BATAS ATAS BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF HELM DAN BARBELNYA

(Skripsi)

Oleh

DINI HANIFAH
NPM. 2117031033

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

ABSTRACT

THE UPPER BOUND OF LOCATING CHROMATIC NUMBER OF HELM GRAPHS AND ITS BARBELL

By

Dini Hanifah

The locating chromatic number of a graph G, denoted by $\chi_L(G)$, is the smallest integer k such that G has a locating k-coloring. This paper discussed the upper bound of the locating chromatic number for the helm graph H_n and its barbell $B(H_n)$. We obtained, $\chi_L(H_n) \leq 4$ for $3 \leq n \leq 9$ and $n \neq 8$; $\chi_L(H_n) \leq 5$ for $8 \leq n \leq 28$ and $n \neq 9$; $\chi_L(H_n) \leq 6$ for $29 \leq n \leq 76$. Furthermore, for the barbell helm graph $B(H_n)$, $\chi_L(B(H_n)) \leq 4$ for $n = 4, 6$; $\chi_L(B(H_n)) \leq 5$ for $3 \leq n \leq 18$ and $n \neq 4, 6, 15, 17$; $\chi_L(B(H_n)) \leq 6$ for $15 \leq n \leq 57$ and $n \neq 16, 18, 56$; $\chi_L(B(H_n)) \leq 7$ for $56 \leq n \leq 76$ and $n \neq 57$.

Keywords: : locating chromatic number, helm graph, barbell helm graph.

ABSTRAK

BATAS ATAS BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF HELM DAN BARBELNYA

Oleh

Dini Hanifah

Bilangan kromatik lokasi dari graf G, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$, adalah bilangan bulat terkecil k sedemikian sehingga G memiliki pewarnaan-k lokasi. Pada penelitian ini dibahas mengenai batas atas bilangan kromatik lokasi graf helm H_n dan barbelnya $B(H_n)$, untuk $n \geq 3$. Hasil yang diperoleh: $\chi_L(H_n) \leq 4$ untuk $3 \leq n \leq 9$ dan $n \neq 8$; $\chi_L(H_n) \leq 5$ untuk $8 \leq n \leq 28$ dan $n \neq 9$; $\chi_L(H_n) \leq 6$ untuk $29 \leq n \leq 76$. Selanjutnya, pada graf barbel helm, $\chi_L(B(H_n)) \leq 4$ untuk $n = 4, 6$; $\chi_L(B(H_n)) \leq 5$ untuk $3 \leq n \leq 18$ dan $n \neq 4, 6, 15, 17$; $\chi_L(B(H_n)) \leq 6$ untuk $15 \leq n \leq 57$ dan $n \neq 16, 18, 56$; $\chi_L(B(H_n)) \leq 7$ untuk $56 \leq n \leq 76$ dan $n \neq 57$.

Kata-kata kunci: bilangan kromatik lokasi graf, graf helm, graf barbel helm.

BATAS ATAS BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF HELM DAN BARBELNYA

DINI HANIFAH

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

Judul Skripsi : **BATAS ATAS BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF HELM DAN BARBELNYA**

Nama Mahasiswa : *Dini Hanifah*

Nomor Pokok Mahasiswa : **2117031033**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.	**Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si.**
NIP. 197604112000122001	NIP. 199311062019032018

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr.Aang Nuryaman, S.Si.,M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	:	**Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.**	....
Sekretaris	:	**Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **09 Mei 2025**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Dini Hanifah**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2117031033**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Batas Atas Bilangan Kromatik Lokasi Graf Helm dan Barbelnya**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi inni merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai degnan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 09 Mei 2025
Penulis,

Dini Hanifah

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Dini Hanifah yang lahir di Lampung Timur pada tanggal 5 Mei 2003. Penulis merupakan anak kedua dari dua bersaudara yang terlahir dari pasangan Bapak Muhroji dan Ibu Juariyati.

Penulis memulai pendidikan kanak-kanak di TK Miftahul Ulum pada tahun 2007-2009. Melanjutkan pendidikan dasar di SD Negeri 2 Taman Fajar pada tahun 2009-2015, pendidikan menengah pertama di SMP Negeri 1 Purbolinggo pada tahun 2015-2018, dan pendidikan menengah atas di SMA Negeri 1 Purbolinggo pada tahun 2018-2021.

Pada tahun 2021, penulis melanjutkan pendidikan tinggi di program Studi S-1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung yang diterima melalui jalur SNMPTN. Selama masa perkuliahan penulis fokus pada pengembangan akademik. Selain itu, penulis juga aktif dalam berbagai kegiatan yang mendukung pengembangan diri, seperti pada tahun 2024 penulis mengikuti program MBKM di *RevoU Tech Academy* dengan fokus pada *Data Analystic* dan *Software Engineering*.

Pada tahun 2024 penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Badan Pendapatan Daerah (BAPENDA) Provinsi Lampung sebagai bentuk penerapan ilmu yang telah penulis dapatkan selama kuliah, kemudian sebagai bentuk Tri Dharma Perguruan Tinggi, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Pasir Sakti, Kecamatan Pasir Sakti, Kabupaten Lampung Timur.

KATA INSPIRASI

”Sesungguhnya beserta kesulitan itu ada kemudahan”
(Q.S. Al-Insyrah: 6)

”Dan barang siapa bertakwa kepada Allah
niscaya Dia akan memberikan jalan keluar baginya
dan memberinya rezeki dari arah yang tidak disangka-sangka”
(QS. At-Talaq: 2-3)

”Life is like riding a bicycle.
To keep your balance you must keep moving”
(Albert Einstein)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap Alhamdulillah dan syukur kepada Allah SWT atas nikmat serta hidayah-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan Bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Bapak dan Ibuku Tercinta

Terimakasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini, yamg selalu menjadi penyemangat dan sandaran terkuatku. Terimakasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta
Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Batas Atas Bilangan Kromatik Lokasi Graf Helm dan barbelnya" dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing 1 yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

2. Ibu Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

3. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.

4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

5. Bapak Ir. Warsono, M.S., Ph.D. selaku dosen pembimbing akademik.

6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Kedua orang tua penulis, Ibu Juariyati dan Bapak Muhroji. Terimakasih untuk segala doa, usaha, dan dukungan yang selalu mengiringi setiap langkah. Terimakasih telah menjadi sumber penyemangat dan sandaran terbesar dalam hidup penulis sehingga penulis dapat terus bertahan dan berjuang.
8. Saudaraku, Mas Anas Madani. Terimaksih telah selalu ada dalam setiap langkah penulis, selalu memberikan dukungan dalam hal apapun.
9. Teman-teman seperbimbingan skripsi yang selalu membersamai, membantu, mendukung, dan saling memberikan semangat dalam penyelesaian skripsi ini.
10. Semua pihak yang membantu penyelesaian skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 09 Mei 2025

Dini Hanifah

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Konsep teori graf pada awalnya digunakan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 untuk menyelesaikan permasalahan jembatan Konigsberg (Deo, 2016). Konsep teori graf terus berkembang seiring berjalannya waktu. Kini teori graf banyak diaplikasikan pada berbagai permasalahan. Salah satu perkembangan dari konsep teori graf yaitu pewarnaan graf.

Konsep pewarnaan graf muncul dalam menyelesaikan permasalahan pewarnaan pada peta. Pada tahun 1831-1899 Francis Guthrie mendapat konjektur empat warna (*The Four Color Conjecture*) yang menyatakan semua negara di peta dapat diwarnai dengan menggunakan maksimal empat warna sedemikian sehingga dua negara yang berbatasan memiliki warna yang berbeda. Keinginan yang kuat untuk menyelesaikan permasalahan empat warna (*four color problem*) tersebut menginspirasi munculnya konsep pewarnaan daerah, titik, dan sisi. Konsep inilah yang digunakan untuk mewarnai graf secara umum (Asmiati, 2023).

Bilangan kromatik lokasi merupakan salah satu perkembangan dari konsep teori graf mengenai pewarnaan graf. Konsep bilangan kromatik lokasi pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dkk., pada tahun 2002. Bilangan kromatik lokasi ditentukan berdasarkan penentuan minimal warna yang dibutuhkan dalam pewarnaan lokasi sehingga setiap titik pada suatu graf memiliki kode warna yang berbeda. Bilangan kromatik lokasi suatu graf G dinotasikan dengan $\chi_L(G)$ (Chartrand dkk., 2002).

Sampai saat ini telah banyak dilakukan penelitian mengenai bilangan kromatik lokasi. Asmiati dkk. (2021) mengkaji mengenai bilangan kromatik lokasi pada graf barbel bayangan lintasan. Pada tahun 2022, Irawan dkk mengkaji mengenai prosedur untuk menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf origami, bilangan kromatik lokasi dari graf split siklus dibahas oleh Prawinasti dkk. (2020), bilangan kromatik lokasi graf origami oleh Irawan dkk. (2021), bilangan kromatik lokasi graf split lintasan oleh Rahmatalia dkk. (2022), bilangan kromatik lokasi untuk beberapa amalgamasi graf lengkap oleh Yulianti dkk. (2024).

Penelitian mengenai penentuan bilangan kromatik lokasi masih terus dilakukan hingga saat ini, begitu pula untuk graf helm. Lessya dkk. (2023) membahas mengenai penentuan bilangan kromatik lokasi graf helm namun hanya sebatas graf helm H_n untuk $3 \leq n \leq 9$, belum ada pembahasan untuk n yang lain dan mengenai barbel dari graf helm tersebut, oleh karena itu penulis tertarik untuk melakukan penelitian mengenai penentuan batas atas bilangan kromatik lokasi untuk graf helm $H_n, n \geq 3$ dan juga barbelnya secara lebih lanjut. Dalam penelitian ini, nilai n dibatasi hingga $n = 76$ dikarenakan semakin besarnya nilai n maka jumlah simpul dan sisi pada graf juga semakin bertambah, yang berdampak pada pola pewarnaan yang cenderung berubah dan menjadi semakin kompleks untuk dianalisis. Pembatasan ini dilakukan agar penelitian tetap fokus dan hasil yang diperoleh tetap dapat dianalisis dengan jelas.

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi pada graf helm H_n dan graf barbel helm B_{Hn}, untuk $3 \leq n \leq 76$.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini diharapkan dapat:

1. Menambah pengetahuan dan pemahaman pembaca mengenai bilangan kromatik lokasi pada suatu graf, khususnya pada graf helm $H_n, 3 \leq n \leq 76$ dan barbelnya.

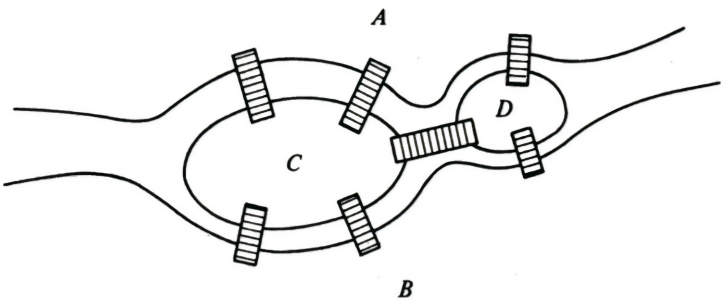
2. Sebagai sumber referensi bagi penelitian selanjutnya mengenai penentuan bilangan kromatik pada graf yang lain.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

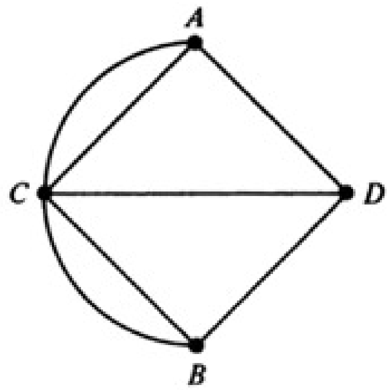
2.1 Konsep Dasar Graf dan Kelas-Kelas Graf

Graf merupakan suatu model matematika yang digunakan untuk merepresentasikan suatu permasalahan dalam bentuk objek. Dua bagian penting pada graf yaitu simpul dan sisi merepresentasikan berbagai macam objek dan hubungan antar objek yang dapat diaplikasikan ke dalam berbagai masalah seperti penentuan masalah jalur terpendek, pewarnaan pada peta, dan masih banyak lagi. Konsep teori graf pada bab ini diambil dari Deo (2016), awal mula ditemukannya konsep teori graf sendiri digunakan untuk menyelesaikan permasalahan jembatan Konigsberg yang berada di Eropa oleh Leonhard Euler pada tahun 1736. Permasalahan jembatan Konigsberg yaitu menemukan jalan dari salah satu wilayah daratan kota A, B, C, D melewati tujuh jembatan tepat satu kali, dan kembali ke titik awal.



Gambar 2.1 Permasalahan Jembatan Konigsberg

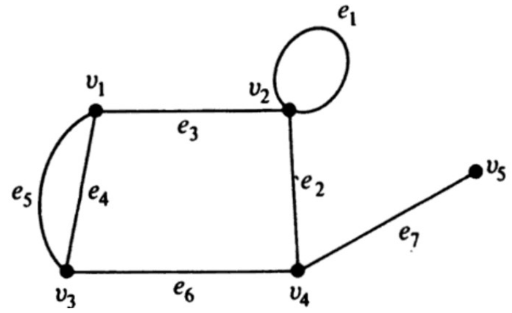
Berikut diberikan representasi dari permasalahan Euler.



Gambar 2.2 Representasi permasalahan jembatan Konigsberg

Euler merepresentasikan permasalahan tersebut dengan sebuah graf seperti pada Gambar 2.2. Simpul-simpul merepresentasikan wilayah daratan dan sisi-sisinya merepresentasikan jembatan. Euler membuktikan bahwa solusi untuk permasalahan tersebut tidak ada.

Graf $G(V, E)$ didefinisikan sebagai himpunan terurut $(V(G), E(G))$, dengan $V(G)$ merupakan himpunan tak kosong yang menyatakan himpunan simpul (*vertex*) dari G dan $E(G)$ menyatakan himpunan sisi (*edge*) yang diidentifikasikan sebagai sebuah pasangan simpul (v_i, v_j) yang tak terurut. Simpul-simpul v_i, v_j yang terhubung dengan sisi e_k disebut simpul-simpul ujung dari e_k. Berikut ini diberikan contoh gambar graf dengan 5 simpul dan 7 sisi.



Gambar 2.3 Contoh graf dengan 5 simpul dan 7 sisi

Sisi yang memiliki simpul awal dan akhir yang sama disebut sebagai gelung (*loop*) seperti sisi e_1 yang ditunjukkan pada Gambar 2.3. Sepasang simpul pada graf dapat memiliki lebih dari satu sisi yang berhubungan seperti yang tertera pada Gambar 2.3 yaitu pada sisi e_4 dan sisi e_5, yang disebut sebagai sisi-sisi paralel. Suatu graf yang tidak memiliki *loop* dan sisi-sisi paralel disebut graf sederhana. Pada sebuah graf, bentuk garis lurus atau melengkung dan panjang atau tidaknya suatu sisi tidaklah penting, yang penting adalah keterkaitan (*incidence*) antara sisi dan simpul.

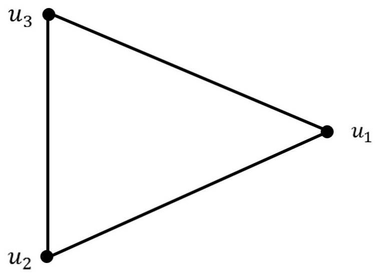
Pada Gambar 2.3, terdapat dua simpul v_1 dan v_2 yang dihubungkan dengan sisi e_3, maka v_1 dan v_2 dikatakan saling bertetangga (*adjacent*), dan simpul v_1 dan v_2 menempel (*incident*) dengan sisi e_3. Himpunan tetangga (*neigborhood*) dari suatu simpul v_i, dinotasikan dengan $N(v_i)$ adalah himpunan simpul-simpul yang bertetangga dengan v_i pada Gambar 2.3 simpul v_1 memiliki himpunan tetangga $N(v_1) = \{v_2, v_3\}$. Orde (*order*) dari graf adalah banyaknya simpul dalam graf, sedangkan ukuran (*size*) dari graf adalah banyaknya sisi dalam graf, graf pada Gambar 2.3. memiliki orde 5, dan ukuran 7.

Derajat (*degree*) dari suatu simpul pada graf adalah banyaknya sisi yang menempel pada simpul tersebut dan dinotasikan dengan $d(v_i)$, contohnya pada simpul v_3 memiliki derajat 3 atau dapat ditulis $d(v_3) = 3$. Simpul dengan derajat 1 disebut daun (*pendant vertex*) seperti simpul v_5 yang ditunjukkan pada Gambar 2.3. Suatu graf dikatakan graf teratur jika semua simpul memiliki derajat yang sama. Jarak dari dua simpul pada graf adalah minimum banyaknya sisi yang menghubungkan dua buah simpul tersebut, jarak dari simpul v_1 dan v_4 pada Gambar 2.3 adalah 2 dan dinotasikan dengan $d(v_1, v_4) = 2$.

Beberapa istilah yang sering muncul pada graf G yaitu jalan (*walk*), lintasan (*path*), jalan tapak (*trail*) dan sirkuit (*circuit*). Jalan (*walk*) dalam graf adalah barisan simpul-simpul sedemikian sehingga simpul-simpul yang berurutan dalam barisan adalah bertetangga (*adjacent*). Jika $v_1 = v_i$, maka W adalah jalan tertutup dan jika $v_1 \neq v_i$ maka W adalah jalan terbuka. Banyaknya sisi yang muncul dalam satu *walk* disebut panjang *walk*. Barisan $v_1 - e_3 - v_2 - e_2 - v_4 - e_6 - v_3$ pada Gambar 2.3 merupakan jalan terbuka dengan panjang 3. Lintasan (*path*) $v_1 - v_i$ dalam graf G adalah *walk* yang semua simpulnya (kecuali *walk* tertutup) berlainan. Jalan tapak (*trail*) adalah *walk* yang semua sisinya berlainan. Jadi dapat dikatakan setiap *path* pasti *trail* tetapi setiap *trail* belum tentu *path*.

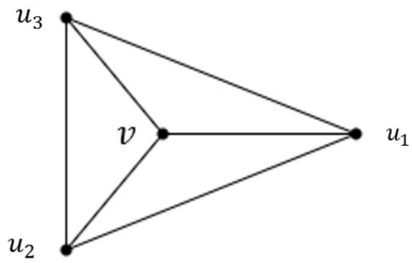
Sirkuit adalah lintasan tertutup yang simpulnya tidak muncul lebih dari satu kali, kecuali simpul awal dan simpul akhir. Suatu sirkuit juga biasa disebut siklus. Siklus dengan panjang ganjil disebut siklus ganjil, sedangkan siklus dengan panjang genap disebut siklus genap. Sebagai contoh, barisan $v_1 - e_3 - v_2 - e_2 - v_4 - e_6 - v_3 - e_4 - v_1$ pada Gambar 2.3 merupakan suatu lintasan, jalan tapak, sekaligus siklus genap

(Marsudi, 2016). Suatu graf G dikatakan terhubung jika terdapat lintasan yang menghubungkan setiap dua simpul yang berbeda. Salah satu bentuk graf terhubung adalah graf siklus. Graf ini terdiri dari sebuah siklus dan dinotasikan dengan C_n, dengan $n \geq 3$ (Harary, 1969). Berikut ini merupakan contoh dari graf siklus C_3.



Gambar 2.4 Graf siklus C_3

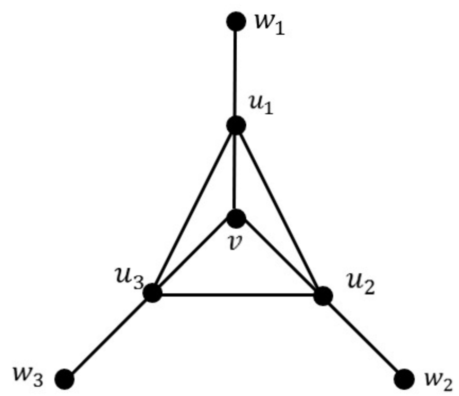
Perkembangan dari graf siklus C_n dengan menambahkan satu simpul yang biasa disebut simpul pusat sedemikian sehingga setiap simpul pada graf siklus C_n terhubung langsung dengan simpul pusat tersebut disebut sebagai graf roda yang dinotasikan dengan $W_n, n \geq 3$. Graf roda W_n memiliki sebanyak $n + 1$ simpul dan sebanyak $2n$ sisi (Frucht, 1979). Berikut ini merupakan contoh dari graf roda W_3.



Gambar 2.5 Graf roda W_3

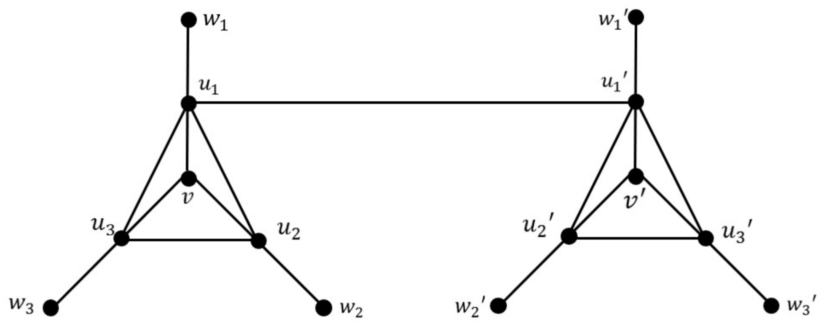
Menurut Ayel dan Favaron (1984) dikutip dari Stanley dan Jesintha (2012) graf helm H_n merupakan suatu graf yang terbentuk dari suatu graf roda W_n dengan menghubungkan sebuah simpul pendan pada setiap simpul siklusnya. Graf helm memiliki $2n + 1$ simpul dan $3n$ sisi. Diberikan notasi himpunan simpul dan himpunan sisi dari graf helm H_n. Misalkan himpunan simpul dari H_n adalah $V(H_n) = \{v, u_i, w_i | 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(H_n) = \{vu_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i u_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_1 u_n\} \cup \{u_i w_i | 1 \leq i \leq n\}$.

Berikut ini diberikan contoh dari graf helm H_3.



Gambar 2.6 Graf helm H_3

Wilf (1989) mendefinisikan bahwa graf barbel G merupakan graf yang terdiri dari graf G dan salinan dari graf G yang dihubungkan oleh sebuah jembatan, sehingga graf barbel helm merupakan graf yang terbentuk dari gabungan graf helm H_n dan salinan graf helm $(H_n{}')$ yang dihubungkan oleh sebuah sisi sebagai jembatan. Misalkan $V(H_n{}') = \{v', u_i{}', w_i{}' | 1 \leq i \leq n\}$, maka sisi $u_1 u_1{}'$ merupakan jembatan yang menghubungkan H_n dan $H_n{}'$ sehingga terbentuk graf barbel helm yang dinotasikan dengan B_{H_n}. Berikut ini diberikan contoh graf barbel helm B_{H_3}.



Gambar 2.7 Graf barbel helm B_{H_3}

2.2 Bilangan Kromatik Lokasi Graf

Konsep bilangan kromatik lokasi pertama kali muncul diperkenalkan oleh Chartrand dkk pada tahun 2002 yang merupakan perkembangan dari konsep dimensi partisi dan pewarnaan graf. Diambil dari Chartrand dkk. (2002) misalkan c adalah pewarnaan lokasi sejati dari graf terhubung G, menggunakan $1, 2, \ldots, k$ warna dengan k bilangan bulat positif dan $c(u) \neq c(v)$ untuk u, v yang saling bertetangga di G. Notasi $c(u)$ adalah warna dari simpul u. Partisi $\Pi = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ merupakan himpunan kelas-kelas warna C_i, $1 \leq i \leq k$ dari $V(G)$ yang menginduksi pewarnaan titik pada c. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari simpul v di G didefinisikan dengan:

$$c_\Pi(v) = (d(v, C_1), d(v, C_2), \ldots, d(v, C_k))$$

dengan $d(v, C_i) = \min\{d(v, u) \mid u \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap simpul di G memiliki kode warna berbeda, maka c pewarnaan lokasi dari graf G. Bilangan kromatik lokasi dari G yang dinotasikan dengan $\chi_L(G)$ adalah bilangan k terkecil sehingga G mempunyai k pewarnaan lokasi.

Berikut ini teorema dasar yang telah dibuktikan Chartrand dkk., pada tahun 2002 mengenai bilangan kromatik lokasi graf.

Teorema 2.3.1 (Chartrand dkk., 2002) Misalkan c merupakan pewarnaan lokasi pada graf terhubung G. Jika u dan v adalah dua simpul berbeda di G sedemikian sehingga $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) \setminus \{u, v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Secara khusus, jika u dan v bukan simpul yang saling bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.

Bukti. Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G dan misalkan $\Pi = (C_1, C_2, \ldots, C_k)$ merupakan partisi dari setiap simpul di G ke dalam kelas warna C_i. Untuk suatu simpul u dan v yang berbeda di G, andaikan $c(u) = c(v)$, sedemikian sehingga simpul u dan v berada dalam kelas warna yang sama, dan misalkan simpul u dan v berada dalam kelas warna C_i dari Π. Akibatnya $d(u, C_i) = d(v, C_i) = 0$. Karena $d(u, v) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) \setminus \{u, v\}$, maka $d(u, C_j) = d(v, C_j)$ untuk setiap $j \neq i$, $1 \leq j \leq k$. Akibatnya $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ sehingga c bukan pewarnaan lokasi di G. Jadi, haruslah $c(u) \neq c(v)$. ■

Akibat 2.3.1 Jika G adalah graf terhubung dengan suatu simpul yang bertetangga dengan k daun, maka $\chi_L(G) \geq k + 1$.

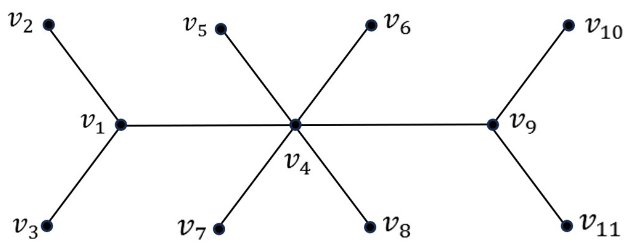
Bukti. Misalkan v adalah sebuah simpul yang bertetangga dengan k daun di G. Berdasarkan Teorema 2.3.1, setiap pewarnaan lokasi c dari G memberikan warna yang berbeda pada setiap simpul k. Karena v bertetangga dengan setiap simpul, maka setiap simpul k dan v harus mempunyai warna yang berbeda. Jadi diperoleh $\chi_L(G) \geq k + 1$. ■

Penelitian mengenai bilangan kromatik lokasi pada suatu graf masih terus dilakukan. Pada tahun 2012 Behtoei melakukan penelitian mengenai bilangan kromatik lokasi pada graf roda dan didapatkan teorema mengenai bilangan kromatik lokasi graf roda sebagai berikut:

Teorema 2.3.2 (Behtoei, 2012) Untuk $n \geq 3$, misalkan $W_n = K_1 + C_n$ dan $m = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid n \leq \frac{1}{2}(k^3 - k^2)\right\}$, maka

$$\chi_L(W_n) = \begin{cases} 1 + \chi_L(C_n), & \text{untuk } 3 \leq n < 9, \\ m + 1, & \text{untuk } n \neq \frac{1}{2}(m^3 - m^2) - 1, \\ m + 2, & \text{untuk } n = \frac{1}{2}(m^3 - m^2) - 1. \end{cases}$$

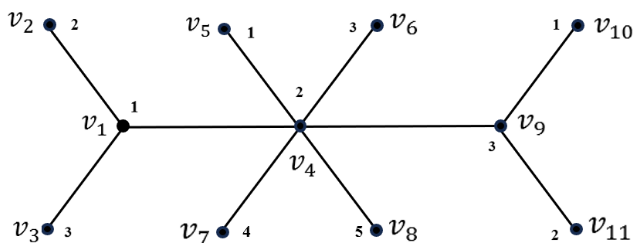
Berikut ini diberikan graf terhubung G dan ditentukan bilangan kromatik dari graf G tersebut.



Gambar 2.8 Graf terhubung G

Barikut ini ditentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi dari graf G terlebih dahulu. Karena terdapat simpul v_4 yang bertetangga dengan 4 daun, maka berdasarkan Akibat 2.3.1, $\chi_L(G) \geq 5$.

Selanjutnya diberikan pewarnaan dengan 5 warna pada setiap simpul untuk menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf G.



Gambar 2.9 Contoh pewarnaan lokasi minimum pada graf G

Misalkan c merupakan pewarnaan dengan 5 warna pada graf G menggunakan kelas-kelas warna $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$, dengan $C_1 = \{v_1, v_5, v_{10}\}$, $C_2 = \{v_2, v_4, v_{11}\}$, $C_3 = \{v_3, v_6, v_9\}$, $C_4 = \{v_7\}$, $C_5 = \{v_8\}$. Maka diperoleh kode warna setiap simpul di G terhadap Π sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
c_\Pi(v_1|\Pi) &= (0,1,1,2,2) & c_\Pi(v_7|\Pi) &= (2,1,2,0,2)\\
c_\Pi(v_2|\Pi) &= (1,0,2,3,3) & c_\Pi(v_8|\Pi) &= (2,1,2,2,0)\\
c_\Pi(v_3|\Pi) &= (1,2,0,3,3) & c_\Pi(v_9|\Pi) &= (1,1,0,2,2)\\
c_\Pi(v_4|\Pi) &= (1,0,1,1,1) & c_\Pi(v_{10}|\Pi) &= (0,2,1,3,3)\\
c_\Pi(v_5|\Pi) &= (0,1,2,2,2) & c_\Pi(v_{11}|\Pi) &= (2,0,1,3,3)\\
c_\Pi(v_6|\Pi) &= (2,1,0,2,2) & &
\end{aligned}
$$

Karena setiap simpul di G memiliki kode warna berbeda, maka c merupakan pewarnaan lokasi. Akibatnya, $\chi_L(G) \leq 5$. Jadi diperoleh, $\chi_L(G) = 5$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2024/2025 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan untuk menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi pada graf helm H_n pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf helm H_n
   a. Mengontruksi graf helm $H_n, 3 \leq n \leq 76$.
   b. Menentukan batas atas dari bilangan kromatik lokasi graf helm H_n untuk $3 \leq n \leq 76$ dengan mengontruksi pewarnaan pada graf helm sedemikian sehingga memenuhi persyaratan pewarnaan lokasi dengan memperhatikan setiap struktur dari graf tersebut. Saat dilakukan pewarnaan simpul, mulai pewarnaan dari simpul pada graf siklus, kemudian pada simpul pusat yang terakhir simpul daun dengan memberi label dari warna terkecil sehingga didapatkan pewarnaan minimum pada graf dan memenuhi persyaratan pewarnaan lokasi.
   c. Merumuskan hasil yang diperoleh dalam suatu pernyataan matematika.
   d. Membuktikan hasil yang diperoleh dari Langkah c.
   e. Menarik Kesimpulan.
2. Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf barbel helm B_{H_n}

a. Mengontruksi graf barbel helm $B_{H_n}, 3 \leq n \leq 76$.

b. Menentukan batas atas dari bilangan kromatik lokasi graf barbel helm B_{H_n} untuk $3 \leq n \leq 76$ dengan mengonstruksi pewarnaan pada graf barbel helm sedemikian sehingga memenuhi persyaratan pewarnaan lokasi dengan memperhatikan setiap struktur dari graf tersebut. Saat dilakukan pewarnaan simpul, mulai pewarnaan dari simpul pada graf siklus kemudian dilanjutkan simpul pusat lalu pada simpul daun dengan memberi label dari warna terkecil sehingga didapatkan pewarnaan minimum pada graf dan memenuhi persyaratan pewarnaan lokasi.

c. Merumuskan hasil yang diperoleh dalam suatu pernyataan matematika.

d. Membuktikan hasil yang diperoleh dari Langkah c.

e. Menarik Kesimpulan.

BAB V

SIMPULAN DAN SARAN

5.1 Simpulan

Pada penelitian ini diperoleh batas atas bilangan kromatik lokasi dari graf helm $\chi_L(H_n)$, adalah 4 untuk $3 \leq n \leq 9$ dan $n \neq 8$, 5 untuk $8 \leq n \leq 28, n \neq 9$, dan 6 untuk $29 \leq n \leq 76$. Batas atas bilangan kromatik lokasi dari graf barbel helm $\chi_L(B_{H_n})$ adalah 4 untuk $n = 4$ dan 6, 5 untuk $3 \leq n \leq 18, n \neq 4, 6, 15, 17$, 6 untuk $15 \leq n \leq 57, n \neq 16, 18, 56$, dan 7 untuk $56 \leq n \leq 76, n \neq 57$.

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan untuk n lainnya dan menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf helm.

DAFTAR PUSTAKA

Asmiati. (2023). *GRAF Aplikasinya pada Lintasan Terpendek Edisi 2*. Yogyakarta: MATEMATIKA.

Asmiati, Damayanti, M., Yulianti, L. (2021). On the locating chromatic number of barbell shadow path graphs. *Indonesian Journal of Combinatorics.*, **5**(2), 82 – 93.

Behtoei, A. (2012). The Locating Chromatic Number of the Join of Graphs. *ArXiv.*, 1-9.

Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M.A., Slater, P.J., Zhang, P. (2002). The Locating-Chromatic Number of a Graph. *Bull. Inst. Combin. Appl.*, **36,** 89-101.

Deo,N. (2016). *Graph Theory with applications to Engineering and Computer Science.*. New York: Courier Dover Publications.

Frucht, R. (1979). Graceful Numbering of Wheels and Related Graphs. *Annals of the New York Academy of Sciences.*, **319**(1), 219-229.

Harary, F. (1969), *Graph Theory*. Reading , MA: Addison Wesley.

Irawan, A., Utami B., H., S., Nuryaman A., Muludi, K. (2022). A Procedure for Determining The Locating Chromatic Number of An Origami Graphs *International Journal of Computer Science and Network Security.*, **14**(9), 31-34.

Irawan,A., Asmiati., Zakaria, L., Muludi, K. (2021). The Locating-Chromatic Number of Origami Graphs. *Algorithms.*, **14**, 1-15.

Prawinasti,K., Ansori, M., Asmiati., Notiragayu, AR, G.N.R. (2020). The Locating Chromatic Number for Split Graph of Cycle. *Journal of Physics: Conference Series.*, **1751**, 1-5.

Lessya, K.N., Welyyanti, D., Yulianti, L. (2023). Bilangan Kromatik Lokasi Graf Helm H_m dengan $3 \leq m \leq 9$. *Jurnal Matematika UNAND.*, **12**(3), 222 – 228.

Marsudi. (2016). *Teori Graf.*, Malang: UB Press.

Rahmatalia,S., Asmiati., Notiragayu. (2022). Bilangan Kromatik Lokasi Graf Split Lintasan. *Jurnal Matematika Integratif.*, **18**(1), 73-80.

Stanley, E.H., Jesintha, J.J. (2012). Butterfly Graphs with Shell Orders m and 2m+1 are Graceful. *Bonfring International Journal of Research in Communication Engineering.*, **2**(2), 1-5.

Wilf, H. S. (1989). The editor's corner: the white screen problem. *The American Mathematical Monthly*, **96**(8), 704-707.

Yulianti,A., Asmiati., Notiragayu. (2024). The locating-chromatic number for amalgamation of some complete graph. *InPrime.*, **6**(1), 76-88.