$, maka $X \triangle Y = X \cup Y$.
2. Jika $IW(X \cup Y) > IW(X) + IW(Y) - IW(X \cap Y)$, maka identifikasi kelas ekuivalensi yang diperoleh dari $X \cup Y$, kemudian hapus elemen-elemen dari kelas tersebut yang termasuk dalam Y. Didapatkan himpunan baru Y, sehingga diperoleh $X \triangle Y$. Ulangi proses hingga $IW(X \cup Y) = IW(X) + IW(Y) - IW(X \cap Y)$ (Praba dkk, 2013).

Berikut diberikan contoh Praba *meet* $\vartriangle$.

Contoh 2.4.7 Berdasarkan Contoh 2.4.2 dan 2.4.4, diberikan himpunan $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$, seperti pada Tabel 2.4 dengan kelas-kelas ekuivalensi berdasarkan definisi $IND(P)$ sebagai berikut:

$$E_1 = [x_1]_p = \{x_1, x_3, x_7\};$$
$$E_2 = [x_2]_p = \{x_2, x_4, x_6, x_8\};$$
$$E_3 = [x_5]_p = \{x_5, x_{10}\};$$
$$E_4 = [x_9]_p = \{x_9\}.$$

Diberikan himpunan $X = \{x_1, x_3, x_6, x_7, x_9, x_{10}\}, Y = \{x_1, x_6, x_{10}\} \subseteq U$, sehingga diperoleh:

Ind. weight dari X adalah $IW(X) = 2$;
Ind. weight dari Y adalah $IW(Y) = 0$.

Karena $X \cup Y = \{x_1, x_3, x_6, x_7, x_9, x_{10}\}$ dan $X \cap Y = \{x_1, x_{10}\}$ maka *Ind. weight* dari $X \cup Y$ adalah $IW(X \cup Y) = 2$ dan *Ind. weight* dari $X \cap Y$ adalah $IW(X \cap Y) = 0$. Berdasarkan Definisi 2.4.6 $IW(X \cup Y) = IW(X) + IW(Y) - IW(X \cap Y) = 2$ maka diperoleh $X \vartriangle Y = X \cup Y = \{x_1, x_3, x_6, x_7, x_9, x_{10}\}$.

Selanjutnya didefinisikan operasi biner Praba *meet* $\vartriangle$.

Definisi 2.4.8 Diberikan himpunan semesta U dan himpunan T yaitu himpunan semua himpunan *rough* pada U. Didefinisikan operasi biner *meet* $\blacktriangle : T \times T \to T$, dengan

$$\blacktriangle(RS(X), RS(Y)) = RS(X \vartriangle Y)$$

(Praba dkk., 2017).

Berikut contoh operasi biner Praba *meet* $\triangle$.

Contoh 2.4.9 Berdasarkan Contoh 2.4.2, 2.4.4 dan 2.4.7, karena

$$X \triangle Y = \{x_1, x_3, x_6, x_7, x_9, x_{10}\}$$

diperoleh aproksimasi bawah dari $X \triangle Y$ adalah $\underline{P}(X \triangle Y) = \{x_1, x_3, x_7, x_9\}$ dan aproksimasi atas dari $X \triangle Y$ adalah $\overline{P}(X \triangle Y) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$, sehingga himpunan *rough* dari $X \triangle Y$ adalah

$$RS(X \triangle Y) = (\{x_1, x_3, x_7, x_9\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}).$$

Selanjutnya, akan dibahas mengenai Praba *join* $\triangledown$ dan operasi biner Praba *join* $\triangledown$.

Definisi 2.4.10 Diberikan himpunan $X, Y \subseteq U$. Elemen $x \in U$ disebut elemen pivot, jika $[x]_p \nsubseteq X \cap Y$, tetapi $[x]_P \cap X \neq \emptyset$ dan $[x]_P \cap Y \neq \emptyset$ (Praba dkk., 2013).

Definisi 2.4.11 Diberikan himpunan $X, Y \subseteq U$. Himpunan elemen pivot X dan Y disebut himpunan pivot dari X dan Y yang dinotasikan dengan $P_{X \cap Y}$ (Praba dkk., 2013).

Definisi 2.4.12 Praba *join* $\triangledown$ dari X dan Y dinotasikan dengan $X \triangledown Y$ dan didefinisikan sebagai berikut:

$$X \triangledown Y = \{x | [x]_p \subseteq X \cap Y\} \cup P_{X \cap Y}, \text{ dengan } X, Y \subseteq U.$$

(Praba dkk., 2013).

Berdasarkan Definisi 2.4.10, 2.4.11 dan 2.4.12, berikut contoh untuk memperoleh $P_{X \cap Y}$ dan Praba *join* $\triangledown$ dari X dan Y.

Contoh 2.4.13 Berdasarkan Contoh 2.4.2, diberikan himpunan $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$, dengan kelas-kelas ekuivalensi berdasarkan definisi $IND(P)$

sebagai berikut:

$$E_1 = [x_1]_p = \{x_1, x_3, x_7\};$$
$$E_2 = [x_2]_p = \{x_2, x_4, x_6, x_8\};$$
$$E_3 = [x_5]_p = \{x_5, x_{10}\};$$
$$E_4 = [x_9]_p = \{x_9\}.$$

Diberikan himpunan $X = \{x_1, x_3, x_6, x_7, x_9, x_{10}\}, Y = \{x_1, x_6, x_{10}\} \subseteq U$, sehingga diperoleh:

$$X \cap Y = \{x_1, x_{10}\}.$$

Misalkan dipilih:

1. x_1 dengan $[x_1]_p = \{x_1, x_3, x_7\}$, karena $[x_1]_P \subset X \cap Y$, maka $[x_1]_P$ bukan elemen pivot.

2. x_2 dengan $[x_2]_p = \{x_2, x_4, x_6, x_8\}$, karena $[x_2]_P \nsubseteq X \cap Y$, tetapi $[x_2]_P \cap X = \{x_6\} \neq \emptyset$ dan $[x_2]_P \cap Y = \{x_6\} \neq \emptyset$ maka $[x_2]_P$ elemen pivot.

3. x_5 dengan $[x_5]_p = \{x_5, x_{10}\}$, karena $[x_5]_P \subset X \cap Y$, maka $[x_5]_P$ bukan elemen pivot.

4. x_9 dengan $[x_9]_p = \{x_9\}$, karena $[x_9]_p \nsubseteq X \cap Y$, $[x_9]_p \cap X = \{x_9\} \neq \emptyset$, tetapi $[x_9]_p \cap Y = \emptyset$ maka $[x_9]_p$ bukan elemen pivot.

diperoleh x_2, x_4, x_6, x_8 merupakan elemen pivot, sehingga $P_{X \cap Y} = \{x_2, x_4, x_6, x_8\}$. Oleh karena itu, $X \triangledown Y = (X \cap Y) \cup P_{X \cap Y} = \{x_1, x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}\}$.

Berikut didefinisikan operasi biner Praba *join* $\triangledown$.

Definisi 2.4.14 Diberikan himpunan semesta U dan himpunan T yaitu himpunan semua himpunan *rough* pada U. Didefinisikan operasi biner *join* $\blacktriangledown : T \times T \to T$, dengan

$$\blacktriangledown(RS(X), RS(Y)) = RS(X \triangledown Y) \text{ (Manimaran dkk., 2017).}$$

Berikut contoh operasi biner Praba *join* $\triangledown$.

Contoh 2.4.15 Berdasarkan Contoh 2.4.13, karena

$$X \triangledown Y = \{x_1, x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}\}$$

diperoleh aproksimasi bawah dari $X \triangledown Y$ adalah $\underline{P}(X \triangledown Y) = \{x_2, x_4, x_6, x_8\}$ dan aproksimasi atas dari $X \triangledown Y$ adalah $\overline{P}(X \triangledown Y) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{10}\}$, sehingga himpunan *rough* dari $X \triangledown Y$ adalah

$$RS(X \triangledown Y) = (\{x_2, x_4, x_6, x_8\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{10}\}).$$

Diberikan $I = (U, A)$ merupakan sistem informasi. Untuk setiap $X \subseteq U$, $RS(X) = (\underline{P}(X), \overline{P}(X))$ dan himpunan $T = \{RS(X)|X \subseteq U\}$ merupakan semua himpunan *rough* di I. Berikut ini akan diberikan teorema-teorema dari Praba *meet* $\vartriangle$ dan *join* $\triangledown$ yang berkaitan. Berikut teorema monoid untuk Praba *meet* $\vartriangle$.

Teorema 2.4.16 Diberikan $I = (U, A)$ merupakan sistem informasi dengan U himpunan universal berhingga dan A himpunan atribut pada U. Jika T merupakan himpunan dari semua himpunan *rough*, maka $(T, \blacktriangle)$ merupakan monoid (Praba dkk., 2013).

Bukti.

1. Akan ditunjukkan T tertutup terhadap operasi *meet* $\blacktriangle$. Diberikan $X, Y \subseteq U$, jika $X \vartriangle Y = Z \subseteq U$, maka $RS(X \vartriangle Y) = RS(Z) \in T$. Oleh karena itu terbukti T tertutup terhadap operasi *meet* $\blacktriangle$.

2. Diberikan sebarang $X, Y, Z \subseteq U$ dan $RS(X), RS(Y), RS(Z) \in T$. Akan ditunjukkan bahwa $RS(X \vartriangle (Y \vartriangle Z)) = RS((X \vartriangle Y) \vartriangle Z)$, yaitu
   $\underline{P}(X \vartriangle (Y \vartriangle Z)) = \underline{P}((X \vartriangle Y) \vartriangle Z)$, dan
   $\overline{P}(X \vartriangle (Y \vartriangle Z)) = \overline{P}((X \vartriangle Y) \vartriangle Z)$.

   (a) Diberikan sebarang $x \in \underline{P}(X \vartriangle (Y \vartriangle Z))$, diperoleh $\{x \in U|[x]_p \subseteq X \vartriangle (Y \vartriangle Z)\}$. Jadi $[x]_p \subseteq X$ atau $[x]_p \subseteq Y \vartriangle Z$. Akibatnya $[x]_p \subseteq X$

atau $[x]_p \subseteq Y$ atau $[x]_p \subseteq Z$. Oleh karena itu, $[x]_p \subseteq X \vartriangle Y$ atau $[x]_p \subseteq Z$. Hal ini berarti $[x]_p \subseteq (X \vartriangle Y) \vartriangle Z$, sehingga $x \in \underline{P}((X \vartriangle Y) \vartriangle Z)$.
Jadi $\underline{P}(X \vartriangle (Y \vartriangle Z)) \subseteq \underline{P}((X \vartriangle Y) \vartriangle Z)$.

Demikian pula sebaliknya, diberikan sebarang $x \in \underline{P}((X \vartriangle Y) \vartriangle Z)$, diperoleh $\{x \in U|[x]_p \subseteq ((X \vartriangle Y) \vartriangle Z)\}$. Jadi $[x]_p \subseteq X \vartriangle Y$ atau $[x]_p \subseteq Z$. Akibatnya $[x]_p \subseteq X$ atau $[x]_p \subseteq Y$ atau $[x]_p \subseteq Z$. Oleh karena itu, $[x]_p \subseteq X$ atau $[x]_p \subseteq Y \vartriangle Z$. Hal ini berarti $[x]_p \subseteq X \vartriangle (Y \vartriangle Z)$, sehingga $x \in \underline{P}(X \vartriangle (Y \vartriangle Z))$.
Jadi $\underline{P}((X \vartriangle Y) \vartriangle Z) \subseteq \underline{P}(X \vartriangle (Y \vartriangle Z))$.
Oleh karena itu diperoleh $\underline{P}(X \vartriangle (Y \vartriangle Z)) = \underline{P}((X \vartriangle Y) \vartriangle Z)$.

(b) Diberikan sebarang $x \in \overline{P}(X \vartriangle (Y \vartriangle Z))$, diperoleh $\{x \in U|[x]_p \cap (X \vartriangle (Y \vartriangle Z)) \neq \emptyset\}$. Jadi $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap (Y \vartriangle Z) \neq \emptyset$. Akibatnya $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap Y \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap Z \neq \emptyset$. Oleh karena itu $[x]_p \cap (X \vartriangle Y) \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap Z \neq \emptyset$. Hal ini berarti $[x]_p \cap ((X \vartriangle Y) \vartriangle Z) \neq \emptyset$, sehingga $x \in \overline{P}((X \vartriangle Y) \vartriangle Z)$.
Jadi $\overline{P}(X \vartriangle (Y \vartriangle Z)) \subseteq \overline{P}((X \vartriangle Y) \vartriangle Z)$.

Demikian pula sebaliknya, diberikan sebarang $x \in \overline{P}((X \vartriangle Y) \vartriangle Z)$, diperoleh $\{x \in U|[x]_p \cap ((X \vartriangle Y) \vartriangle Z) \neq \emptyset\}$. Jadi $[x]_p \cap (X \vartriangle Y) \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap Z \neq \emptyset$. Akibatnya $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap Y \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap Z \neq \emptyset$. Oleh karena itu $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap (Y \vartriangle Z) \neq \emptyset$. Hal ini berarti $[x]_p \cap (X \vartriangle (Y \vartriangle Z)) \neq \emptyset$, sehingga $x \in \overline{P}(X \vartriangle (Y \vartriangle Z))$.
jadi $\overline{P}((X \vartriangle Y) \vartriangle Z) \subseteq \overline{P}(X \vartriangle (Y \vartriangle Z))$.
Oleh karena itu diperoleh $\overline{P}(X \vartriangle (Y \vartriangle Z)) = \overline{P}((X \vartriangle Y) \vartriangle Z)$.

Jadi $RS(X \vartriangle (Y \vartriangle Z)) = RS((X \vartriangle Y) \vartriangle Z)$ yang bersifat asosiatif.
Dalam hal ini juga dapat dikatakan $(T, \blacktriangle)$ merupakan semigrup pada himpunan *rough*.

3. Diberikan sebarang $RS(X) \in T$. Terdapat $RS(\emptyset) \in T$, sehingga $RS(X)\blacktriangle RS(\emptyset) = RS(X \vartriangle \emptyset) = RS(X)$. Jadi, $RS(X \vartriangle \emptyset) = RS(\emptyset \vartriangle X) = RS(X)$. Oleh karena itu, $RS(\emptyset)$ adalah elemen identitas T terhadap operasi *meet* $\blacktriangle$.

Karena $(1) - (3)$ terpenuhi, $(T, \blacktriangle)$ merupakan monoid pada himpunan *rough*. ■

Berikut diberikan teorema mengenai monoid komutatif pada himpunan *rough*.

Teorema 2.4.17 Diberikan $I = (U, A)$ merupakan sistem informasi dengan U himpunan universal berhingga dan A himpunan atribut pada U. Jika T merupakan himpunan dari semua himpunan *rough*, maka $(T, \blacktriangle)$ merupakan monoid komutatif pada himpunan *rough* (Praba dkk., 2013).

Bukti.
Berdasarkan Teorema 2.4.16, diperoleh $(T, \blacktriangle)$ merupakan monoid. Akan dibuktikan *meet* $\vartriangle$ bersifat komutatif. Diberikan sebarang $X, Y \subseteq U$ dan $RS(X), RS(Y) \in T$. Akan ditunjukkan bahwa $RS(X \vartriangle Y) = RS(Y \vartriangle X)$, yaitu $\underline{P}(X \vartriangle Y) = \underline{P}(Y \vartriangle X)$, dan $\overline{P}(X \vartriangle Y) = \overline{P}(Y \vartriangle X)$.

1. Diberikan sebarang $x \in \underline{P}(X \vartriangle Y)$, dengan $\{x \in U|[x]_p \subseteq (X \vartriangle Y)\}$. Akibatnya $[x]_p \subseteq X$ atau $[x]_p \subseteq Y$, sehingga $[x]_p \subseteq Y$ atau $[x]_p \subseteq X$. Oleh karena itu, $[x]_p \subseteq (Y \vartriangle X)$, sehingga $x \in \underline{P}(Y \vartriangle X)$.
   Jadi $\underline{P}(X \vartriangle Y) \subseteq \underline{P}(Y \vartriangle X)$.

   Demikian pula sebaliknya, diberikan sebarang $x \in \underline{P}(Y \vartriangle X)$, dengan $\{x \in U|[x]_p \subseteq (Y \vartriangle X)\}$. Akibatnya $[x]_p \subseteq Y$ atau $[x]_p \subseteq X$, sehingga $[x]_p \subseteq X$ atau $[x]_p \subseteq Y$. Oleh karena itu, $[x]_p \subseteq (X \vartriangle Y)$, sehingga $x \in \underline{P}(X \vartriangle Y)$.
   Jadi $\underline{P}(Y \vartriangle X) \subseteq \underline{P}(X \vartriangle Y)$.

   Oleh karena itu $\underline{P}(X \vartriangle Y) = \underline{P}(Y \vartriangle X)$.

2. Diberikan sebarang $x \in \overline{P}(X \vartriangle Y)$, dengan $\{x \in U|[x]_p \cap (X \vartriangle Y) \neq \emptyset\}$. Akibatnya $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap Y \neq \emptyset$, sehingga $[x]_p \cap Y \neq \emptyset$ atau

$[x]_p \cap X \neq \emptyset$. Oleh karena itu, $[x]_p \cap (Y \vartriangle X) \neq \emptyset$, sehingga $x \in \overline{P}(Y \vartriangle X)$.
Jadi $\overline{P}(X \vartriangle Y) \subseteq \overline{P}(Y \vartriangle X)$.

Demikian pula sebaliknya, diberikan sebarang $x \in \overline{P}(Y \vartriangle X)$, dengan $\{x \in U | [x]_p \cap (Y \vartriangle X) \neq \emptyset\}$. Akibatnya $[x]_p \cap Y \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap X \neq \emptyset$, sehingga $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap Y \neq \emptyset$. Oleh karena itu $[x]_p \cap (X \vartriangle Y) \neq \emptyset$, sehingga $x \in \overline{P}(X \vartriangle Y)$.
Jadi $\overline{P}(Y \vartriangle X) \subseteq \overline{P}(X \vartriangle Y)$.

Oleh karena itu $\overline{P}(X \vartriangle Y) = \overline{P}(Y \vartriangle X)$.

Jadi $RS(X \vartriangle Y) = RS(Y \vartriangle X)$ yang bersifat komutatif. Oleh karena itu $(T, \blacktriangle)$ merupakan monoid komutatif pada himpunan *rough*. ■

Berikut diberikan teorema mengenai monoid regular *idempotent* pada himpunan *rough*.

Teorema 2.4.18 Diberikan $I = (U, A)$ merupakan sistem informasi dengan U himpunan universal berhingga dan A himpunan atribut pada U. Jika T merupakan himpunan dari semua himpunan *rough*, maka $(T, \blacktriangle)$ merupakan monoid regular yang *idempotent* (Praba dkk., 2013).

Bukti.

Diberikan sebarang $RS(X), RS(Y) \in T$. Akan ditunjukkan bahwa $RS(X) \blacktriangle RS(Y) \blacktriangle RS(X) = RS(X)$, untuk $RS(X) \in T$. Diberikan $Y = E_X = \{x \in U | [x]_p \subseteq X\}$ sehingga $Y \vartriangle X = X$. Oleh karena itu $X \vartriangle Y \vartriangle X = X$.

Jadi $RS(X) \blacktriangle RS(Y) \blacktriangle RS(X) = RS(X \vartriangle Y \vartriangle X) = RS(X)$.

Dari hal itu, maka $(T, \blacktriangle)$ merupakan monoid regular. Selanjutnya, diberikan $RS(X) \in T$, sehingga $RS(X) \blacktriangle RS(X) = RS(X \vartriangle X) = RS(X)$.

Jadi $RS(X)$ merupakan *idempotent* di T, yaitu semua elemen dari T juga merupakan *idempotent*. oleh karena itu, $(T, \blacktriangle)$ merupakan monoid regular yang *idempotent*. ■

Berikut teorema monoid untuk Praba *join* $\triangledown$.

Teorema 2.4.19 Diberikan $I = (U, A)$ merupakan sistem informasi dengan U himpunan universal berhingga dan A himpunan atribut pada U. Jika T merupakan himpunan dari semua himpunan *rough*, maka $(T, \blacktriangledown)$ merupakan monoid (Manimaran dkk., 2014).

Bukti.

1. Akan ditunjukkan T tertutup pada operasi *join* $\blacktriangledown$. Diberikan sebarang $X, Y \subseteq U$, jika $X \triangledown Y = Z \subseteq U$, maka $RS(X \triangledown Y) = RS(Z) \in T$. Oleh karena itu terbukti *join* $\blacktriangledown$ tertutup.

2. Diberikan sebarang $X, Y, Z \subseteq U$ dan $RS(X), RS(Y), RS(Z) \in T$. Akan ditunjukkan bahwa $RS(X \triangledown (Y \triangledown Z)) = RS((X \triangledown Y) \triangledown Z)$, yaitu $\underline{P}(X \triangledown (Y \triangledown Z)) = \underline{P}((X \triangledown Y) \triangledown Z)$, dan $\overline{P}(X \triangledown (Y \triangledown Z)) = \overline{P}((X \triangledown Y) \triangledown Z)$.

   (a) Diberikan sebarang $x \in \underline{P}(X \triangledown (Y \triangledown Z))$, dengan $\{x \in U | [x]_p \subseteq X \triangledown (Y \triangledown Z)\}$. Akibatnya $[x]_p \subseteq (X \cap (Y \triangledown Z)) \cup P_{X \cap (Y \triangledown Z)}$, sehingga $[x]_p \subseteq X$ dan $[x]_p \subseteq Y \triangledown Z$ atau $[x]_p \subseteq P_{X \cap (Y \triangledown Z)}$. Oleh karena itu, $[x]_p \subseteq X$ dan $[x]_p \subseteq (Y \cap Z) \cup [x]_p \subseteq P_{Y \cap Z}$. Hal ini berarti $[x]_p \subseteq X$ dan $[x]_p \subseteq Y \cap Z$ atau $[x]_p \subseteq P_{Y \cap Z}$, sehingga $[x]_p \subseteq X$ dan $[x]_p \subseteq Y$ dan $[x]_p \subseteq Z$. Akibatnya $[x]_p \subseteq X \cap Y$ dan $[x]_p \subseteq Z$. Jika $[x]_p \subseteq (X \triangledown Y) \triangledown Z$, maka $x \in \underline{P}((X \triangledown Y) \triangledown Z)$.
   Jadi $\underline{P}(X \triangledown (Y \triangledown Z)) \subseteq \underline{P}((X \triangledown Y) \triangledown Z)$.

   Demikian pula sebaliknya, diberikan $x \in \underline{P}((X \triangledown Y) \triangledown Z)$, dengan $\{x \in U | [x]_p \subseteq ((X \triangledown Y) \triangledown Z)\}$. Akibatnya $[x]_p \subseteq ((X \triangledown Y) \cap Z) \cup P_{(X \triangledown Y) \cap Z}$, sehingga $[x]_p \subseteq X \triangledown Y$ atau $[x]_p \subseteq P_{(X \triangledown Y) \cap Z)}$ dan $[x]_p \subseteq Z$. Oleh karena itu, $[x]_p \subseteq (X \cap Y) \cup [x]_p \subseteq P_{(X \cap Y)}$ dan $[x]_p \subseteq Z$. Hal ini berarti $[x]_p \subseteq X \cap Y$ atau $[x]_p \subseteq P_{X \cap Y}$ dan $[x]_p \subseteq Z$, sehingga $[x]_p \subseteq X$ dan $[x]_p \subseteq Y$ dan $[x]_p \subseteq Z$. Akibatnya $[x]_p \subseteq X$ dan $[x]_p \subseteq Y \cap Z$. Jika

$[x]_p \subseteq (X \triangledown (Y \triangledown Z))$, maka $x \in \underline{P}(X \triangledown (Y \triangledown Z))$. Jadi $\underline{P}((X \triangledown Y) \triangledown Z) \subseteq \underline{P}(X \triangledown (Y \triangledown Z))$.

Oleh karena itu $\underline{P}(X \triangledown (Y \triangledown Z)) = \underline{P}((X \triangledown Y) \triangledown Z)$.

(b) Diberikan sebarang $x \in \overline{P}(X \triangledown (Y \triangledown Z))$, dengan $\{x \in U | [x]_p \cap (X \triangledown (Y \triangledown Z)) \neq \emptyset\}$. Akibatnya $[x]_p \cap (X \cap (Y \triangledown Z)) \cup P_{X \cap (Y \triangledown Z)} \neq \emptyset$, sehingga $[x]_p \cap (X \cap (Y \triangledown Z)) \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap P_{X \cap (Y \triangledown Z)} \neq \emptyset$.

Kasus 1:

$[x]_p \cap X \neq \emptyset$ dan [x]$_p$ $\cap (Y \triangledown Z) \neq \emptyset$. Akibatnya $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap (Y \cap Z) \cup P_{Y \cap Z} \neq \emptyset$, sehingga $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap (Y \cap Z) \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap P_{Y \cap Z} \neq \emptyset$.

i. Jika $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap Y \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap Z \neq \emptyset$, maka $[x]_p \cap (X \cap Y) \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap Z \neq \emptyset$. Oleh karena itu $[x]_p \cap ((X \triangledown Y) \triangledown Z) \neq \emptyset$. Jadi $\overline{P}(X \triangledown (Y \triangledown Z)) \subseteq \overline{P}((X \triangledown Y) \triangledown Z)$.

ii. Jika $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap P_{Y \cap Z} \neq \emptyset$, maka $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap Y \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap Z \neq \emptyset$. Oleh karena itu $[x]_p \cap (X \cap Y) \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap Z \neq \emptyset$, sehingga $[x]_p \cap ((X \triangledown Y) \triangledown Z) \neq \emptyset$.
Jadi $\overline{P}(X \triangledown (Y \triangledown Z)) \subseteq \overline{P}((X \triangledown Y) \triangledown Z)$.

Kasus 2:

$[x]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap P_{X \cap (Y \triangledown Z)} \neq \emptyset$. Akibatnya $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap (Y \triangledown Z) \neq \emptyset$, sehingga $[x]_p \cap ((X \triangledown Y) \triangledown Z) \neq \emptyset$.
Jadi $\overline{P}(X \triangledown (Y \triangledown Z)) \subseteq \overline{P}((X \triangledown Y) \triangledown Z)$.

Demikian pula sebaliknya, diberikan sebarang $x \in \overline{P}((X \triangledown Y) \triangledown Z)$, dengan $\{x \in U | [x]_p \cap ((X \triangledown Y) \triangledown Z) \neq \emptyset\}$. Akibatnya $[x]_p \cap ((X \triangledown Y) \cap Z)) \cup P_{(X \triangledown Y) \cap Z} \neq \emptyset$, sehingga $[x]_p \cap ((X \triangledown Y) \cap Z) \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap$

$P_{(X\triangledown Y)\cap Z} \neq \emptyset$.

Kasus 1:

$[x]_p \cap (X \triangledown Y) \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap Z \neq \emptyset$. Akibatnya $[x]_p \cap (X \cap Y) \cup P_{X\cap Y} \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap Z \neq \emptyset$, sehingga $[x]_p \cap (X \cap Y) \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap P_{X\cap Y} \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap Z \neq \emptyset$.

i. Jika $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap Y \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap Z \neq \emptyset$, maka $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap (Y \cap Z) \neq \emptyset$. Oleh karena itu $[x]_p \cap (X \triangledown (Y \triangledown Z)) \neq \emptyset$. Jadi $\overline{P}((X \triangledown Y) \triangledown Z) \subseteq \overline{P}(X \triangledown (Y \triangledown Z))$.

ii. Jika $[x]_p \cap P_{X\cap Y} \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap Z \neq \emptyset$, maka $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap Y \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap Z \neq \emptyset$. Oleh karena itu $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap (Y \cap Z) \neq \emptyset$, sehingga $[x]_p \cap (X \triangledown (Y \triangledown Z)) \neq \emptyset$.
Jadi $\overline{P}((X \triangledown Y) \triangledown Z) \subseteq \overline{P}(X \triangledown (Y \triangledown Z))$.

Kasus 2:

$[x]_p \cap P_{(X\triangledown Y)\cap Z} \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap Z \neq \emptyset$. Akibatnya $[x]_p \cap (X \triangledown Y) \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap Z \neq \emptyset$, sehingga $[x]_p \cap (X \triangledown (Y \triangledown Z)) \neq \emptyset$

Jadi $\overline{P}((X \triangledown Y) \triangledown Z) \subseteq \overline{P}(X \triangledown (Y \triangledown Z))$.

Oleh karena itu, $\overline{P}(X \triangledown (Y \triangledown Z)) = \overline{P}((X \triangledown Y) \triangledown Z)$.

Jadi $RS(X \triangledown (Y \triangledown Z)) = RS((X \triangledown Y) \triangledown Z)$ yang bersifat asosiatif.

Dalam hal ini juga dapat dikatakan $(T, \blacktriangledown)$ merupakan semigrup pada himpunan *rough*.

3. Diberikan sebarang $RS(X) \in T$. Terdapat $RS(U) \in T$, sehingga $RS(X) \blacktriangledown RS(U) = RS(X \triangledown U) = RS(X)$.
   Jadi $RS(X \triangledown U) = RS(U \triangledown X) = RS(X)$, dengan $X \triangledown U = (X \cap U) \cup P_{X\cap U} = X \cup P_X = X$.
   $\therefore RS(X \triangledown U) = RS(X)$.

Jadi terdapat elemen identitas $RS(U) \in T$ terhadap operasi *join* $\blacktriangledown$.

Karena $(1) - (3)$ terpenuhi, $(T, \blacktriangledown)$ merupakan monoid pada himpunan *rough*. $\blacksquare$

Selanjutnya, berikut diberikan teorema mengenai monoid komutatif yang *idempotent* pada himpunan *rough*.

Teorema 2.4.20 Diberikan $I = (U, A)$ merupakan sistem informasi dengan U himpunan universal berhingga dan A himpunan atribut pada U. Jika T merupakan himpunan dari semua himpunan *rough*, maka $(T, \blacktriangledown)$ merupakan monoid komutatif yang *idempotent* (Manimaran dkk., 2014).

Bukti.

Berdasarkan Teorema 2.4.19, diperoleh $(T, \blacktriangledown)$ merupakan monoid pada himpunan *rough*. Sehingga akan dibuktikan *join* $\triangledown$ merupakan komutatif. Diberikan $X, Y \subseteq U$ dan $RS(X), RS(Y) \in T$. Akan ditunjukkan bahwa $RS(X \triangledown Y) = RS(Y \triangledown X)$, yaitu $\underline{P}(X \triangledown Y) = \underline{P}(Y \triangledown X)$, dan $\overline{P}(X \triangledown Y) = \overline{P}(Y \triangledown X)$.

1. Diberikan sebarang $x \in \underline{P}(X \triangledown Y)$, dengan $[x]_p \subseteq (X \triangledown Y)$. Akibatnya $[x]_p \subseteq ((X \cap Y) \cup P_{X \cap Y})$, sehingga $[x]_p \subseteq (X \cap Y)$. Oleh karena itu $[x]_p \subseteq (Y \cap X)$. Hal ini berarti $[x]_p \subseteq (Y \triangledown X)$.
   Jadi $\underline{P}(X \triangledown Y) \subseteq \underline{P}(Y \triangledown X)$.

   Demikian pula sebaliknya, diberikan sebarang $x \in \underline{P}(Y \triangledown X)$, dengan $[x]_p \subseteq (Y \triangledown X)$. Akibatnya $[x]_p \subseteq ((Y \cap X) \cup P_{Y \cap X})$, sehingga $[x]_p \subseteq (Y \cap X)$. Oleh karena itu $[x]_p \subseteq (X \cap Y)$. Hal ini berarti $[x]_p \subseteq (X \triangledown Y)$.
   Jadi $\underline{P}(Y \triangledown X) \subseteq \underline{P}(X \triangledown Y)$.

   Oleh karena itu $\underline{P}(X \triangledown Y) = \underline{P}(Y \triangledown X)$.

2. Diberikan sebarang $x \in \overline{P}(X \triangledown Y)$, dengan $[x]_p \cap (X \triangledown Y) \neq \emptyset$. Akibatnya $[x]_p \cap ((X \cap Y) \cup P_{X \cap Y}) \neq \emptyset$, sehingga $[x]_p \cap (X \cap Y) \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap P_{X \cap Y} \neq \emptyset$. Oleh karena itu $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap Y \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap Y \neq \emptyset$. Hal ini berarti $[x]_p \cap (Y \cap X) \neq \emptyset$, sehingga

$[x]_p \cap (Y \triangledown X) \neq \emptyset$.
Jadi $\overline{P}(X \triangledown Y) \subseteq \overline{P}(Y \triangledown X)$.

Demikian pula sebaliknya, diberikan sebarang $x \in \overline{P}(Y \triangledown X)$, dengan $[x]_p \cap (Y \triangledown X) \neq \emptyset$. Akibatnya $[x]_p \cap ((Y \cap X) \cup P_{Y \cap X}) \neq \emptyset$, sehingga $[x]_p \cap (Y \cap X) \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap P_{Y \cap X} \neq \emptyset$. Oleh karena itu $[x]_p \cap Y \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap Y \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap X \neq \emptyset$. Hal ini berarti $[x]_p \cap (X \cap Y) \neq \emptyset$, sehingga $[x]_p \cap (X \triangledown Y) \neq \emptyset$.
Jadi $\overline{P}(Y \triangledown X) \subseteq \overline{P}(X \triangledown Y)$.

Oleh karena itu, $\overline{P}(X \triangledown Y) = \overline{P}(Y \triangledown X)$.

Jadi $RS(X \triangledown Y) = RS(Y \triangledown X)$ yang bersifat komutatif. Oleh karena itu, $(T, \blacktriangledown)$ merupakan monoid komutatif dan semua elemen dari himpunan T merupakan *idempotent*, sehingga monoid komutatif ini dinamakan monoid komutatif *idempotent*. ■

Berikut diberikan teorema semiring pada himpunan *rough*.

Teorema 2.4.21 Diberikan $I = (U, A)$ merupakan sistem informasi dengan U himpunan universal berhingga dan A himpunan atribut pada U. Jika T merupakan himpunan dari semua himpunan *rough*, maka $(T, \blacktriangle, \blacktriangledown)$ merupakan semiring pada himpunan *rough* (Praba dkk., 2015).

Bukti.
Berdasarkan Teorema 2.4.16, 2.4.17, 2.4.18, 2.4.19 dan 2.4.20, diketahui bahwa $(T, \blacktriangle)$ dan $(T, \blacktriangledown)$ masing-masing merupakan semigrup. Selanjutnya akan ditunjukkan sifat distributif untuk $RS(X), RS(Y)$ dan $RS(Z) \in T$, yaitu
$RS(X \vartriangle (Y \triangledown Z)) = RS((X \vartriangle Y) \triangledown (X \vartriangle Z))$, dan
$RS(X \triangledown (Y \vartriangle Z)) = RS((X \triangledown Y) \vartriangle (X \triangledown Z))$.

1. Akan ditunjukkan bahwa:

   (a) $\underline{P}(X \vartriangle (Y \triangledown Z)) = \underline{P}((X \vartriangle Y) \triangledown (X \vartriangle Z))$.

Diberikan sebarang $x \in \underline{P}(X \vartriangle (Y \triangledown Z))$, sehingga $[x]_p \subseteq (X \vartriangle (Y \triangledown Z))$. Akibatnya $[x]_p \subseteq X$ atau $[x]_p \subseteq Y \triangledown Z$, sehingga $[x]_p \subseteq X$ atau $[x]_p \subseteq ((Y \cap Z) \cup P_{Y \cap Z})$. Oleh karena itu, $[x]_p \subseteq ((X \vartriangle Y) \triangledown (X \vartriangle Z))$. Hal ini berarti $x \in P((X \vartriangle Y) \triangledown (X \vartriangle Z))$.
Jadi $\underline{P}(X \vartriangle (Y \triangledown Z)) \subseteq \underline{P}((X \vartriangle Y) \triangledown (X \vartriangle Z))$.

Demikian sebaliknya, diberikan sebarang $x \in \underline{P}((X \vartriangle Y) \triangledown (X \vartriangle Z))$, sehingga $[x]_p \subseteq ((X \vartriangle Y) \triangledown (X \vartriangle Z))$. Akibatnya $[x]_p \subseteq ((X \vartriangle Y) \cap (X \vartriangle Z)) \cup P_{(X \vartriangle Y) \cap (X \vartriangle Z)}$, sehingga $[x]_p \subseteq X \vartriangle Y$ dan $[x]_p \subseteq X \vartriangle Z$ atau $[x]_p \subseteq P_{(X \vartriangle Y) \cap (X \vartriangle Z)}$. Oleh karena itu, $[x]_p \subseteq X$ atau $[x]_p \subseteq Y$ dan $[x]_p \subseteq X$ atau $[x]_p \subseteq Z$, sehingga $[x]_p \subseteq X$ atau $[x]_p \subseteq Y$ dan $[x]_p \subseteq Z$. Hal ini berarti $[x]_p \subseteq X$ atau $[x]_p \subseteq Y \cap Z$, sehingga $[x]_p \subseteq (X \vartriangle (Y \triangledown Z))$. Akibatnya $[x]_p \in \underline{P}(X \vartriangle (Y \triangledown Z))$.
Jadi $\underline{P}((X \vartriangle Y) \triangledown (X \vartriangle Z)) \subseteq \underline{P}(X \vartriangle (Y \triangledown Z))$.
$\therefore \underline{P}(X \vartriangle (Y \triangledown Z)) = \underline{P}((X \vartriangle Y) \triangledown (X \vartriangle Z))$.

(b) $\overline{P}(X \vartriangle (Y \triangledown Z)) = \overline{P}((X \vartriangle Y) \triangledown (X \vartriangle Z))$.

Diberikan sebarang $x \in \overline{P}(X \vartriangle (Y \triangledown Z))$, sehingga $[x]_p \cap (X \vartriangle (Y \triangledown Z)) \neq \emptyset$. Akibatnya $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap (Y \triangledown Z) \neq \emptyset$. Hal ini berarti $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap (Y \cap Z) \cup P_{Y \cap Z} \neq \emptyset$.

Kasus 1:
Jika $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap (Y \cap Z) \neq \emptyset$, maka $[x]_p \cap (X \vartriangle Y) \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap (X \vartriangle Z) \neq \emptyset$. Oleh karena itu, $[x]_p \cap ((X \vartriangle Y) \triangledown (X \vartriangle Z) \neq \emptyset$, sehingga $x \in \overline{P}((X \vartriangle Y) \triangledown (X \vartriangle Z))$.
$\therefore \overline{P}(X \vartriangle (Y \triangledown Z)) \subseteq \overline{P}((X \vartriangle Y) \triangledown (X \vartriangle Z))$.

Kasus 2:
Jika $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap P_{Y \cap Z} \neq \emptyset$, maka $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap Y \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap Z \neq \emptyset$. Oleh karena itu, $[x]_p \cap ((X \vartriangle Y) \triangledown (X \vartriangle$

$Z)) \neq \emptyset$, sehingga $x \in \overline{P}((X \vartriangle Y)\triangledown(X \vartriangle Z))$.
$\therefore \overline{P}(X \vartriangle (Y \triangledown Z)) \subseteq \overline{P}((X \vartriangle Y)\triangledown(X \vartriangle Z))$.

Demikian sebaliknya, diberikan sebarang $x \in \overline{P}((X \vartriangle Y)\triangledown(X \vartriangle Z))$, sehingga $[x]_p \cap ((X \vartriangle Y)\triangledown(X \vartriangle Z)) \neq \emptyset$. Akibatnya $[x]_p \cap ((X \vartriangle Y) \cap (X \vartriangle Z)) \cup P_{(X \vartriangle Y)\cap(X \vartriangle Z)} \neq \emptyset$, sehingga $[x]_p \cap ((X \vartriangle Y) \cap (X \vartriangle Z)) \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap P_{(X \vartriangle Y)\cap(X \vartriangle Z)} \neq \emptyset$. Hal ini berarti $[x]_p \cap (X \vartriangle Y) \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap (X \vartriangle Z) \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap P_{(X \vartriangle Y)\cap(X \vartriangle Z)} \neq \emptyset$.

Kasus 1:
Jika $[x]_p \cap (X \vartriangle Y) \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap (X \vartriangle Z) \neq \emptyset$, maka $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap Y \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap Z \neq \emptyset$. Oleh karena itu $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap Y \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap Z \neq \emptyset$, sehingga $[x]_p \cap (X \vartriangle (Y \triangledown Z)) \neq \emptyset$. Akibatnya $x \in \overline{P}(X \vartriangle (Y \triangledown Z))$.
$\therefore \overline{P}((X \vartriangle Y)\triangledown(X \vartriangle Z)) \subseteq \overline{P}(X \vartriangle (Y \triangledown Z))$.

Kasus 2:
Jika $[x]_p \cap (X \vartriangle Y) \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap P_{(X \vartriangle Y)\cap(X \vartriangle Z)} \neq \emptyset$, maka $[x]_p \cap (X \vartriangle Y) \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap (X \vartriangle Z) \neq \emptyset$. Oleh karena itu $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap Y \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap Z \neq \emptyset$, sehingga $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap Y \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap Z \neq \emptyset$. Hal ini berarti $[x]_p \cap (X \vartriangle (Y \triangledown Z)) \neq \emptyset$. Akibatnya $x \in \overline{P}(X \vartriangle (Y \triangledown Z))$.
$\therefore \overline{P}((X \vartriangle Y)\triangledown(X \vartriangle Z)) \subseteq \overline{P}(X \vartriangle (Y \triangledown Z))$.
Oleh karena itu diperoleh, $RS(X \vartriangle (Y \triangledown Z)) = RS((X \vartriangle Y)\triangledown(X \vartriangle Z))$.

2. Akan ditunjukkan bahwa:

   (a) $\underline{P}(X \triangledown (Y \vartriangle Z)) = \underline{P}((X \triangledown Y) \vartriangle (X \triangledown Z))$.

   Diberikan sebarang $x \in \underline{P}(X \triangledown (Y \vartriangle Z))$, sehingga $[x]_p \subseteq X \triangledown (Y \vartriangle Z)$. Akibatnya $[x]_p \subseteq (X \cap (Y \vartriangle Z) \cup P_{X \cap (Y \vartriangle Z)})$, sehingga $[x]_p \subseteq$

$X \cap Y$ atau $[x]_p \subseteq X \cap Z$. Oleh karena itu, $[x]_p \subseteq (X \triangledown Y) \vartriangle (X \triangledown Z)$, sehingga $x \in \underline{P}((X \triangledown Y) \vartriangle (X \triangledown Z))$.
$\therefore \underline{P}(X \triangledown (Y \vartriangle Z)) \subseteq \underline{P}((X \triangledown Y) \vartriangle (X \triangledown Z))$.

Demikian pula sebaliknya, diberikan sebarang $x \in \underline{P}((X \triangledown Y) \vartriangle (X \triangledown Z))$, sehingga $[x]_p \subseteq ((X \triangledown Y) \vartriangle (X \triangledown Z))$. Akibatnya $[x]_p \subseteq X \triangledown Y$ atau $[x]_p \subseteq X \triangledown Z$, sehingga $[x]_p \subseteq ((X \cap Y) \cup P_{X \cap Y}$ atau $[x]_p \subseteq ((X \cap Z) \cup P_{X \cap Z})$. Oleh karena itu $[x]_p \subseteq (X \cap Y)$ atau $[x]_p \subseteq (X \cap Z)$, sehingga $[x]_p \subseteq X$ dan $[x]_p \subseteq Y$ atau $[x]_p \subseteq Z$. Hal ini berarti $[x]_p \subseteq (X \triangledown (Y \vartriangle Z))$, sehingga $[x]_p \in \underline{P}(X \triangledown (Y \vartriangle Z))$.
$\therefore \underline{P}((X \triangledown Y) \vartriangle (X \triangledown Z)) \subseteq \underline{P}(X \triangledown (Y \vartriangle Z))$.
Oleh karena itu, $\underline{P}(X \triangledown (Y \vartriangle Z)) = \underline{P}((X \triangledown Y) \vartriangle (X \triangledown Z))$.

(b) $\overline{P}(X \triangledown (Y \vartriangle Z)) = \overline{P}((X \triangledown Y) \vartriangle (X \triangledown Z))$
Diberikan sebarang $x \in \overline{P}(X \triangledown (Y \vartriangle Z))$, sehingga $[x]_p \cap (X \triangledown (Y \vartriangle Z)) \neq \emptyset$. Akibatnya $[x]_p \cap (X \cap (Y \vartriangle Z) \cup P_{X \cap (Y \vartriangle Z)}) \neq \emptyset$, sehingga $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap Y \vartriangle Z \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap P_{X \cap (Y \vartriangle Z)}) \neq \emptyset$.

Kasus 1:
Jika $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap (Y \vartriangle Z) \neq \emptyset$, maka $[x]_p \cap (X \triangledown Y) \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap (X \triangledown Z) \neq \emptyset$. Oleh karena itu $[x]_p \cap (X \triangledown Y) \vartriangle (X \triangledown Z) \neq \emptyset$, sehingga $x \in \overline{P}((X \triangledown Y) \vartriangle (X \triangledown Z))$.
$\therefore \overline{P}(X \triangledown (Y \vartriangle Z)) \subseteq \overline{P}((X \triangledown Y) \vartriangle (X \triangledown Z))$.

Kasus 2:
Jika $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap P_{X \cap (Y \vartriangle Z)} \neq \emptyset$, maka $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap Y \vartriangle Z \neq \emptyset$. Oleh karena itu $[x]_p \cap X \triangledown Y \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap (X \triangledown Z) \neq \emptyset$, sehingga $[x]_p \cap (X \triangledown Y) \vartriangle (X \triangledown Z) \neq \emptyset$. Hal ini berarti $x \in \overline{P}((X \triangledown Y) \vartriangle (X \triangledown Z))$.
$\therefore \overline{P}(X \triangledown (Y \vartriangle Z)) \subseteq \overline{P}((X \triangledown Y) \vartriangle (X \triangledown Z))$.

Demikian pula sebaliknya, diberikan sebarang $x \in \overline{P}((X \triangledown Y) \vartriangle (X \triangledown Z))$, sehingga $[x]_p \cap ((X \triangledown Y) \vartriangle (X \triangledown Z)) \neq \emptyset$. Akibatnya $[x]_p \cap (X \triangledown Y) \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap (X \triangledown Z) \neq \emptyset$, sehingga $[x]_p \cap (X \cap Y) \cup P_{X \cap Y} \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap (X \cap Z) \cup P_{X \cap Z} \neq \emptyset$.

Kasus 1:
Jika $[x]_p \cap (X \cap Y) \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap (X \cap Z) \neq \emptyset$, maka $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap Y \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap Z \neq \emptyset$. Oleh karena itu $[x]_p \cap (X \triangledown (Y \vartriangle Z)) \neq \emptyset$, sehingga $x \in \overline{P}(X \triangledown (Y \vartriangle Z))$.
$\therefore \overline{P}((X \triangledown Y) \vartriangle (X \triangledown Z)) \subseteq \overline{P}(X \triangledown (Y \vartriangle Z))$.

Kasus 2:
Jika $[x]_p \cap P_{X \cap Y} \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap P_{X \cap Z} \neq \emptyset$, maka $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap Y \neq \emptyset$ atau $[x]_p \cap X \neq \emptyset$ dan $[x]_p \cap Z \neq \emptyset$. Oleh karena itu $[x]_p \cap (X \triangledown (Y \vartriangle Z)) \neq \emptyset$, sehingga $x \in \overline{P}(X \triangledown (Y \vartriangle Z))$.
$\therefore \overline{P}((X \triangledown Y) \vartriangle (X \triangledown Z)) \subseteq \overline{P}(X \triangledown (Y \vartriangle Z))$.
Oleh karena itu, $\overline{P}(X \triangledown (Y \vartriangle Z)) = \overline{P}((X \triangledown Y) \vartriangle (X \triangledown Z))$.

Berdasarkan hal itu, diperoleh $RS(X \triangledown (Y \vartriangle Z)) = RS((X \triangledown Y) \vartriangle (X \triangledown Z))$

Jadi $(T, \blacktriangle, \blacktriangledown)$ merupakan semiring pada himpunan *rough*. ■

Berikut lemma mengenai order dari semiring pada himpunan *rough*.

Lemma 2.4.22 Misalkan X adalah himpunan kelas ekuivalensi dan P_x merupakan himpunan perwakilan kelas ekuivalensi yang kardinalitasnya lebih besar dari 1dan misalkan $|X| = n$ dan $|P_x| = m$ dengan $1 \leq m \leq n$, sehingga order dari semiring *rough* adalah $2^{n-m}3^m$ (Manimaran dkk., 2017).

Bukti.

$$
\begin{aligned}
|T| &= \binom{m}{0}2^n + \binom{m}{1}(2^n - 2^{n-1}) + \binom{m}{2}(2^n - (2^2-1)2^{n-2}) + \dots \\
&+ \binom{m}{m}(2^n - (2^m-1)2^{n-m}) + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\{2^n - (2^{k-1}-1)2^{n-k}\} \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}2^{n-k} \\
&= 2^n\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}2^{-k} = 2^{n-m}3^m.
\end{aligned}
$$

■

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun 2023/2024, bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Tahapan Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan studi literatur sebagai berikut:

1. Studi literatur dari jurnal, buku dan artikel ilmiah yang berhubungan dengan penelitian ini.
2. Mempelajari definisi dan teorema yang berkaitan dengan permasalahan yang berhubungan dengan penelitian.

Langkah-langkah dalam mencapai tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. mengkonstruksi semimodul atas semiring pada himpunan *rough* menggunakan konsep Praba;
2. mengkonstruksi *direct sum* dari dua semimodul atas semiring pada himpunan *rough* menggunakan konsep Praba;
3. menyelidiki sifat-sifat *direct sum* dari dua semimodul atas semiring pada himpunan *rough* yang telah dikonstruksi sebelumnya.

Langkah-langkah penelitian diberikan pada Gambar 3.1.

Mempelajari materi terkait: ring (Rasiman, 2018), modul atas ring (Wijayanti, 2016 dan Yuwaningsih, 2020), semiring (Subiono, 2013 dan Kandasamy, 2002), semimodul atas semiring (Andari, 2016), himpunan *rough* (Pawlak, 1982 dan Hafifullah dkk.,2022), himpunan *fuzzy* (Zimmermann, 1991 dan Munir, 2012), ring *rough* (Isaac & Nelima, 2013), modul *rough* (Zhang dkk., 2006) dan konsep Praba (Praba dkk., 2013 dan Manimaran dkk., 2017).

Langkah 1

Mengkonstruksi semimodul atas semiring pada himpunan *rough* menggunakan konsep Praba.

Langkah 2

Mengkonstruksi *direct sum* dari dua semimodul atas semiring pada himpunan *rough* menggunakan konsep Praba.

Langkah 3

Menyelidiki sifat *direct sum* dari dua semimodul atas semiring pada himpunan *rough* yang telah dikonstruksi sebelumnya.

Gambar 3.1 Tahapan penelitian

BAB V

SIMPULAN DAN SARAN

5.1 Simpulan

Berdasarkan pembahasan semimodul atas semiring pada himpunan *rough* yang telah dikonstruksi sebelumnya, diperoleh kesimpulan bahwa diperlukan suatu sistem informasi $I = (U, A)$ dengan nilai keanggotaannya himpunan *fuzzy* yang selanjutnya telah dibentuk kelas-kelas ekuivalensi dan T yang merupakan himpunan dari semua himpunan *rough*. Kemudian himpunan T dengan operasi Praba *meet* ▲ dan Praba *join* ▼ membentuk semimodul atas semiring yang memenuhi aksioma berikut yaitu $(T, \blacktriangle)$ merupakan monoid pada himpunan *rough*; $(T, \blacktriangle, \blacktriangledown)$ merupakan semiring pada himpunan *rough* dan dapat didefinisikan perkalian skalar $\blacktriangledown : T \times T \to T$.

Direct sum dari dua semimodul atas semiring pada himpunan *rough* terbentuk dari T_1 dan T_2 yang merupakan himpunan dari semua himpunan *rough* pada U_1 dan U_2 secara berturut-turut dengan operasi Praba *meet* ▲ dan Praba *join* ▼ dengan memenuhi aksioma $(T_1 \times T_2, \blacktriangle^2)$ merupakan monoid pada himpunan *rough*, $(T_1 \times T_2, \blacktriangle^2, \blacktriangledown^2)$ merupakan semiring pada himpunan *rough* dan dapat didefinisikan perkalian skalar $\blacktriangledown^2 : (T_1, T_2) \times (T_1, T_2) \to (T_1, T_2)$.

Himpunan T_1 dan T_2 dengan operasi *meet* ▲ telah membentuk monoid terhadap operasi $(RS(X_1), RS(Y_1))\blacktriangle^2(RS(X_2), RS(Y_2)) = (RS(X_1 \blacktriangle X_2), RS(Y_1 \blacktriangle Y_2))$ untuk setiap $RS(X_1), RS(X_2) \in T_1$ dan $RS(Y_1), RS(Y_2) \in T_2$. Himpunan T_1 dan T_2 dengan operasi *meet* ▲ dan *join* ▼ juga membentuk semiring pada himpunan *rough* serta dapat didefinisikannya perkalian skalar *join* $\blacktriangledown^2 : (T_1, T_2) \times (T_1, T_2) \to (T_1, T_2)$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian, dalam mengkonstruksikan semimodul atas semiring pada himpunan *rough* menggunakan konsep Praba masih menggunakan operasi perkalian skalar yang sama dengan operasi perkalian pada semiring. Oleh karena itu terbuka peluang untuk dapat operasi perkalian skalar yang lain. Selanjutnya masih sedikit ditemukan sifat-sifatnya, sehingga tidak menutup kemungkinan masih terdapat sifat-sifat lain dari semimodul atas semiring yang dapat diterapkan menggunakan konsep Praba. Selain itu, dalam mengkonstruksi semimodul atas semiring pada himpunan *rough* menggunakan konsep Praba ke dalam contoh-contoh dapat menggunakan himpunan universal dan atribut lain selain yang terdapat pada penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Andari, A. (2016). *Semimodul atas Semiring*. Malang: UB Press.

Ayuni, F., Fitriani, F., & Faisol, A. (2022). Rough U-Exact Sequence of Rough Groups. *Jurnal Pendidikan Matematika*, 13(2), pp. 363–371.

Bagirmaz, N., & Ozcan, A. F. (2015). Rough Semigroups on Approximation Spaces. *International Journal of Algebra*, 9(7), pp. 339–350.

Clifford, A. H. (1954). Bands of Semigroups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 5(3), pp. 499-504.

Davvaz, B. (2004). Roughness in Rings. *Information Sciences*, 164(1-4), pp. 147–163.

Fitriani, F., & Faisol, A. (2022). *Grup*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Hafifullah, D., Fitriani, F., & Faisol, A. (2022). the Properties of Rough V-Coexact Sequence in Rough Group. *Barekeng: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 16(3), pp. 1069–1078.

Howie, J.M. (1976). *An Introduction to Semigroup Theory*. London: Academic Press, Ltd.

Isaac, P., & Neelima, C.A. (2013). Rough Ideals and Their Properties. *Journal of Global Research in Mathematical Archives*, 1(6), pp. 90-97.

Jensen, R., Tuson, A., dan Shen, Q. (2014). Finding Rough and Fuzzy-Rough Set Reducts With SAT. *Information Sciences, 255*, pp. 100–120.

Jesmalar, L. (2017). Homomorphism and Isomorphism of Rough Group. *International Journal of Advance Research, Ideas and Innovations in Technology*, 3(3), pp. 1382–1387.

Kandasamy, V.W.B. (2002). *Smarandache Semirings, Semifields, and Semivector Spaces*. USA: American Research Press.

Kuroki, N. 1997. Rough Ideals in Semigroups. *Information Sciences*, 100(1-4), pp. 139–163.

Lisapaly, S.R., & Persulessy, E.R. (2011). Semiring. *Barekeng: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 5(2), pp. 45-47.

Manimaran, A., Praba, B., & Chandrasekaran, V. M. (2014). Regular Rough $\triangledown$ Monoid of Idempotents. *International Journal of Applied Engineering Research (IJAER)*, 9(16), pp. 3469–3479.

Manimaran, A., Praba, B., & Chandrasekaran, V. M. (2017). Characterization of Rough Semiring. *Afrika Matematika*, 28(5–6), pp. 945–956.

Miao, D., Han, S., Li, D., & Sun, L. (2005). Rough Group, Rough Subgroup and their properties. *Lecture Notes in Artificial Intelligences*, 3641, pp. 104–113.

Munir, R. (2012). *Matematika Diskrit*(5th ed.). Bandung: Informatika.

Nugraha, A. A., Fitriani, F., Ansori, M., & Faisol, A. (2022). Implementation of Rough Set on a Group Structure. *Jurnal Matematika Mantik*, 8(1), pp. 45–52.

Pawlak, Z. (1982). Rough Sets. *International Journal of Computer dan Information Sciences*, 11(5), pp. 341–356.

Praba, B., Chandrasekaran, V. M., & Manimaran, A. (2013). A commutative Regular Monoid on Rough Sets. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 31, pp. 307–318.

Praba, B., Chandrasekaran, V. M., & Manimaran, A. (2015). Semiring on Rough sets. *Indian Journal of Science and Technology*, 8(3), pp. 280–286.

Praba, B., Manimaran, A., & Chandrasekaran, V. M. (2016). Total Graph and Complemented Graph of a Rough Semiring. *Gazi University Journal of Science*, 29(2), pp. 459–466.

Praba, B., Mohan, R., & In, C. (2013). Rough Lattice. *International Journal of Fuzzy Mathematics and Systems*, 3(2), pp. 135–151.

Rasiman, M.R. Rubowo & A.S. Pramasdyahsari. (2018). *Teori Ring*. Semarang: Universitas PGRI Semarang Press.

Setiawan, A. (2011). *Aljabar Abstrak (Teori Grup dan Teori Ring)*. Salatiga: UKSW.

Sinha, A. K., & Prakash, A. (2015). Rough Projective Module. *Advances in Applied Science and Environmental Engineering - ASEE 2014*, pp. 35–38.

Subiono, S. (2013). *Aljabar Maxplus dan Terapannya (Version 1.1.1)*. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Wijayanti,I.E., Wahyuni, S., Yuwaningsih, D. A., & Hartanto, A.D. (2021). *Teori Ring dan Modul*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.

Yanti, G. A. D., Fitriani, F., & Faisol, A. (2023). the Implementation of a Rough Set of Projective Module. *Barekeng: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 17(2), pp. 0735–0744.

Yuwaningsih, D. A. (2020). Hasil Tambah Langsung Suatu $(R, S)-$Modul. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, 3(2), pp. 98–106.

Zhang, Q., Zhao, S., & Fu, A. (2006). Rough Modules and Their Some Properties. *Proceeding of the Fifth International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, pp. 2290-2293.

Zimmermann. (1991). *Fuzzy Sets Theory and Its Applications (Edisi 2)*. Massachusetts: Kluwer Academic Publishers.