

**BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF POT BUNGA
DAN BARBELNYA**

(Skripsi)

Oleh

**ANGELINA AYU BETO
NPM. 2117031048**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025**

ABSTRACT

LOCATING CHROMATIC NUMBER OF FLOWERPOT GRAPHS AND ITS BARBEL

By

Angelina Ayu Beto

The locating chromatic number of a graph G is the smallest integer k such that G has a locating k -coloring. This research discussed the locating chromatic number of flowerpot graphs $(S_n C_m)$ and barbell flowerpot graphs $(B_{S_n C_m})$. The locating chromatic number of $S_n C_m$, $m \geq 3$ is 4 for $n = 3$ and n for $n \geq 4$. This result is also similar for $B_{S_n C_m}$.

Keywords: locating chromatic number, flowerpot graph, barbell flowerpot graph.

ABSTRAK

BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF POT BUNGA DAN BARBELNYA

Oleh

Angelina Ayu Beto

Bilangan kromatik lokasi dari graf G adalah bilangan bulat terkecil k sedemikian sehingga G memiliki pewarnaan- k lokasi. Penelitian ini membahas tentang bilangan kromatik lokasi graf pot bunga ($S_n C_m$) dan graf barbel pot bunga ($B_{S_n C_m}$). Bilangan kromatik lokasi $S_n C_m$, $m \geq 3$ adalah 4 untuk $n = 3$ dan n untuk $n \geq 4$. Hasil yang sama juga diperoleh untuk $B_{S_n C_m}$.

Kata-kata kunci: bilangan kromatik lokasi, graf pot bunga, graf barbel pot bunga.

**BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF POT BUNGA
DAN BARBELNYA**

ANGELINA AYU BETO

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2025

Judul Skripsi : **BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAFPOT
BUNGA DAN BARBELNYA**

Nama Mahasiswa : **Angelina Ayu Beto**

Nomor Pokok Mahasiswa : **2117031048**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing


Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.
NIP 197604112000122001


Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si.
NIP 199311062019032018

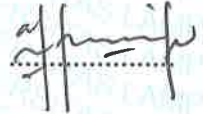
2. Ketua Jurusan Matematika


Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

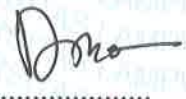
MENGESAHKAN

1. tim penguji

Ketua : **Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.**



Sekretaris : **Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si.**



Penguji

Bukan Pembimbing : **Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.**



2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.

NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **28 Mei 2025**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **Angelina Ayu Beto**
Nomor Pokok Mahasiswa : **2117031048**
Jurusan : **Matematika**
Judul Skripsi : **"Bilangan Kromatik Lokasi Graf Pot Bunga dan Barbelnya "**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung,
Penulis,



Angelina Ayu Beto

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Angelina Ayu Beto yang lahir di Desa Lewat, Kabupaten Flores Timur, Nusa Tenggara Timur pada tanggal 14 Juli 2001. Penulis merupakan anak pertama dari tiga bersaudara, putri dari pasangan Arnoldus Tupe Sengaji dan Yuliana Dai Doni.

Penulis memulai pendidikan formal di PADU Seli Samawa pada tahun 2007 dan menyelesaikannya pada tahun 2008. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan di SDK Leworere pada tahun 2008 sampai dengan 2014. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan di SMP Swasta Nyiur Melambai pada tahun 2014 sampai dengan tahun 2017, dan menyelesaikan pendidikan di SMA Negeri 1 Adonara Timur pada tahun 2020.

Pada tahun 2021, penulis diterima di program studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN). Pada akhir tahun 2023, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Lampung selama 40 hari sampai dengan Februari 2024. Selain itu, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat, penulis juga melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 40 hari di desa Karya Basuki, Kecamatan Waway Karya, Kabupaten Lampung Timur, sampai dengan Agustus 2024.

Selama masa studi, penulis menunjukkan ketekunan dan dedikasi dalam menyelesaikan berbagai tugas akademik. Penulis berharap hasil dari penelitian ini dapat memberikan manfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan, khususnya di bidang Teori Graf.

KATA INSPIRASI

"Tidak semua dari kita bisa melakukan hal-hal besar. Tetapi kita bisa melakukan hal-hal kecil dengan cinta yang besar"

- Bunda Teresa

"Not all of us can do great things. But we can do small things with great love.."

- Mother Teresa

PERSEMBAHAN

Dengan mengucapkan syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan Bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Ayah dan Ibuku Tercinta

Terimakasih kepada bapakku tercinta Arnoldus Tupe Sengaji dan mamaku tersayang Yuliana Dai Doni atas segala pengorbanan, motivasi, doa, dan dukungannya selama ini. Terimakasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Kakak dan Adik Tersayang

Terimakasih kepada kaka Rosalia, adik Olivia, dan adik Aril atas doa dan dukungan selama ini. Terimakasih telah menemani dan mengarahkan saya kepada hal-hal baik dalam perjuangan saya selama menempuh pendidikan.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada sahabat-sahabatku, Feli, Selin, Yone, Etha, Desi, Nadia, Naf-dha, Aqila, Echi, Riska, Citra, Nabila, Adel, dan teman-teman seperjuangan seperbimbingan Safina, Aini, Dini, Miranda, Nazila, Jonathan serta semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya yang senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Bilangan Kromatik Lokasi Graf Pot Bunga dan Barbelnya" dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Prof. Dr. Asmiati, S.Si.,M.Si. selaku Pembimbing 1 yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Dina Eka Nurvazly, S.Pd.,M.Si. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Ibu Dr. Notiragayu, S.Si.,M.Si. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si. selaku dosen pembimbing akademik.
6. Diri sendiri, atas segala usaha, ketekunan, dan perjuangan yang telah dilakukan untuk menyelesaikan skripsi ini tepat pada waktunya. Terima kasih telah bertahan di tengah tantangan dan terus maju meski dihadapkan pada berbagai rintangan.

7. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung,

Angelina Ayu Beto

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Tujuan Penelitian	2
1.3 Manfaat Penelitian	2
II TINJAUAN PUSTAKA	3
2.1 Konsep Dasar Graf	3
2.2 Graf Pot Bunga dan Barbelnya	6
2.3 Bilangan Kromatik Lokasi Graf	7
III METODE PENELITIAN	10
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian	10
3.2 Langkah-langkah Penelitian	10
IV HASIL DAN PEMBAHASAN	12
4.1 Bilangan Kromatik Lokasi Graf Pot Bunga	12
4.2 Bilangan Kromatik Lokasi Graf Barbel Pot Bunga	35
V KESIMPULAN DAN SARAN	59
5.1 Kesimpulan	59
5.2 Saran	59
DAFTAR PUSTAKA	60

DAFTAR GAMBAR

2.1	Contoh graf dengan 5 titik dan 7 sisi	3
2.2	Contoh jalan pada graf	4
2.3	Contoh lintasan pada graf	4
2.4	Graf bipartit lengkap	4
2.5	Graf bintang (S_5)	5
2.6	Graf siklus (C_4)	5
2.7	Graf pot bunga ($S_n C_m$)	6
2.8	Graf barbel pot bunga ($B_{S_n C_m}$)	7
2.9	Contoh pewarnaan lokasi minimum pada graf G	8
4.1	Graf pot bunga $S_3 C_3$	12
4.2	Pewarnaan lokasi minimum pada $S_3 C_3$	13
4.3	Graf pot bunga $S_3 C_5$	14
4.4	Pewarnaan lokasi minimum pada $S_3 C_5$	14
4.5	Graf pot bunga $S_3 C_4$	15
4.6	Pewarnaan lokasi minimum pada $S_3 C_4$	16
4.7	Graf pot bunga $S_3 C_6$	17
4.8	Pewarnaan lokasi minimum pada $S_3 C_6$	18
4.9	Graf pot bunga $S_3 C_8$	19
4.10	Pewarnaan lokasi minimum pada $S_3 C_8$	20
4.11	Pewarnaan lokasi minimum pada $S_4 C_3$	21
4.12	Pewarnaan lokasi minimum pada $S_4 C_5$	22
4.13	Pewarnaan lokasi minimum pada $S_4 C_4$	23
4.14	Pewarnaan lokasi minimum pada $S_5 C_4$	24
4.15	Pewarnaan lokasi minimum pada $S_4 C_6$	25

4.16	Pewarnaan lokasi minimum pada S_8C_8	26
4.17	Pewarnaan lokasi minimum pada $B_{S_3C_3}$	35
4.18	Pewarnaan lokasi minimum pada $B_{S_3C_5}$	36
4.19	Pewarnaan lokasi minimum pada $B_{S_3C_4}$	37
4.20	Pewarnaan lokasi minimum pada $B_{S_3C_6}$	38
4.21	Pewarnaan lokasi minimum pada $B_{S_3C_8}$	39
4.22	Pewarnaan lokasi minimum pada $B_{S_4C_3}$	40
4.23	Pewarnaan lokasi minimum pada $B_{S_4C_5}$	41
4.24	Pewarnaan lokasi minimum pada $B_{S_4C_4}$	42
4.25	Pewarnaan lokasi minimum pada $B_{S_5C_4}$	43
4.26	Pewarnaan lokasi minimum pada $B_{S_4C_6}$	44
4.27	Pewarnaan lokasi minimum pada $B_{S_8C_8}$	45

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf adalah salah satu bidang kajian ilmu matematika diskrit yang mempelajari hubungan antara elemen-elemen yang ada pada graf yaitu titik (*vertex*) dan sisi (*edge*). Konsep teori graf pertama kali dikemukakan pada tahun 1736 saat Leonhard Euler berusaha memecahkan masalah jembatan konigsberg. Euler merepresentasikan jembatan tersebut sebagai sisi dan daratan sebagai titik. Tujuan Euler adalah untuk menyelidiki apakah setiap daratan dan jembatan dapat dilalui tepat satu kali dengan syarat bahwa perjalanan dimulai dan berakhir di daratan yang sama, atau dengan kata lain, setiap titik yang merepresentasikan daratan harus dilalui hanya sekali (Munir, 2010).

Salah satu topik pada graf adalah pewarnaan graf. Secara sederhana pewarnaan graf dapat dipahami sebagai pemberian warna pada unsur-unsur graf yaitu titik, sisi, dan wilayah (Afriantini dkk., 2019). Bilangan kromatik lokasi merupakan banyaknya warna (minimum) pada graf G sehingga graf G mempunyai pewarnaan lokasi dan dinotasikan dengan $\chi_L(G)$ (Nur dkk., 2020). Banyak penelitian terdahulu yang telah menemukan bilangan kromatik lokasi pada beberapa jenis graf. Salah satu penelitian terdahulu yang mengkaji tentang bilangan kromatik lokasi adalah penelitian yang dilakukan oleh Chartran dkk. (2002). Selain itu, beberapa penelitian terkait bilangan kromatik lokasi pada graf antara lain: Bilangan kromatik lokasi pada graf total dan graf splitting dari graf bintang oleh Fran dkk. (2021), bilangan kromatik lokasi graf split lintasan oleh Rahmatalia dkk. (2022), bilangan kromatik lokasi operasi tertentu graf origami oleh Asmiati dkk. (2023), bilangan kromatik lokasi pada graf hasil amalgamasi sisi dari graf bintang dan graf lengkap oleh Hartiansyah & Darmaji. (2023), dan bilangan kromatik lokasi gabungan graf palem oleh Aishyah dkk. (2024).

Meskipun sudah banyak penelitian mengenai bilangan kromatik lokasi, sampai saat ini belum ada penelitian bilangan kromatik lokasi pada graf pot bunga. Graf pot bunga adalah graf yang terbentuk dari gabungan dua graf yaitu graf bintang (S_n) dan graf siklus (C_m). Struktur graf bintang terlihat unik karena memiliki satu titik sebagai pusat yang terhubung dengan semua titik, sedangkan titik lain selain titik pusat pada graf bintang tidak terhubung satu sama lain. Dari pewarnaan titik yang dilakukan pada graf pot bunga, diperoleh bilangan kromatik lokasi pada graf pot bunga ($S_n C_m$) dan graf barbel pot bunga ($B_{S_n C_m}$) yang menjadi tujuan dari penelitian ini.

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf pot bunga ($S_n C_m$) dan graf barbel pot bunga ($B_{S_n C_m}$) untuk $m, n \geq 3$.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari hasil penelitian ini adalah:

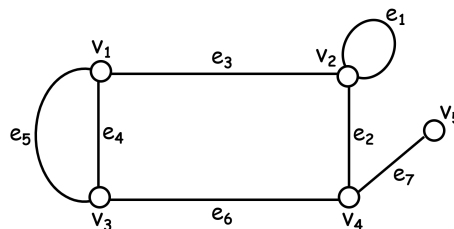
1. Penelitian ini dapat memperluas pemahaman terkait bilangan kromatik lokasi khususnya pada graf pot bunga ($S_n C_m$) dan graf barbel pot bunga ($B_{S_n C_m}$) untuk $m, n \geq 3$.
2. Penelitian ini dapat digunakan sebagai referensi untuk pengembangan penelitian selanjutnya terkait graf pot bunga ($S_n C_m$) dan graf barbel pot bunga ($B_{S_n C_m}$) untuk $m, n \geq 3$.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

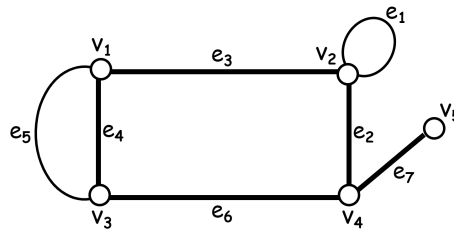
Menurut Deo (1989), definisi graf adalah himpunan terurut $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ menyatakan himpunan titik dan $E(G)$ menyatakan himpunan sisi. Banyak titik pada suatu graf disebut (*orde*) dan banyak sisi yang ada pada graf disebut ukuran (*size*). Dalam graf juga dikenal beberapa istilah seperti derajat (*degree*), *loop*, daun (*pendant vertex*), jalan (*walk*), dan lintasan (*path*). Derajat pada suatu graf adalah banyaknya sisi yang menempel pada suatu titik dinotasikan dengan $d(v)$. *Loop* adalah suatu sisi yang kedua ujungnya berakhir pada suatu titik yang sama. Daun merupakan titik yang berderajat satu. Jalan adalah rangkaian titik dan sisi yang berurutan, dengan ketentuan titik dapat dilalui beberapa kali namun sisi hanya boleh dilalui sekali. Lintasan adalah rangkaian titik dan sisi yang berurutan, dengan ketentuan titik dan sisi hanya boleh dilalui sekali. Berikut diberikan contoh graf yang memuat lima titik dan tujuh sisi.



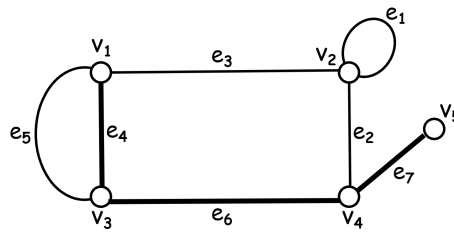
Gambar 2.1 Contoh graf dengan 5 titik dan 7 sisi

Gambar 2.1 merupakan graf $G(V, E)$ dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$. Jumlah derajat pada suatu graf adalah dua kali banyak sisi pada graf tersebut. Pada graf ini, jumlah derajatnya

adalah 14 dengan uraian $d(v_1) = d(v_3) = d(v_4) = 3$, $d(v_2) = 4$, $d(v_5) = 1$. Karena $d(v_5) = 1$ maka v_5 adalah daun. Dari graf tersebut, dapat diambil contoh jalan dan lintasan yang dapat dilihat pada Gambar 2.2 dan Gambar 2.3. Pada Gambar 2.2 suatu jalan terbentuk dari himpunan titik dan himpunan sisi $\{v_4, e_2, v_2, e_3, v_1, e_4, v_3, e_6, v_4, e_7, v_5\}$. Pada Gambar 2.3 suatu lintasan terbentuk dari himpunan titik dan himpunan sisi $\{v_1, e_4, v_3, e_6, v_4, e_7, v_5\}$.

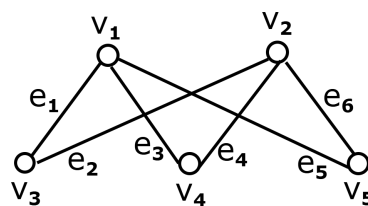


Gambar 2.2 Contoh jalan pada graf



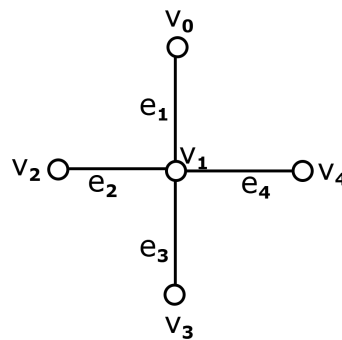
Gambar 2.3 Contoh lintasan pada graf

Berikut diberikan beberapa definisi graf yaitu graf bipartit lengkap, graf siklus, dan graf bintang beserta contoh. Graf G disebut graf bipartit lengkap jika $V(G)$ dapat dipartisi menjadi dua himpunan yaitu A dan B sehingga ab adalah sisi dari G jika dan hanya jika $a \in A$ dan $b \in B$. Jika $|A| = m$ dan $|B| = n$, maka graf bipartit lengkap mempunyai orde $m + n$ yang berukuran mn dan dinotasikan dengan $K_{m,n}$ (Chartrand dkk., 2016).



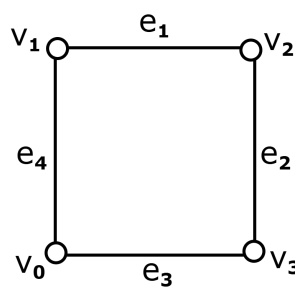
Gambar 2.4 Graf bipartit lengkap

Graf bintang adalah graf bipartit lengkap $K_{m,n}$ dengan $m = 1$. $K_{1,n}$ berorde n dan dinotasikan dengan S_n untuk $n \geq 3$ (Roza dkk., 2014). Gambar 2.5 adalah contoh graf bintang yang memiliki 5 titik $V(G) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan 4 sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Graf bintang (S_5) adalah graf terhubung yang memiliki suatu titik pusat yaitu v_1 . $d(v_1) = 4$ artinya titik v_1 terhubung dengan 4 titik lainnya yaitu himpunan daun $V(G) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$.



Gambar 2.5 Graf bintang (S_5)

Graf siklus adalah graf yang memuat n titik, dengan masing-masing titik berderajat dua. Titik dan sisi pada graf siklus membentuk lintasan tertutup dan dinotasikan dengan C_m (Munir, 2010).

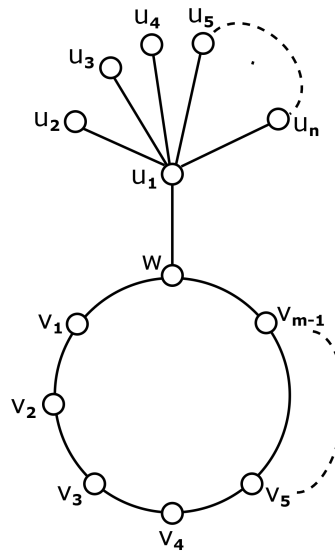


Gambar 2.6 Graf siklus (C_4)

Gambar 2.6 adalah contoh graf siklus yang memiliki 4 titik dan 4 sisi yaitu himpunan titik $V(G) = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Himpunan titik dan himpunan sisi tersebut membentuk lintasan tertutup.

2.2 Graf Pot Bunga dan Barbelnya

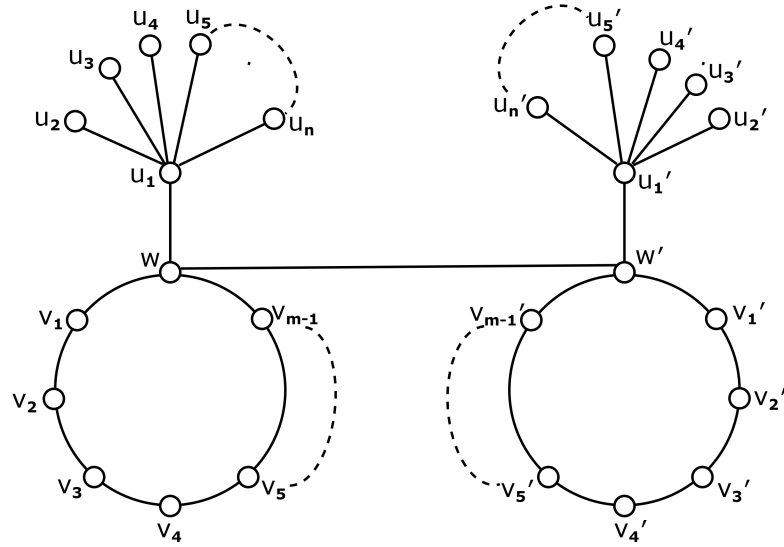
Misalkan S_n adalah graf bintang berorde n untuk $n \geq 3$ dan C_m adalah graf siklus berorde m untuk $m \geq 3$. Graf pot bunga, dinotasikan dengan $S_n C_m$ adalah graf yang diperoleh dengan menghubungkan salah satu titik di C_m (titik w) ke titik pusat S_n . Dengan demikian, $V(S_n C_m) = \{u_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{w\} \cup \{v_i \mid 1 \leq i \leq m-1\}$ adalah himpunan titik dari graf $S_n C_m$. Berikut diberikan gambar graf $S_n C_m$.



Gambar 2.7 Graf pot bunga ($S_n C_m$)

Graf barbel adalah suatu graf yang terbentuk dengan menghubungkan dua buah graf dengan jembatan (sisi) (Asmiati dkk., 2018). Misal $S_n C_m$ adalah graf pot bunga, maka $B_{S_n C_m}$ adalah graf barbel pot bunga yang dibentuk dari graf $S_n C_m$ dan salinan $S_n C_m$ yaitu $S_n C_m'$ yang dihubungkan oleh satu sisi (jembatan). Himpunan titik dari graf ($B_{S_n C_m}$) adalah $V(S_n C_m) = \{u_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{u'_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{w, w'\} \cup \{v_i \mid 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{v'_i \mid 1 \leq i \leq m-1\}$ dengan ww' adalah sisi yang menghubungkan $S_n C_m$ dan $S_n C_m'$.

Berikut diberikan contoh graf barbel pot bunga $B_{S_n C_n}$.



Gambar 2.8 Graf barbel pot bunga ($B_{S_n C_m}$)

2.3 Bilangan Kromatik Lokasi Graf

Pada bagian ini dijelaskan definisi bilangan kromatik dan bilangan kromatik lokasi graf menurut Chartrand et al., (2002). Misalkan titik-titik di graf G diwarnai sebanyak k warna dan tidak boleh diwarnai sebanyak $k - 1$ warna, serta titik-titik di G yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama, maka bilangan kromatik dari graf G adalah bilangan asli terkecil k . Bilangan kromatik graf G dinotasikan dengan $\chi(G)$.

Misalkan c adalah pewarnaan titik pada graf $G = (V, E)$, maka titik u dan v yang bertetangga di graf G tidak akan memiliki warna yang sama sehingga $c(u) \neq c(v)$. Misalkan C_i adalah himpunan titik yang disebut kelas warna dari $V(G)$ dengan $1 \leq i \leq k$, maka himpunan kelas-kelas warna dari $V(G)$ yaitu $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$. Kode warna yang dinotasikan dengan $c_\Pi(v)$ dari v didefinisikan sebagai k -pasang terurut $(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k))$ dengan $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) \mid x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. c disebut pewarnaan lokasi jika setiap titik di graf G memiliki warna yang berbeda. Bilangan kromatik lokasi adalah banyaknya warna (minimum) pada graf G sehingga graf G mempunyai pewarnaan lokasi dan dinotasikan dengan $\chi_L(G)$ (Nur dkk., 2020).

Berikut diberikan terorema-teorema yang berkaitan dengan bilangan kromatik lokasi:

Teorema 2.3.1 (Chartrand dkk., 2002) Misalkan c merupakan pewarnaan lokasi pada graf terhubung G . Jika u dan v adalah dua titik berbeda di G sedemikian sehingga $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) \setminus \{u, v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Secara khusus, jika u dan v bukan titik yang saling bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.

Bukti:

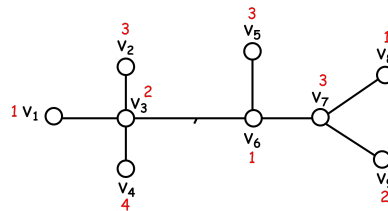
Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf terhubung G dan misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ merupakan partisi dari semua titik di G dalam kelas warna C_i . Untuk suatu titik $u, v \in V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama yaitu C_i dari Π . Akibatnya, $d(u, C_i) = d(v, C_i) = 0$. Karena $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) \setminus \{u, v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$, maka $d(u, C_j) \neq d(v, C_j)$ untuk setiap $j \neq i, 1 \leq j \leq k$. Akibatnya $c_\pi(u) \neq c_\pi(v)$. Sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Jadi $c(u) \neq c(v)$.

Akibat 2.3.1 (Chartrand dkk., 2002) Jika G adalah graf terhubung dengan suatu titik yang bertetangga dengan k daun, maka $\chi_L(G) \geq k + 1$.

Bukti:

Misalkan v adalah suatu titik yang bertetangga dengan k daun, yaitu $y_1, y_2, \dots, y_k$ di G . Berdasarkan teorema 2.3.1, setiap pewarnaan lokasi dari G mempunyai warna yang berbeda untuk $y_i, i = 1, 2, \dots, k$. Karena titik v bertetangga dengan semua daun y_i , maka v harus mempunyai warna yang berbeda dengan semua daun y_i . Akibatnya, $\chi_L(G) \geq k + 1$.

Berikut diberikan contoh graf terhubung dan akan ditentukan bilangan kromatik lokasi dari graf G .



Gambar 2.9 Contoh pewarnaan lokasi minimum pada graf G

Pada Gambar 2.9, diketahui bahwa titik v_3 terhubung dengan 3 daun. Berdasarkan Akibat 2.3.1, diperoleh $\chi_L(G) \geq 4$. Misalkan c pewarnaan titik menggunakan 4 warna pada graf G sehingga diperoleh $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ dengan setiap kelas warna yaitu $C_1 = \{v_1, v_6, v_8\}$, $C_2 = \{v_3, v_9\}$, $C_3 = \{v_2, v_5, v_7\}$, dan $C_4 = \{v_4\}$. Oleh karena itu, diperoleh kode warna sebagai berikut:

$$\begin{aligned} c_{\Pi}(v_1) &= (0, 1, 2, 2) & c_{\Pi}(v_6) &= (0, 1, 1, 2) \\ c_{\Pi}(v_2) &= (2, 1, 0, 2) & c_{\Pi}(v_7) &= (1, 1, 0, 3) \\ c_{\Pi}(v_3) &= (1, 0, 1, 1) & c_{\Pi}(v_8) &= (0, 2, 1, 4) \\ c_{\Pi}(v_4) &= (2, 1, 2, 0) & c_{\Pi}(v_9) &= (2, 0, 1, 4) \\ c_{\Pi}(v_5) &= (1, 2, 0, 3) \end{aligned}$$

Karena setiap titik pada graf G memiliki kode warna yang berbeda, maka graf tersebut merupakan pewarnaan lokasi. Akibatnya, $\chi_L(G) \leq 4$. Jadi, $\chi_L(G) = 4$.

Teorema 2.3.2 (Chartrand dkk., 2002) Untuk suatu graf siklus C_n dengan $n \geq 3$, bilangan kromatik lokasi $\chi_L(C_n)$ yaitu:

$$\chi_L(C_n) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 4, & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2024/2025 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang berlokasi di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Langkah-langkah Penelitian

Langkah-langkah penelitian ini yaitu:

1. Menentukan bilangan kromatik lokasi graf pot bunga $S_n C_m$ untuk $m, n \geq 3$.
 - (a) Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf pot bunga $(S_n C_m)$ dengan mengacu pada Akibat 2.3.1. Jika batas tersebut belum memenuhi kriteria pewarnaan lokasi, maka dilakukan penambahan warna secara bertahap hingga memenuhi persyaratan pewarnaan lokasi.
 - (b) Menetapkan batas atas bilangan kromatik lokasi graf pot bunga $(S_n C_m)$. Pada tahap ini dilakukan konstruksi pewarnaan pada graf pot bunga $(S_n C_m)$ sehingga memenuhi persyaratan pewarnaan lokasi. Pewarnaan pada graf pot bunga $(S_n C_m)$ dimulai dengan mewarnai daun dengan label terkecil dan kemudian dilanjutkan pewarnaan pada titik lain secara berurutan.
 - (c) Apabila batas atas $\chi_L(S_n C_m) \leq x$ dan batas bawah $\chi_L(S_n C_m) \geq x$ sama, maka diperoleh bilangan kromatik lokasi $\chi_L(S_n C_m) = x$.

- (d) Hasil yang telah diperoleh dirumuskan dalam suatu pernyataan matematika.
 - (e) Membuktikan hasil-hasil yang didapatkan dari Langkah d.
2. Menentukan bilangan kromatik lokasi graf barbel pot bunga $(B_{S_n C_m})$ untuk $m, n \geq 3$.
- (a) Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf barbel pot bunga $(B_{S_n C_m})$. Karena graf $B_{S_n C_m}$ memuat graf $S_n C_m$, maka batas bawah pada graf barbel pot bunga $(B_{S_n C_m})$ sekurang kurangnya sama dengan batas bawah pada graf pot bunga $(S_n C_m)$. Jika batas tersebut belum memenuhi kriteria pewarnaan lokasi, maka dilakukan penambahan warna secara bertahap hingga memenuhi persyaratan pewarnaan lokasi.
 - (b) Menetapkan batas atas bilangan kromatik lokasi graf barbel pot bunga $(B_{S_n C_m})$. Pada tahap ini dilakukan konstruksi pewarnaan pada graf barbel pot bunga $(B_{S_n C_m})$ sehingga memenuhi persyaratan pewarnaan lokasi. Pewarnaan pada graf barbel pot bunga $(B_{S_n C_m})$ dimulai dengan mewarnai daun dengan label terkecil dan kemudian dilanjutkan pewarnaan pada titik lain secara berurutan.
 - (c) Apabila batas atas $\chi_L(B_{S_n C_m}) \leq x$ dan batas bawah $\chi_L(B_{S_n C_m}) \geq x$ maka diperoleh bilangan kromatik lokasi yaitu $\chi_L(B_{S_n C_m}) = x$.
 - (d) Hasil yang telah diperoleh dirumuskan dalam suatu pernyataan matematika.
 - (e) Membuktikan hasil-hasil yang didapatkan dari Langkah d.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah diuraikan sebelumnya, diperoleh kesimpulan bilangan kromatik lokasi untuk graf pot bunga dan graf barbel pot bunga adalah 4 untuk $n = 3$ dan $m \geq 3$, n untuk $n \geq 4$ dan $m \geq 3$.

5.2 Saran

Penelitian terkait bilangan kromatik lokasi graf pot bunga dan barbelnya dapat diperluas dengan menerapkan operasi graf lainnya. Selain itu, konsep bilangan kromatik lokasi dapat diterapkan pada graf lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Afriantini, H., Helmi, F., & Fran, F. (2019). Pewarnaan simpul, sisi, wilayah pada graf dan penerapannya. *Bimaster Ilmiah: Statistika dan Terapannya*, 8(4), 773-782.
- Asmiati, A., Gunce Yana, I. K. S., & Yulianti, L. (2018). On the locating chromatic number of certain barbell graphs. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 1-5.
- Asmiati, A., Irawan, A., Nuryaman, A., & Muludi, K. (2023). The locating chromatic number for certain operation of origami graphs. *Mathematics and Statistics*, 11(1), 101–106.
- Aisyah, N., Welyyanti, D., & Yulianti, L. (2024). Bilangan kromatik lokasi gabungan graf palem. *Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 9(1), 78-87.
- Chartrand, G., Johns, G., McKeon, K., & Zhang, P. (2002). The location chromatic number of a graph. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, 36, 89–101.
- Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P. (2016). *Graphs & digraphs sixth edition*. Boca Raton: Taylor & Francis Group.
- Deo, N. (1989). *Graph theory with applications to engineering & computer science*. New Delhi: Prentice-Hall of India Private Limited.
- Fran, F., Kabang, N. K., & Yundari, Y. (2021). Bilangan kromatik lokasi pada graf total dan graf splitting dari graf bintang. *Teorema: Teori dan Riset Matematika*, 6(2), 150-160.

Hartiansyah, F. R., & Darmaji. (2023). Bilangan kromatik lokasi pada graf hasil amalgamasi sisi dari graf bintang dan graf lengkap. *Eta–Math Journal*, 8(2), 66.

Munir, R. (2010). *Matematika diskrit*. Bandung : Informatika.

Nur, M., Wellyanti, D., & Narwen. (2020). Bilangan kromatik lokasi untuk graf pohon pisang $B_{n,k}$. *Jurnal Matematika UNAND*, 9(2), 70-75.

Rahmatalia, S., Asmiati, & Notiragayu. (2022). Bilangan kromatik lokasi graf split lintasan. *Jurnal Matematika Integratif*, 18(1), 73-80.

Roza, I., Narwen, & Zulakmal. (2014). Graf garis (line graph) dari graf siklus, graf lengkap dan graf bintang. *Jurnal Matematika UNAND*, 3(2), 1-4.