BATAS ATAS DIMENSI PARTISI GRAF BARISAN SEGITIGA DAN BARBELNYA

Skripsi

Oleh

NAZILA ADELIA AZZAHRA
NPM. 2117031029

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

ABSTRACT

THE UPPER BOUND OF PARTITION DIMENSION OF THE TRIANGULAR ROW GRAPH AND ITS BARBELL

By

Nazila Adelia Azzahra

The partition dimension of a graph G, denoted by $pd(G)$ is the minimum cardinality of the resolving partition. In this research, the upper bound of the partition dimension of the triangular row graph $TS(n)$ and the barbell triangular row graph $B_{TS(n)}$ are discussed. We obtained, $pd(TS(n)) \leq 4$ for $2 \leq n \leq 9$; $pd(TS(n)) \leq 5$ for $10 \leq n \leq 12$; $pd(TS(n)) \leq 6$ for $13 \leq n \leq 15$; $pd(TS(n)) \leq 7$ for $16 \leq n \leq 18$; and $pd(TS(n)) \leq 8$ for $n = 19$. Furthermore, for its barbell, $pd(B_{TS(n)}) \leq 4$ for $2 \leq n \leq 6$; $pd(B_{TS(n)}) \leq 5$ for $7 \leq n \leq 10$; $pd(B_{TS(n)}) \leq 6$ for $11 \leq n \leq 13$; $pd(B_{TS(n)}) \leq 7$ for $14 \leq n \leq 16$; and $pd(B_{TS(n)}) \leq 8$ for $17 \leq n \leq 19$.

Keywords: Partition dimension, triangle row graph, barbell triangle row graph.

ABSTRAK

BATAS ATAS DIMENSI PARTISI GRAF BARISAN SEGITIGA DAN BARBELNYA

Oleh

Nazila Adelia Azzahra

Dimensi partisi suatu graf G, dinotasikan dengan $pd(G)$ merupakan kardinalitas minimum dari partisi pembeda. Pada penelitian ini dibahas batas atas dimensi partisi graf barisan segitiga $TS(n)$ dan graf barbel barisan segitiga $B_{TS(n)}$. Hasil yang diperoleh, $pd(TS(n)) \leq 4$ untuk $2 \leq n \leq 9$; $pd(TS(n)) \leq 5$ untuk $10 \leq n \leq 12$; $pd(TS(n)) \leq 6$ untuk $13 \leq n \leq 15$; $pd(TS(n)) \leq 7$ untuk $16 \leq n \leq 18$; dan $pd(TS(n)) \leq 8$ untuk $n = 19$. Selanjutnya pada graf barbelnya, $pd(B_{TS(n)}) \leq 4$ untuk $2 \leq n \leq 6$; $pd(B_{TS(n)}) \leq 5$ untuk $7 \leq n \leq 10$; $pd(B_{TS(n)}) \leq 6$ untuk $11 \leq n \leq 13$; $pd(B_{TS(n)}) \leq 7$ untuk $14 \leq n \leq 16$; dan $pd(B_{TS(n)}) \leq 8$ untuk $17 \leq n \leq 19$.

Kata-kata kunci: Dimensi partisi, graf barisan segitiga, graf barbel barisan segitiga.

BATAS ATAS DIMENSI PARTISI GRAF BARISAN SEGITIGA DAN BARBELNYA

NAZILA ADELIA AZZAHRA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

Judul Skripsi : **BATAS ATAS DIMENSI PARTISI GRAF BARISAN SEGITIGA DAN BARBELNYA**

Nama Mahasiswa : *Nazila Adelia Azzahra*

Nomor Pokok Mahasiswa : **2117031029**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.	**Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si.**
NIP 197604112000122001	NIP 199311062019032018

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr.Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim penguji

Ketua	:	**Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.**	....
Sekretaris	:	**Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **09 Mei 2025**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Nazila Adelia Azzahra**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2117031029**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Batas Atas Dimensi Partisi Graf Barisan Segitiga dan Barbelnya**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 09 Mei 2025

Penulis,

Nazila Adelia Azzahra

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Nazila Adelia Azzahra yang lahir di Ketapang pada tanggal 25 April 2003. Penulis merupakan anak pertama dari lima bersaudara dari pasangan Bapak Pipdiawan dan Ibu Sari Lestari.

Penulis memulai pendidikan formal di TK Pertiwi pada tahun 2008 sampai dengan 2009. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan Sekolah Dasar (SD) di SD Negeri 01 Ketapang pada tahun 2009 sampai dengan 2015. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan Sekolah Menengah Pertama (SMP) di SMP Negeri 01 Sungkai Selatan pada tahun 2015 sampai dengan 2018, dan menyelesaikan pendidikan Sekolah Menengah Atas (SMA) di SMA Negeri 02 Kotabumi pada tahun 2021.

Pada tahun 2021, penulis terdaftar sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN). Selama masa studi, penulis fokus pada pengembangan akademik dan juga aktif mengikuti kegiatan pengembangan diri seperti seminar dan workshop yang berkaitan dengan ilmu pengetahuan dan teknologi. Di tahun 2024, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Badan Pendapatan Daerah (BAPENDA) Provinsi Lampung sebagai bentuk penerapan ilmu yang didapatkan selama kuliah, kemudian sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Trisnomulyo, Kecamatan Batang Hari Nuban, Kabupaten Lampung Timur.

KATA INSPIRASI

”Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya.”
(QS. Al-Baqarah: 286)

”Allah mengetahui, sedangkan kamu tidak mengetahui.”
(QS. Al-Baqarah: 216)

”Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan.”
(QS. Al-Insyirah: 6)

”Dan bersabarlah kamu, sesungguhnya janji Allah adalah benar.”
(QS. Ar-Rum: 60)

”Tak semua usaha dipermudah, tapi yang berusaha pasti akan berubah.”

”Allah selalu mewujudkan hal yang mustahil melalui cara yang lebih mustahil lagi.”

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap Alhamdulillah dan syukur kepada Allah SWT atas nikmat serta hidayah-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan Bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Ayah dan Ibuku Tercinta

Terimakasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini. Terimakasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta
Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul ”Batas Atas Dimensi Partisi Graf Barisan Segitiga dan Barbelnya” dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing 1 yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing akademik.
6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Abi, umi, adik-adik, dan keluarga yang selalu mendukung penulis sehingga skripsi ini dapat diselesaikan.

8. Teman-teman seperbimbingan skripsi yang saling memberi semangat, mendukung, menemani, dan membantu penulis dalam penyelesaian skripsi.

9. M. Miftach Rachmaturridho Arifin yang selalu memberikan semangat, menjadi tempat berbagi cerita, serta memberikan dukungan kepada penulis selama proses penyusunan skripsi ini.

10. Ama, Awa, Dini, dan Uncu Meri selaku sahabat yang senantiasa mendukung penulis dalam mengerjakan skripsi ini.

11. Teman MABAR (Mahasiswa Aljabar), sobat Cocoki dan teman-teman angkatan 2021 yang telah membersamai penulis dari perkuliahan.

12. Semua pihak yang membantu dalam menyelesaikan skripsi ini, yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 09 Mei 2025

Nazila Adelia Azzahra

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI . . . . **xiii**

DAFTAR GAMBAR . . . . **xv**

I PENDAHULUAN **1**

1.1 Latar Belakang Masalah 1

1.2 Tujuan Penelitian 2

1.3 Manfaat Penelitian 2

II TINJAUAN PUSTAKA **3**

2.1 Konsep Dasar Graf 3

2.2 Graf Barisan Segitiga dan Barbelnya 4

2.3 Dimensi Partisi Graf 6

III METODE PENELITIAN **8**

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian 8

3.2 Langkah-Langkah Penelitian 8

IV HASIL DAN PEMBAHASAN **10**

4.1 Batas Atas Dimensi Partisi Graf Barisan Segitiga 10

4.2 Batas Atas Dimensi Partisi Graf Barbel Barisan Segitiga 20

V SIMPULAN DAN SARAN **30**

5.1 Simpulan 30

5.2 Saran 30

DAFTAR PUSTAKA **31**

DAFTAR GAMBAR

1.1 Representasi graf untuk masalah jembatan Konigsberg 1

2.1 Contoh graf dengan 5 simpul dan 7 sisi 3
2.2 Graf barisan segitiga $TS(2)$ 5
2.3 Graf barbel barisan segitiga $B_{TS(2)}$ 5
2.4 Dimensi partisi pada graf G 6

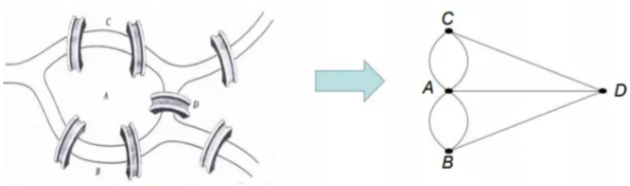
4.1 Contoh partisi pembeda minimal dari graf $TS(5)$ 11
4.2 Contoh partisi pembeda minimal dari graf $TS(10)$ 12
4.3 Contoh partisi pembeda minimal dari graf $TS(13)$ 14
4.4 Contoh partisi pembeda minimal dari graf $TS(16)$ 16
4.5 Contoh partisi pembeda minimal dari graf $TS(19)$ 18
4.6 Contoh partisi pembeda minimal dari graf $B_{TS(5)}$ 21
4.7 Contoh partisi pembeda minimal dari graf $B_{TS(10)}$ 22
4.8 Contoh partisi pembeda minimal dari graf $B_{TS(13)}$ 24
4.9 Contoh partisi pembeda minimal dari graf $B_{TS(16)}$ 26
4.10 Contoh partisi pembeda minimal dari graf $B_{TS(19)}$ 28

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika diskrit yang mempelajari hubungan antar objek yang direpresentasikan dalam bentuk graf. Teori graf pertama kali dikenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 untuk memecahkan masalah jembatan Konigsberg. Euler merepresentasikan daratan dengan simpul ($vertex$), dan jembatan ditunjukkan dengan garis atau sisi ($edge$). Menurut Euler, tidak mungkin ada lintasan yang dapat melewati ketujuh jembatan yang ada, dengan setiap jembatan hanya boleh dilalui satu kali jika derajat setiap simpul tidak seluruhnya genap (Munir, 2010).



Gambar 1.1 Representasi graf untuk masalah jembatan Konigsberg
(Sumber:https://id.wikipedia.org/wiki/Berkas:Konigsberg_bridges.png)

Salah satu kajian ilmu dalam teori graf adalah dimensi partisi. dimensi partisi berawal dari konsep himpunan pembeda. Konsep ini pertama kali diusulkan oleh Slater pada tahun 1975, yang menyatakan bahwa himpunan pembeda pada W adalah simpul-simpul di graf G sehingga jarak yang berbeda diperoleh untuk setiap simpul di W. Konsep ini juga dikenalkan oleh Chartand dkk. (1998), sebagai kardinalitas minimum dari himpunan pembeda.

Telah dilakukan beberapa penelitian mengenai dimensi partisi suatu graf. Chartrand dkk. (1998) menentukan dimensi partisi graf terhubung dari graf bintang. (Asmiati,

2012) menemukan dimensi partisi pada graf amalgamasi bintang. (Asmiati, 2016) berhasil mendapatkan dimensi partisi n graf amalgamasi bintang yang dihubungkan suatu lintasan.

Penelitian tentang dimensi partisi graf ini terus berkembang. Sanjaya dkk. (2019) berhasil mendapatkan dimensi partisi dari graf kubik. Penelitian oleh Daming dkk. (2020) berhasil mendapatkan dimensi partisi graf hasil amalgamasi siklus. Ramdhani & Rahmi (2021) berhasil mendapatkan dimensi partisi graf lintasan. Penelitian oleh Nabila dkk. (2023) berhasil memperoleh dimensi partisi amalgamasi sisi pada graf siklus. Hafidh & Barkoro (2024) berhasil mendapatkan dimensi partisi graf pohon.

Dalam konsep batas atas dimensi partisi graf belum ada penelitian yang mengkaji graf barisan segitiga $TS(n)$. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk membahas dan mengkaji batas atas dimensi partisi pada graf barisan segitiga $TS(n)$ dengan $2 \leq n \leq 19$.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini untuk menetukan batas atas dimensi partisi dari graf barisan segitiga $TS(n)$ dan batas atas dimensi partisi graf barbel barisan segitiga $B_{TS(n)}$ untuk $2 \leq n \leq 19$.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

1. Memberikan pengetahuan mengenai batas atas dimensi partisi dari graf barisan segitiga $TS(n)$ dan batas atas dimensi partisi graf barbel barisan segitiga $B_{TS(n)}$ untuk $2 \leq n \leq 19$.

2. Sebagai referensi untuk mempelajari lebih lanjut tentang batas atas dimensi partisi dari suatu graf dan graf barisan segitiga lainnya.

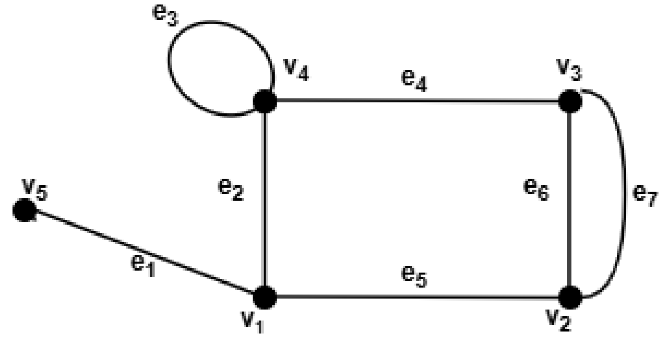
BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

Konsep dasar tentang graf pada penelitian ini diambil dari (Deo, 1989). Graf G adalah himpunan terurut $(V(G), E(G))$, dengan $V(G)$ himpunan simpul dari G dan $V(G)$ adalah himpunan tak kosong serta $E(G)$ himpunan sisi ($edge$) atau pasangan tak berurut dari $V(G)$. Banyaknya simpul pada $V(G)$ disebut orde dari graf G. Jika simpul v_1 dan v_2 terhubung oleh sisi e, maka v_1 dan v_2 disebut bertetangga ($adjacent$), dan sisi e juga disebut menempel ($incident$) dengan v_1 dan v_2.

Himpunan simpul-simpul yang bertetangga dengan simpul v, disebut himpunan tetangga ($neigborhood$) dinotasikan dengan $N(v)$. Jika terdapat setidaknya satu lintasan untuk setiap pasangan simpul berbeda di graf G, maka graf G disebut graf terhubung ($connected\ graph$) jika tidak, maka graf G disebut graf tak terhubung ($disconnected\ graph$). Pada graf terhubung G, jarak ($distance$) kedua simpul berbeda v_i dan v_j dinotasikan dengan $d(v_i,v_j)$ adalah panjang lintasan terpendek di antara kedua simpul dalam suatu graf.



Gambar 2.1 Contoh graf dengan 5 simpul dan 7 sisi

Pada Gambar 2.1 graf dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$. Simpul v_1 bertetangga dengan v_2, v_4 dan v_5, sedangkan v_1 dan v_5 menempel dengan e_1. Sebaliknya, sisi e_1 menempel pada simpul v_1 dan v_5. Himpunan tetangga dari v_1, yaitu $N(v_1) = \{v_2, v_4, v_5\}$.

Pada graf, derajat ($degree$) simpul v adalah banyaknya sisi yang menempel pada simpul v. Daun ($pendant\ vertax$) adalah simpul berderajat 1. Pada Gambar 2.1 v_5 adalah daun berderajat 1, $d(v_1)$ = $d(v_2)$ = $d(v_3)$ = 3, $d(v_4)$ = 4.

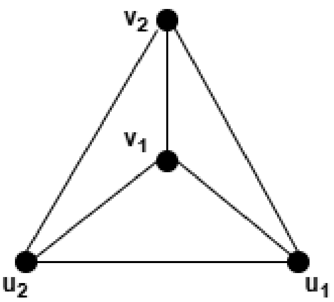
Sisi yang memiliki simpul awal dan simpul akhir yang sama disebut gelung ($loop$). Graf sederhana tidak memiliki sisi paralel dan $loop$, sisi paralel ($parallel\ edges$) adalah sisi yang memiliki dua ujung yang sama. Pada Gambar 2.1 terdapat $loop$ yaitu e_3, serta e_6 dan e_7 disebut sisi paralel.

Dalam pembahasan graf, istilah lain yang sering muncul adalah jalan ($walk$), lintasan ($path$), sirkuit ($circuit$), dan siklus ($cycle$). Jalan ($walk$) adalah barisan yang dimulai dari simpul dan diakhiri oleh simpul sehingga setiap sisi bertemu dengan simpul sebelum dan sesudahnya. Contoh jalan dari v_1 dan v_2 berdasarkan Gambar 2.1 adalah $v_1 - e_5 - v_2 - e_6 - v_3 - e_7 - v_2$. Lintasan ($path$) adalah jalan yang melewati beberapa simpul yang berbeda-beda. Contoh lintasan pada Gambar 2.1 $v_4 - e_4 - v_3 - e_6 - v_2 - e_5 - v_1 - e_1 - v_5$. Siklus ($cycle$) adalah lintasan dengan simpul awal dan simpul akhir yang sama. Contoh sirkuit pada Gambar 2.1 adalah $v_4 - e_4 - v_3 - e_6 - v_2 - e_5 - v_1 - e_2 - v_4$. Diberikan contoh jarak dari v_1 ke v_3 berdasarkan Gambar 2.1 diperoleh $d(v_1$,$v_3)$ = 2.

2.2 Graf Barisan Segitiga dan Barbelnya

Menurut Hasmawati (2023), sebuah graf $G(V, E)$ dikatakan graf barisan segitiga jika tidak terdapat sisi yang saling menyilang dan terdapat satu sisi bersama (sebagai alas) dari n segitiga-segitiga dan simpul dari setiap segitiga yang tidak terkait dengan sisi alas, terletak pada suatu lintasan yang sama. Masing-masing simpul pada lintasan disebut simpul puncak segitiga.

Berikut diberikan contoh graf barisan segitiga $TS(2)$:

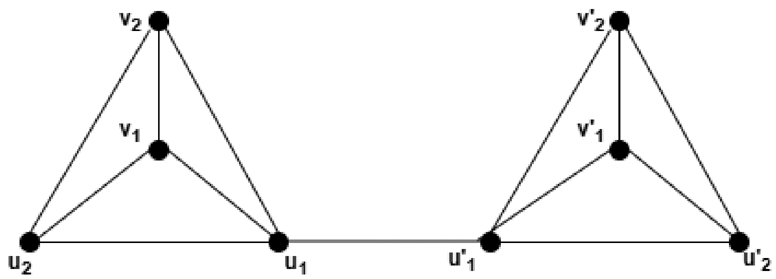


Gambar 2.2 Graf barisan segitiga $TS(2)$

Pada Gambar 2.2 sisi u_1u_2 merupakan sisi bersama dari semua segitiga. Simpul v_1, v_2 terletak pada lintasan yang sama. Misalkan $C = v_1u_2u_1v_1$ adalah sebuah segitiga. Misalkan v_2 yaitu sebuah simpul baru di luar C kemudian v_2 dihubungkan dengan v_1, u_1 dan u_2, demikian sampai simpul $v_1, v_2, ..., v_n$ terletak pada suatu lintasan yang sama. Barisan segitiga dinotasikan $TS(n)$, nilai n yaitu banyak simpul puncak segitiga.

Graf barbel barisan segitiga dilambangkan dengan $B_{TS(n)}$, diperoleh dengan menyalin graf barisan segitiga dan menghubungkan ke dua graf tersebut dengan jembatan (u_1u_1').

Berikut diberikan contoh graf barbel barisan segitiga $B_{TS(2)}$:



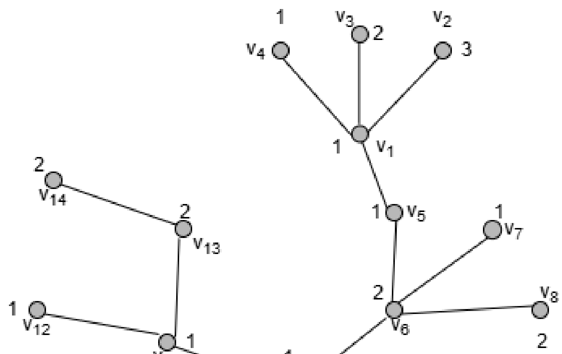
Gambar 2.3 Graf barbel barisan segitiga $B_{TS(2)}$

2.3 Dimensi Partisi Graf

Chartrand dkk. (1998) pertama kali memperkenalkan dimensi partisi graf sebagai pengembangan atau variasi dari gagasan dimensi matrik. Chartrand dkk. (1998) membagi semua simpul di graf ke dalam sejumlah kelas partisi dan menentukan jarak antara setiap kelas partisi tersebut.

Misalkan $G(V, E)$ graf terhubung untuk himpunan bagian S dari $V(G)$ dan sebuah simpul $v \in V(G)$, jarak antara v dan S didefiniskan sebagai $d(v, S) = \min\{d(v, x) \mid x \in S\}$ dengan $d(v, x)$ adalah jarak dari simpul v ke x. Misalkan $V(G)$ dipartisi menjadi k himpunan $S_1, S_2, \ldots, S_k$ yang saling lepas, untuk k-partisi terurut $\Pi = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ dari $V(G)$ dan sebuah simpul $v \in V(G)$, representasi dari v terhadap Π didefinisikan sebagai $r(v \mid \Pi) = d(v, S_1), d(v, S_2), \ldots, d(v, S_k))$. Selanjutnya, Π partisi pembeda (partisi penyelesaian) dari $V(G)$ jika $r(u \mid \Pi) \neq r(v \mid \Pi)$ untuk setiap dua simpul berbeda $u, v \in V(G)$. Nilai k terkecil (kardinalitas minimum) sedemikian sehingga graf G memiliki partisi pembeda dengan k kelas partisi adalah dimensi partisi dari graf G. Dimensi partisi graf G dinotasikan dengan $pd(G)$ (Chartrand dkk., 2000).

Berikut ini diberikan graf G dan akan ditentukan dimensi partisinya.



Gambar 2.4 Dimensi partisi pada graf G

Graf G dipartisi, sehingga diperoleh $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, dengan $S_1 = \{v_1, v_4, v_5, v_7, v_9, v_{11}, v_{12}\}$, $S_2 = \{v_3, v_6, v_8, v_{10}, v_{13}, v_{14}\}$ dan $S_3 = \{v_2\}$.

Selanjutnya perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} r(v_1 \mid \Pi) &= (0,1,1) & r(v_2 \mid \Pi) &= (1,2,0) \\ r(v_3 \mid \Pi) &= (1,0,2) & r(v_4 \mid \Pi) &= (0,2,2) \\ r(v_5 \mid \Pi) &= (0,1,2) & r(v_6 \mid \Pi) &= (1,0,3) \\ r(v_7 \mid \Pi) &= (1,0,4) & r(v_8 \mid \Pi) &= (2,0,4) \\ r(v_9 \mid \Pi) &= (0,1,4) & r(v_{10} \mid \Pi) &= (1,0,5) \\ r(v_{11} \mid \Pi) &= (0,1,5) & r(v_{12} \mid \Pi) &= (0,1,6) \\ r(v_{13} \mid \Pi) &= (1,0,6) & r(v_{14} \mid \Pi) &= (0,1,7) \end{aligned}$$

Karena representasi dari setiap simpul berbeda, maka Π adalah partisi pembeda dari graf G dan $pd(G) \leq 3$.

Untuk menunjukan $pd(G) \geq 3$, andaikan terdapat partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2\}$ dari G. Perhatikan simpul v_6, v_6 memiliki 3 simpul yaitu, v_5, v_7, v_8 dengan $S_1 = \{v_5, v_7\}$, $S_2 = \{v_6, v_8\}$ sehingga representasi setiap simpul terhadap Π sebagai berikut:

$$\begin{aligned} r(v_5 \mid \Pi) &= (0,1) & r(v_7 \mid \Pi) &= (0,1) \\ r(v_6 \mid \Pi) &= (1,0) & r(v_8 \mid \Pi) &= (2,0) \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa terdapat simpul yang memiliki representasi yang sama, yaitu $r(v_5 \mid \Pi) = r(v_7 \mid \Pi)$. Akibatnya representasi kedua simpul itu akan sama, karena memiliki jarak yang sama terhadap simpul-simpul lainnya pada graf G, maka hal ini kontradiksi. Jadi $pd(G) \geq 3$. Akibatnya, $pd(G) = 3$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2024/2025 bertempat di Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Langkah-Langkah Penelitian

Dalam Penelitian ini, langkah-langkah yang dilakukan untuk menetukan dimensi partisi pada graf barisan segitiga $TS(n)$ adalah sebagai berikut:

1. Menentukan batas atas dimensi partisi graf barisan segitiga $TS(n)$.

   a. Mengonstruksi graf barisan segitiga $TS(n)$, untuk $2 \leq n \leq 19$.

   b. Menentukan batas atas dari $pd(TS(n))$, untuk $2 \leq n \leq 19$. Batas atas dari $pd(TS(n))$ diperoleh dengan mengonstruksi graf barisan segitiga $TS(n)$, untuk $2 \leq n \leq 19$. Setiap simpul pada graf barisan segitiga $TS(n)$ dikelompokkan dalam kelas partisi pembeda, jumlah partisi yang paling sedikit adalah dimensi partisi dari graf barisan segitiga $TS(n)$.

   c. Menarik simpulan.

2. Menentukan batas atas dimensi partisi graf barbel barisan segitiga $B_{TS(n)}$.

   a. Mengonstruksi graf barisan segitiga $B_{TS(n)}$, untuk $2 \leq n \leq 19$.

   b. Menentukan batas atas dari $pd(B_{TS(n)})$, untuk $2 \leq n \leq 19$. Batas atas dari $pd(B_{TS(n)})$ diperoleh dengan mengonstruksi graf barisan segitiga $B_{TS(n)}$, untuk $2 \leq n \leq 19$. Setiap simpul pada graf barisan segitiga $B_{TS(n)}$ dikelompokkan dalam kelas partisi pembeda, jumlah partisi yang paling sedikit adalah dimensi partisi dari graf barisan segitiga $B_{TS(n)}$.

c. Menarik simpulan.

BAB V

SIMPULAN DAN SARAN

5.1 Simpulan

Pada penelitian ini telah berhasil ditentukan batas atas dimensi partisi dari graf barisan segitiga $TS(n)$ dan graf barbel barisan segitiga $B_{TS(n)}$ sebagai berikut:

$$pd(TS(n)) \leq \begin{cases} 4, & \text{untuk } 2 \leq n \leq 9 \\ 5, & \text{untuk } 10 \leq n \leq 12 \\ 6, & \text{untuk } 13 \leq n \leq 15 \\ 7, & \text{untuk } 16 \leq n \leq 18 \\ 8, & \text{untuk } n = 19 \end{cases}$$

dan,

$$pd(B_{TS(n)}) \leq \begin{cases} 4, & \text{untuk } 2 \leq n \leq 6 \\ 5, & \text{untuk } 7 \leq n \leq 10 \\ 6, & \text{untuk } 11 \leq n \leq 13 \\ 7, & \text{untuk } 14 \leq n \leq 16 \\ 8, & \text{untuk } 17 \leq n \leq 19 \end{cases}$$

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan untuk menentukan batas atas dimensi partisi graf barisan segitiga $TS(n)$ untuk n lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Asmiati, A. (2016). Dimensi Partisi n Graf Amalgamasi Bintang yang Dihubungkan Suatu Lintasan. *Jurnal Matematika*. **19**(3): 93-95.

Asmiati, A. (2012). Partition Dimension of Amalgamasi of Stars. *Bulletin of Mathematics*. **4**(2): 161-167.

Chartrand, G., Salehi, E., & Zhang (1998). On the Partition Dimension of a Graph. *Congress Number*. **130**: 157-168.

Chartrand, G., Salehi, E., & Zhang (2000). The Partition Dimension of a Graph. *Aequationes Math*. **59**(1): 45-54.

Daming, A. S., Hasmawati, H., Haryanto, L., & Nurwahyu, B. (2020). Dimensi Partisi Graf Hasil Amalgamasi Siklus. *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi.* **16**(2): 199-207.

Deo, N. (1989). *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. Prentice Hall of India Prive Limited, New Delhi.

Hafidh, Y., & Barkoro, E.T. (2024). Partition dimension of trees - palm approach. *Electron. J. Graph Theory Appl* **12**(2), 265-272.

Hasmawati. (2023). *Pengantar Teori dan Jenis-Jenis Graf*. Unhas Press, Makassar.

Munir, R. (2010). *Matematika Disktrit*. Informatika Bandung, Bandung.

Nabila, A. D., Hasmawati, & Nur, M. (2023). Dimensi Partisi Hasil Amalgamasi Sisi pada Graf Siklus. *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputer*, **20**(1): 65-74.

Ramdhani, V., & Rahmi, F. (2021). The Partition Dimension of a Path Graph. *Sainstek: Jurnal Sains dan Teknologi*. **13**(2): 66-72.

Sanjaya, I., Narwen, N., & Rudianto, B. (2019). Dimensi partisi dari Graf Kubik *pd*($C_{n,2n,n}$).*Jurnal Matematika UNAND*.**7**$(3) : 90 - 93$.