BATAS ATAS BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BARISAN SEGITIGA DAN BARBELNYA

(Skripsi)

Oleh

JONATHAN MARCELINO
NPM. 2117031078

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

ABSTRACT

THE UPPER BOUND OF LOCATING CHROMATIC NUMBER OF TRIANGLE SEQUENCE GRAPHS AND ITS BARBELL

By

Jonathan Marcelino

The locating chromatic number of a graph G is the smallest integer k such that G has a locating k-coloring. This research discussed the upper bound of locating chromatic number of triangle sequence graphs $TS(n)$ and barbell triangle sequence graphs$B_{TS(n)}$. The upper bound of locating chromatic number of $TS(n)$ is 4 for $n = 2$; 5 for $3 \leq n \leq 8$; and 6 for $9 \leq n \leq 20$. The upper bound of locating chromatic number of $B_{TS(n)}$ is 5 for $n = 2$; 6 for $3 \leq n \leq 8$; and 7 for $9 \leq n \leq 20$.

Keywords: Location chromatic number, triangle sequence, barbell triangle sequence graph.

ABSTRAK

BATAS ATAS BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BARISAN SEGITIGA DAN BARBELNYA

Oleh

Jonathan Marcelino

Bilangan kromatik lokasi graf G adalah bilangan bulat terkecil k sedemikian sehingga G memiliki pewarnaan-k lokasi. Penelitian ini membahas tentang batas atas bilangan kromatik lokasi graf barisan segitiga $TS(n)$ dan graf barbel barisan segitiga $B_{TS(n)}$. Batas atas bilangan kromatik lokasi $TS(n)$ adalah 4 untuk $n = 2$; 5 untuk $3 \leq n \leq 8$; dan 6 untuk $9 \leq n \leq 20$. Batas atas bilangan kromatik lokasi graf barbel barisan segitiga $B_{TS(n)}$ adalah 5 untuk $n = 2$; 6 untuk $3 \leq n \leq 8$; dan 7 untuk $9 \leq n \leq 20$.

Kata-kata kunci: Bilangan kromatik lokasi, graf barisan segitiga, graf barbel barisan segitiga.

BATAS ATAS BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BARISAN SEGITIGA DAN BARBELNYA

JONATHAN MARCELINO

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

Judul Skripsi : **BATAS ATAS BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BARISAN SEGITIGA DAN BARBELNYA**

Nama Mahasiswa : *Jonathan Marcelino*

Nomor Pokok Mahasiswa : **2117031078**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.	**Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si.**
NIP. 197604112000122001	NIP. 199311062019032018

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr.Aang Nuryaman, S.Si.,M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	:	**Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.**	....
Sekretaris	:	**Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **4 Juni 2025**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Jonathan Marcelino**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2117031078**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**BATAS ATAS BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BARISAN SEGITIGA DAN BARBELNYA**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 4 Juni 2025

Jonathan Marcelino

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Jonathan Marcelino yang lahir di Tangerang pada tanggal 29 Juli 2003. Penulis adalah anak kedua dari dua bersaudara yang terlahir dari pasangan Ayah Ridwanto Purba dan Ibu Hesti Situmorang.

Penulis menempuh awal pedidikan di SDN Gebang Raya 3, Tangerang pada tahun 2009 sampai tahun 2015. Lalu, penulis melanjutkan pendidikan sekolah menengah pertama di SMPN 15 Tangerang pada tahun 2015 sampai tahun 2018. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan sekolah menengah atas di SMAN 15 Tangerang pada tahun 2018 sampai tahun 2021. Pada tahun 2021, penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa S1 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN).

Pada tahun 2023 penulis aktif di Unit Kegiatan Mahasiswa Tingkat Jurusan yaitu HIMATIKA Unila (Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika Universitas Lampung) pada periode 2023, penulis diamanahkan menjadi anggota HIMATIKA Unila. Di tahun 2024 penulis melaksanakan Kerja Praktek di Instansi Bappelitbangda Kota Bekasi sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu matematika di dunia kerja. Pada tahun yang sama penulis melaksanakan KKN (kuliah Kerja Nyata) di Desa Bandar Agung, Lampung Timur sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat.

KATA INSPIRASI

“Tinggi hati mendahului kehancuran, tetapi kerendahan hati mendahului kehormatan”
(Amsal 18 : 12)

“Segala perkara dapat kutanggung di dalam Dia yang memberi kekuatan kepadaku”
(Filipi 4 : 13)

“Apapun juga yang kamu perbuat, perbuatlah dengan segenap hatimu seperti untuk Tuhan dan bukan untuk manusia”
(Kolose 3 : 23)

“Anda memang melihat saya gagal, tapi anda tidak akan pernah melihat saya menyerah”
(Antony Santos)

“Jika kau mempunyai waktu untuk terpuruk, sebaiknya kau gunakan untuk memikirkan kedepannya”
(Jonathan Marcelino)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas berkat serta penyertaan-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Keluargaku Tercinta

Terima kasih kepada orang tuaku dan abangku atas segala pengorbanan, motivasi, doa serta dukungannya selama ini. Terima kasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terima kasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terima kasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta
Universitas Lampung

SANWACANA

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Batas Atas Bilangan Kromatik Lokasi Graf Barisan Segitiga Dan Barbelnya" dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing 1 yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Ibu Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si. selaku dosen pembimbing akademik.
6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Mama, abang, dan keluarga yang selalu mendukung penulis sehingga skripsi ini dapat diselesaikan.

8. Teman-teman seperbimbingan skripsi yang saling memberi semangat, mendukung, menemani, dan membantu penulis dalam penyelesaian skripsi.
9. Teman-teman sekontrakan yang saling memberi dukungan, semangat dan hiburan kepada penulis.
10. Teman-teman kelas MABAR (Mahasiswa Aljabar), dan teman-teman angkatan 2021 yang telah membersamai penulis dari perkuliahan.
11. Semua pihak yang membantu dalam penyelesaian skripsi ini, yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 4 Juni 2025

Jonathan Marcelino

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Graf adalah salah satu cabang ilmu dalam matematika terapan yang telah dikenal sejak tahun 1736, saat pertama kali digunakan oleh ahli matematika Swiss, Leonhard Euler, untuk memecahkan masalah jembatan Konigsberg. Graf memainkan peran penting dalam perkembangan matematika terapan karena dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah sehari-hari (Purwanto, 2010). Sering kali, solusi tersebut membutuhkan pendekatan lintas disiplin, dan dengan bantuan simbol-simbol matematika, masalah menjadi lebih mudah dipahami, lebih mudah diselesaikan, atau bahkan dapat dibuktikan bahwa masalah tersebut tidak memiliki solusi.

Teori graf terus berkembang pesat, terutama pada topik bilangan kromatik. Dalam teori pewarnaan graf, khususnya pada pewarnaan simpul, ditemukan beberapa pengembangan dengan penambahan syarat tertentu, salah satunya adalah pewarnaan lokasi. Konsep pewarnaan lokasi graf menggabungkan pewarnaan simpul dengan dimensi partisi (Chartrand dkk., 2002). Pewarnaan simpul pada graf G disebut sebagai pewarnaan lokasi apabila setiap simpul dalam G memiliki kode warna yang unik atau berbeda satu sama lain. Tujuan dari pewarnaan lokasi tidak hanya untuk memastikan apakah graf tersebut memenuhi kriteria pewarnaan lokasi, tetapi juga untuk menentukan banyaknya warna minimum yang diperlukan dalam pewarnaan tersebut, yang dikenal sebagai bilangan kromatik lokasi.

Beberapa penelitian telah dilakukan terkait dengan bilangan kromatik pada graf. Asmiati dkk. (2011) menemukan bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi bintang $\chi_L(S_{k,m})$, Asmiati dkk. (2012) mendapatkan bilangan kromatik lokasi graf kembang api $\chi_L(F_{n,k})$, Asmiati (2017) menemukan bilangan kromatik lokasi n amalgamasi bintang yang dihubungkan suatu lintasan $S_{k,m}$ untuk $k, m \geq 2, k \leq m$. Selanjutnya Irawan dkk. (2021) mendapatkan bilangan kromatik lokasi graf origami $\chi_L(O_n)$ adalah 4 untuk $n = 3$ dan 5 untuk $n \geq 4$. Bilangan kromatik lokasi graf split lintasan $\chi_L(Spl(P_n)) \leq 4$ ditemukan oleh Siti dkk. (2022). Bilangan kromatik lokasi graf origami tertentu dan operasinya $\chi_L(HO_m) = \chi_L(O_m) + 1$ ditemukan oleh Asmiati dkk. (2023). Selanjutnya bilangan kromatik lokasi beberapa hasil operasi graf matahari $S_m, m \geq 4$ adalah 4 ditemukan oleh Okzarima dkk. (2024) dan Asmiati dkk. (2024) mendapatkan bilangan kromatik lokasi graf *shadow* siklus.

Meskipun sudah ada beberapa penelitian yang membahas tentang bilangan kromatik lokasi, penelitian lebih lanjut masih diperlukan karena banyaknya jenis graf dengan karakteristik yang beragam.

Graf barisan segitiga adalah graf yang memuat beberapa siklus dengan panjang dari setiap siklus tersebut adalah tiga dan berpangkal pada lintasan. Barisan segitiga dinotasikan dengan $TS(n)$, nilai n menunjukkan banyak titik puncak segitiga. Berdasarkan hasil penelusuran pustaka, belum ditemukan penelitian yang membahas batas atas bilangan kromatik lokasi pada graf barisan segitiga $TS(n)$ untuk $n \geq 2$ dan barbelnya. Penelitian ini dilakukan untuk menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi pada graf barisan segitiga dan barbelnya.

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menetapkan batas atas bilangan kromatik lokasi pada graf barisan segitiga $TS(n)$ dan graf barbel barisan segitiga $B_{(TS(n))}$ untuk $2 \leq n \leq 20$.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini antara lain:

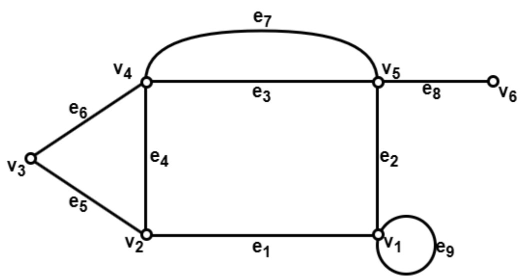
1) Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf, terutama untuk graf barisan segitiga dan barbelnya untuk $2 \leq n \leq 20$.
2) Sebagai sumber referensi untuk pembaca dan penelitian lanjutan mengenai batas atas bilangan kromatik lokasi pada graf barisan lainnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

Dalam penelitian ini, konsep dasar mengenai graf diuraikan berdasarkan referensi dari Deo (1989). Suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan terurut $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ merupakan himpunan titik (*vertex*) dari G dengan $V(G) \neq \emptyset$ dan $E(G)$ merupakan himpunan sisi (*edge*) yang terdiri atas pasangan tak terurut dari elemen-elemen di $V(G)$. Jumlah titik pada $V(G)$ disebut orde dari graf G. Apabila titik v_1 dan v_2 dikaitkan dengan sisi e, maka kedua titik tersebut dikatakan terhubung oleh sisi e ataupun sisi e terhubung dengan v_1 dan v_2, sehingga v_1 dikatakan bertetangga dengan v_2. Himpunan titik yang saling bertetangga dengan suatu titik v dinotasikan $N(v)$. Berikut diberikan contoh graf G dengan 6 titik dan 9 sisi.



Gambar 2.1 Contoh graf G dengan 6 titik dan 9 sisi

Gambar 2.1 merupakan contoh graf $G(V, E)$ dengan titik $V(G)$={v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6} dan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$. Titik v_1 bertetangga dengan titik v_2 dan v_5 atau titik v_1 dan v_5 menempel dengan e_2. Himpunan tetangga dari v_1, yaitu $N(v_1) = \{v_2, v_5\}$.

Menurut Asmiati (2023), derajat (*degree*) dari suatu titik v pada graf G adalah jumlah sisi yang terhubung langsung dengan titik v, yang dinyatakan dengan notasi $d(v)$. Dari Gambar 2.1, $d(v_1) = 4, d(v_2) = 3, d(v_3) = 2, d(v_4) = 4, d(v_5) = 4$. Daun (*pendant vertex*) merupakan titik berderajat 1, dari Gambar 2.1 titik v_6 merupakan daun (*pendant vertex*).

Gelung (*loop*) merupakan sisi yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama dan sisi paralel (*parallel edges*) merupakan sisi-sisi yang memiliki dua titik ujung yang sama. Graf sederhana (*simple graph*) merupakan graf yang tidak mempunyai sisi *parallel* dan *loop*. Gambar 2.1 bukan termasuk graf sederhana karena terdapat sisi *parallel* yaitu e_3 dan e_7, juga terdapat *loop* yaitu e_9.

Banyak istilah-istilah yang biasa digunakan dalam studi graf seperti jalan (*walk*), lintasan (*path*), dan siklus (*cycle*). Jalan (*walk*) merupakan rangkaian terbatas dari titik dan sisi yang dimulai dan berakhir pada titik, dengan setiap sisi menghubungkan dua titik berturut-turut. Contoh *walk* dari titik v_1 ke v_4 berdasarkan Gambar 2.1 merupakan $v_1 - e_1 - v_2 - e_5 - v_3 - e_6 - v_4 - e_3 - v_5 - e_7 - v_4$.

Lintasan (*path*) merupakan jalan yang melewati titik yang berbeda-beda. Berdasarkan Gambar 2.1 contoh lintasan adalah $v_3 - e_6 - v_4 - e_3 - v_5 - e_2 - v_1 - e_1 - v_2$. Siklus (*cycle*) merupakan lintasan tertutup (*closed path*), yaitu lintasan yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Siklus dikelompokkan menjadi dua jenis, yaitu siklus genap dan siklus ganjil. Siklus genap adalah siklus dengan banyaknya titik genap, dan siklus ganjil adalah siklus dengan banyaknya titik ganjil. Berdasarkan Gambar 2.1 contoh siklus ganjil adalah $v_2 - e_5 - v_3 - e_6 - v_4 - e_4 - v_2$. Jarak (*distance*) di antara dua titik berbeda v_i dan v_j, dinotasikan dengan $d(v_i, v_j)$ merupakan panjang dari lintasan terpendek di antara kedua titik tersebut. Contoh jarak dari titik v_1 ke v_4 dan titik v_2 ke v_6 berdasarkan Gambar 2.1 diperoleh $d(1, 4) = 2$ dan $d(2, 6) = 3$.

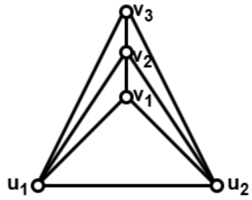
2.2 Graf Barisan Segitiga dan Barbelnya

Menurut Hasmawati (2023) graf $G(V, E)$ disebut sebagai graf barisan jika:

(i) tidak terdapat sisi yang saling menyilang dan

(ii) satu sisi berfungsi sebagai alas yang sama untuk n segitiga dan titik dari setiap segitiga tidak terkait dengan sisi alas, terletak pada suatu lintasan yang sama. Masing-masing titik pada lintasan disebut titik puncak segitiga.

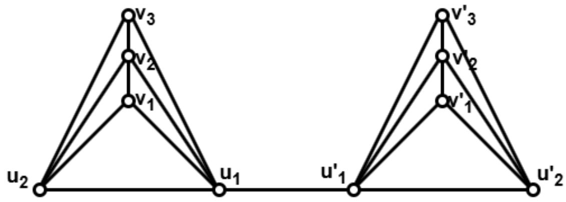
Berikut diberikan contoh graf barisan segitiga $TS(3)$.



Gambar 2.2 Contoh graf barisan segitiga $TS(3)$

Pada Gambar 2.2 sisi u_1 u_2 merupakan sisi bersama dari semua segitiga. Titik v_1, v_2, v_3 terletak pada lintasan yang sama. Misalkan $C = v_1u_1u_2v_1$ yaitu sebuah segitiga. Misalkan v_2 yaitu sebuah titik baru di luar C kemudian v_2 dihubungkan dengan v_1, u_1 dan u_2. Sebuah titik baru v_3 di luar segitiga $v_2u_1u_2v_2$, kemudian v_3 dihubungkan dengan v_2, u_1 dan u_2, demikian sampai titik $v_1, v_2, \ldots, v_n$ terletak pada suatu lintasan yang sama. Graf barisan segitiga dinotasikan $TS(n)$, nilai n yaitu banyak titik puncak segitiga.

Graf barbel barisan segitiga merupakan graf sederhana yang terbentuk dengan menghubungkan dua tiruan dari graf barisan segitiga $TS(n)$ yang dihubungkan oleh sebuah sisi (u_1, u_1') sebagai jembatan. Graf barbel barisan segitiga dinotasikan dengan $B_{TS(n)}$. Berikut diberikan contoh graf barbel barisan segitiga $B_{TS(3)}$.



Gambar 2.3 Contoh graf barbel barisan segitiga $B_{TS(3)}$

2.3 Bilangan Kromatik Lokasi Graf

Chartrand dkk. (2002) mendefinisikan bilangan kromatik lokasi sebagai berikut ini. Misalkan $G = (V, E)$ merupakan graf terhubung dan c suatu pewarnaan di graf G dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk titik u dan v yang bertetangga di graf G. Misalkan C_i yaitu himpunan titik-titik yang diberi warna i, selanjutnya disebut kelas warna, maka $\Pi = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ yaitu himpunan yang berisi semua kelas warna dari himpunan titik $V(G)$. Kode warna dari suatu titik v terhadap pewarnaan Π, dilambangkan dengan $c_\Pi(v)$, yaitu pasangan terurut berdimensi k yang berbentuk $(d(v, C_1), d(v, C_2), \ldots, d(v, C_k))$, dengan $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) \mid x \in C_i\}$, untuk setiap $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik dalam graf G diberi warna yang berbeda satu sama lain, maka pewarnaan tersebut merupakan pewarnaan lokasi graf G. Bilangan kromatik lokasi dari G dinotasikan dengan $\chi_L(G)$ merupakan banyaknya minimum warna k yang diperlukan agar graf G memiliki pewarnaan lokasi.

Chartrand dkk. (2002) berhasil membuktikan sejumlah teorema mengenai bilangan kromatik lokasi graf.

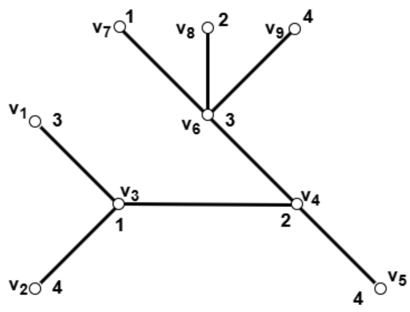
Teorema 2.3.1 Misalkan c merupakan suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G. Jika titik u dan titik v yaitu dua titik yang berbeda pada graf G sehingga $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, akibatnya $c(u) \neq c(v)$. Terutama, jika titik u dan titik v adalah titik-titik yang tidak terhubung di G sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$ (Chartrand dkk., 2002)

Bukti. Misal c merupakan pewarnaan lokasi pada graf terhubung G. Anggap bahwa $\Pi = (C_1, C_2, \ldots, C_k)$ merupakan partisi dari himpunan titik-titik G pada kelas warna C_i. Untuk setiap, $v \in V(G)$, misalkan $c(u) = c(v)$. Dengan demikian, simpul u dan v berada pada kelas warna yang sama, yaitu C_i dari Π. Maka, $d(u, C_i) = d(v, C_i) = 0$. Karena $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, sehingga $d(u, C_i) = d(v, C_i)$ untuk setiap $j \neq i$, $1 \leq j \leq k$. Akibatnya $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$. Oleh karena itu, c bukan pewarnaan lokasi. Jadi $c(u) \neq c(v)$. ■

Akibat 2.1 Jika G merupakan graf terhubung yang memiliki sebuah simpul yang bertetangga dengan k daun, maka $\chi_L(G) \geq k + 1$. Chartrand dkk. (2002)

Bukti. Misalkan v merupakan sebuah simpul dalam graf G yang bertetangga dengan k daun, yaitu $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Berdasarkan Teorema 2.3.1, dalam pewarnaan lokasi graf G, setiap daun C_i dengan $i = 1, 2, \ldots, k$ harus diberi warna yang berbeda satu sama lain. Karena simpul v bertetangga langsung dengan seluruh daun tersebut, maka v juga harus memiliki warna yang berbeda dari masing-masing C_i. Oleh karena itu, diperlukan minimal $k + 1$ warna, sehingga $\chi_L(G) \geq k + 1$. ■

Berikut diberikan gambar pewarnaan lokasi minimum pada graf G



Gambar 2.4 Pewarnaan lokasi minimum pada graf G

Pada Gambar 2.4, titik v_6 mempunyai tiga daun, maka berdasarkan Akibat 2.1 batas bawah bilangan kromatik lokasi graf G adalah $\chi_L(G) \geq 4$.

Misal c merupakan pewarnaan titik menggunakan empat warna, pada graf G diperoleh $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ dengan $C_1 = \{v_3, v_7\}$, $C_2 = \{v_4, v_8\}$, $C_3 = \{v_1, v_6\}$, dan $C_4 = \{v_2, v_5, v_9\}$ maka diperoleh kode warna sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
c_\Pi(v_1) &= (1,2,0,2) & \quad c_\Pi(v_6) &= (1,1,0,1) \\
c_\Pi(v_2) &= (1,2,2,0) & \quad c_\Pi(v_7) &= (0,2,1,2) \\
c_\Pi(v_3) &= (0,1,1,1) & \quad c_\Pi(v_8) &= (2,0,1,2) \\
c_\Pi(v_4) &= (1,0,1,1) & \quad c_\Pi(v_9) &= (2,2,1,0) \\
c_\Pi(v_5) &= (2,1,2,0) & &
\end{aligned}
$$

Karena semua titik pada graf memiliki kode warna yang tidak sama, maka dapat disimpulkan bahwa c merupakan pewarnaan lokasi. Akibatnya batas atas bilangan kromatik lokasi graf G adalah $\chi_L(G) \leq 4$.

Karena batas bawah bilangan kromatik lokasi graf G $\chi_L(G) \geq 4$ dan batas atas bilangan kromatik lokasi graf G $\chi_L(G) \leq 4$ maka Π merupakan pewarnaan lokasi graf G, dengan $\chi_L(G) = 4$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil 2024/2025 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Langkah-Langkah Penelitian

Penelitian ini melalui beberapa tahapan dalam menentukan batas atas dari bilangan kromatik lokasi pada graf barisan segitiga $TS(n)$ yaitu:

1) Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi pada graf barisan segitiga $TS(n)$.

   a. Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf barisan segitiga $TS(n)$ untuk $n \geq 2$ dengan mengonstruksi pewarnaan dilakukan sedemikian rupa agar memenuhi ketentuan dalam pewarnaan lokasi, dengan mempertimbangkan struktur dari graf yang dianalisis. Proses pewarnaan dimulai dari simpul-simpul pada graf siklus, kemudian dilanjutkan ke simpul-simpul di luar siklus, dimulai dari yang memiliki label terkecil. Pendekatan ini bertujuan untuk memperoleh kelas warna serta jumlah warna minimum yang tetap memenuhi syarat pewarnaan lokasi.

   b. Apabila diperoleh pewarnaan minimum pada simpul-simpul graf yang memenuhi maka batas atas $\chi_L(TS(n)) \leq x$.

   c. Merumuskan hasil yang diperoleh dalam satu pernyataan matematika.

   d. Menarik kesimpulan.

2) Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi pada graf barbel barisan segitiga $B_{TS(n)}$.

   a. Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf barbel barisan segitiga $B_{TS(n)}$ untuk $n \geq 2$ dengan mengonstruksi pewarnaan agar memenuhi ketentuan pewarnaan lokasi, dengan mempertimbangkan struktur dari graf yang dianalisis. Proses pewarnaan dimulai dari simpul pada graf siklus, kemudian dilanjutkan ke simpul-simpul di luar siklus, dimulai dari yang memiliki label terkecil. Pendekatan ini bertujuan untuk memperoleh kelas warna serta jumlah warna minimum yang tetap memenuhi syarat pewarnaan lokasi.

   b. Apabila diperoleh pewarnaan minimum pada simpul-simpul graf yang memenuhi maka batas atas $\chi_L(B_{TS(n)}) \leq x$.

   c. Merumuskan hasil yang diperoleh dalam satu pernyataan matematika.

   d. Menarik kesimpulan.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian diperoleh bahwa batas atas bilangan kromatik lokasi pada graf barisan segitiga $TS(n)$ dan graf barbel barisan segitiga $B_{TS(n)}$ adalah:

$$\chi_L(TS(n)) \leq \begin{cases} 4; & n = 2 \\ 5; & 3 \leq n \leq 8 \\ 6; & 9 \leq n \leq 20 \end{cases}$$

dan,

$$\chi_L(B_{TS(n)}) \leq \begin{cases} 5; & n = 2 \\ 6; & 3 \leq n \leq 8 \\ 7; & 9 \leq n \leq 20 \end{cases}$$

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan untuk nilai $n \geq 21$ dan menentukan batas bawahnya.

DAFTAR PUSTAKA

Asmiati, A. (2017). Bilangan Kromatik Lokasi n Amalgamasi Bintang yang Dihubungkan suatu Lintasan. *Jurnal Matematika Integratif.* 13(2): 115-121.

Asmiati, A. (2023). *Graf Aplikasinya pada Lintasan Terpendek Edisi 2.* Yogyakarta: Matematika

Asmiati, A., Assiyatun, H., & Baskoro, E. T. (2011). Locating-chromatic number of amalgamation of stars. *ITB Journal of Science.* 43A(1): 1-8.

Asmiati, A., Baskoro, E. T., Assiyatun, H., & Suprijanto, D. (2012). The locating-chromatic number of firecracker graphs. *Far East Journal of Mathematical Sciences.* 63(1): 11-23.

Asmiati, A., Irawan, A., Nuryaman, A., & Muludi, K. (2023). The locating chromatic number for certain operation of origami graphs. *Mathematics and Statistics.* 11(1): 101-106.

Asmiati, Okzarima, W. Notiragayu, Zakaria. L., (2024). Upper Bounds of the Locating Chromatic Numbers of Shadow Cycle Graphs. *International Journal of Mathematics and Computer Science.* 1: 239–248.

Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M. A., Slater, P. J., & Zhang, P. (2002). The locating-chromatic number of a graph. *Bull. Inst. Combin. Appl.* 36: 89-101.

Deo, N. (1989).*Graph Theory with Application to Engineering and Computer Science.* New Delhi: Prentice Hall of India Private Limited.

Hasmawati. (2023). *Pengantar Dan Jenis-Jenis Graf.* Makassar: Unhas Press.

Irawan, A., Asmiati, A., Zakaria, L., & Muludi, K. (2021). The locating-chromatic number of origami graphs. *Indonesian Journal of Combinatorics.* 14(167): 1-15.

Okzarima, W., Asmiati, A., Muludi. K., Saputro S. W., & Yulianti. A., (2024). The Upper Bound of Locating Chromatic Number of Sun Graphs. *AIP Conference Proceedings.* 2970(1).

Siti, R., Asmiati, A., & Notiragayu, N. (2022). Bilangan kromatik lokasi graf split lintasan. *Jurnal Matematika Integratif.* 18(1): 73-80.

Purwanto. (2010). *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.