DIMENSI PARTISI GRAF KAKI SERIBU DAN BARBELNYA

Skripsi

Oleh

MIRANDA NUR HALIMAH
NPM. 2117031059

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

ABSTRACT

PARTITION DIMENSION OF THE MILLIPEDE GRAPH AND ITS BARBELLS

By

Miranda Nur Halimah

The partition dimension of a graph G denoted by $pd(G)$ is the minimum cardinality of the difference partition. The millipede graph $L_n \odot \overline{K_r}$ is obtained from the corona operation of the ladder graph L_n with the complement of the complete graph K_r. The thousand foot barbell graph $(B_{L_n \odot \overline{K_r}})$ is a graph formed by connecting two thousand foot graphs by a bridge. As a result, $pd(L_2 \odot \overline{Kr})$ is $r + 1$ for $r = 2, 3$ and r for $r \geq 4$. Furthermore, for $n \geq 3$ $pd(L_n \odot \overline{Kr})$ is 4 for $r = 2, 3$ and $r + 1$ for $r \geq 4$. The partition dimension of the millipede barbell graph, $pd(B_{L_2 \odot \overline{K_r})}$ is 4 for $r = 2, 3$, $r + 1$ for $4 \leq r \leq 7$ and r for $r \geq 8$. Further, it is obtained that $pd(B_{L_n \odot \overline{K_r}}) = pd(L_n \odot \overline{K_r})$ for $n \geq 3$.

Keywords: partition dimension, millipede graph, millipede barbell graph.

ABSTRAK

DIMENSI PARTISI GRAF KAKI SERIBU DAN BARBELNYA

Oleh

Miranda Nur Halimah

Dimensi partisi suatu graf G dinotasikan dengan $pd(G)$ merupakan kardinalitas minimum dari partisi pembeda. Graf kaki seribu $L_n \odot \overline{K_r}$ diperoleh dari hasil operasi korona graf tangga L_n dengan komplemen graf lengkap K_r . Graf barbel kaki seribu $(B_{L_n \odot \overline{K_r}})$ merupakan graf yang terbentuk dengan menghubungkan dua graf kaki seribu oleh suatu jembatan. Hasil yang diperoleh , $pd(L_2 \odot \overline{Kr})$ adalah $r+1$ untuk $r = 2,3$ dan r untuk $r \geq 4$. Selanjutnya, untuk $n \geq 3$ $pd(L_n \odot \overline{Kr})$ adalah 4 untuk $r = 2,3$ dan $r+1$ untuk $r \geq 4$. Dimensi partisi dari graf barbel kaki seribu, $pd(B_{L_2 \odot \overline{K_r}})$ adalah 4 untuk $r = 2,3$, $r+1$ untuk $4 \leq r \leq 7$ dan r untuk $r \geq 8$. Lebih lanjut, diperoleh $pd(B_{L_n \odot \overline{K_r}}) = pd(L_n \odot \overline{K_r})$ untuk $n \geq 3$.

Kata-kata kunci: dimensi partisi, graf kaki seribu, graf barbel kaki seribu.

DIMENSI PARTISI GRAF KAKI SERIBU DAN BARBELNYA

MIRANDA NUR HALIMAH

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

Judul Skripsi : **DIMENSI PARTISI GRAF KAKI SERIBU DAN BARBELNYA**

Nama Mahasiswa : ***Miranda Nur Halimah***

Nomor Pokok Mahasiswa : **2117031059**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.	**Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si.**
NIP 197604112000122001	NIP 199311062019032018

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr.Aang Nuryaman, S.Si.,M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. tim penguji

Ketua	:	**Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.**	....
Sekretaris	:	**Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Dr. Fitriani, S.Si.,M.Sc.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **16 Mei 2025**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Miranda Nur Halimah**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2117031059**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Dimensi Partisi Graf Kaki Seribu dan Barbelnya**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi inni merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai degnan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 16 Mei 2025

Penulis,

Miranda Nur Halimah

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Miranda Nur Halimah yang lahir pada tanggal 27 Juli 2003, di Seputih Mataram, Lampung. Penulis merupakan anak kedua dari tiga bersaudara dari pasangan suami istri Bapak Nurkholis dan Ibu Romlah.

Penulis menempuh pendidikan pertama di TK Gula Putih Mataram pada tahun 2007-2009, pendidikan Sekolah Dasar di SD Gula Putih Mataram pada tahun 2009-2015, dan pendidikan Sekolah Menegah Pertama di SMP Gula Putih Mataram pada tahun 2015-2018. Kemudian pada tahun 2018-2021 penulis menempuh pendidikan Sekolah Menengah Atas di SMAS Sugar Group Bandar Mataram, Lampung Tengah, Lampung.

Pada tahun 2021, penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswi S1 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN). Selama menjadi mahasiswa penulis aktif di HIMATIKA sebagai anggota biro kesekretariatan dan KOPMA UNILA sebagai sekretaris 1 GFMIPA.

Pada bulan Desember 2023- Februari 2024, penulis melakukan kerja praktik di Badan Pendapatan Daerah Provinsi Lampung. Selanjutnya penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata pada Juni-Agustus 2024 di Desa Braja Emas, Way Jepara, Lampung Timur.

KATA INSPIRASI

”Maka sesungguhnya bersama kesulitan itu ada kemudahan.”

(Q.S Al Insyirah: 5)

”Dan barang siapa yang bertakwa kepada Allah, niscaya Allah menjadikan baginya kemudahan dalam urusannya.”

(Q.S At Talaq: 4)

”Apabila sesuatu yang kau senangi tidak terjadi, maka senangilah apa yang terjadi.”

(Ali bin Abi Thalib)

”Aku percaya suatu hari nanti, akan kutemukan jalan menuju diriku, menuju mimpiku, dan menuju keinginanku.”

(Mahmoud Darwish)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap Alhamdulillah dan syukur kepada Allah SWT atas nikmat serta hidayah-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan Bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Ayah dan Ibuku Tercinta

Terimakasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini. Terimakasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta
Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul ”Dimensi Partisi Graf Kaki Seribu dan Barbelnya” dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing 1 yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si. selaku Pembimbing II yang telah memberi bimbingan dan saran kepada penulis selama proses penyusunan skripsi ini.
3. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Pembahas yang slalu memberikan saran dan kritik tentang penulisan skripsi ini.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc., selaku Sekretaris Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
6. Ibu Dr. Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc. selaku dosen pembimbing akademik yang selalu membimbing penulis selama proses mengemban pendidikan perguruan tinggi.

7. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

8. Bapak Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

9. Keluarga tercinta, ayah, ibu, kakak, nenek serta keluarga besar yang senan tiasa memberikan dukungan, motivasi dan doa kepada penulis.

10. Kepada seorang yang tak kalah penting kehadirannya, Ilham Aji Wicaksono yang selalu menemani dan selalu menjadi *support system* penulis. Terima kasih telah mendengarkan keluh kesah dan meyakinkan penulis untuk pantang menyerah hingga penyusunan skripsi ini terselesaikan.

11. Sahabat-sahabat penulis, Amiva, Dian, Dinda, Imas, Lutfia, Madin, dan Civita yang telah memberikan dukungan kepada penulis.

12. Teman-teman satu bimbingan, Aini, Angelina, Dini, Jonathan, Nazila, dan Safina yang telah memberikan semangat dan dukungan.

13. Teman-teman Jurusan Matematika Angkatan 2021 yang telah membersamai selama masa perkuliahan.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 16 Mei 2025

Miranda Nur Halimah

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI . . . . **xiii**
DAFTAR GAMBAR . . . . **xv**
I PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang Masalah 1
1.2 Tujuan Penelitian 2
1.3 Manfaat Penelitian 2
II TINJAUAN PUSTAKA **3**
2.1 Konsep Dasar Graf 3
2.2 Graf Kaki Seribu dan Barbelnya 6
2.3 Dimensi Partisi Graf 7
III METODE PENELITIAN **10**
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian 10
3.2 Metode Penelitian 10
IV HASIL DAN PEMBAHASAN **12**
4.1 Dimensi Partisi Graf Kaki Seribu 12
4.2 Dimensi Partisi Graf Barbel Kaki Seribu 24
V KESIMPULAN DAN SARAN **32**
5.1 Kesimpulan 32
5.2 Saran 32
DAFTAR PUSTAKA **33**

DAFTAR GAMBAR

2.1 Contoh graf dengan 7 titik dan 10 sisi 3
2.2 Contoh graf lengkap 4
2.3 Graf dan komplemennya 5
2.4 Contoh graf hasil kali kartesian 5
2.5 Graf tangga L_4 5
2.6 Graf hasil operasi korona $L_2 \odot \overline{K_2}$ 6
2.7 Contoh graf kaki seribu $L_2 \odot \overline{K_2}$ 6
2.8 Contoh graf barbel kaki seribu $B_{L_2 \odot \overline{K_2}}$ 7
2.9 Contoh dimensi partisi graf G 8

4.1 Graf kaki seribu $L_2 \odot \overline{K_2}$ 13
4.2 Contoh partisi pembeda minimal dari $L_2 \odot \overline{K_2}$ 14
4.3 Graf kaki seribu $L_2 \odot \overline{K_3}$ 15
4.4 Contoh partisi pembeda minimal dari $L_2 \odot \overline{K_3}$ 16
4.5 Graf kaki seribu $L_3 \odot \overline{K_2}$ 18
4.6 Contoh partisi pembeda minimal dari $L_3 \odot \overline{K_2}$ 19
4.7 Graf kaki seribu $L_3 \odot \overline{K_3}$ 20
4.8 Contoh partisi pembeda minimal dari $L_3 \odot \overline{K_3}$ 22
4.9 Graf barbel kaki seribu $B_{L_2 \odot \overline{K_3}}$ 25
4.10 Contoh partisi pembeda minimal dari $B_{L_2 \odot \overline{K_3}}$ 26
4.11 Graf barbel kaki seribu $B_{L_2 \odot \overline{K_4}}$ 27
4.12 Contoh partisi pembeda minimal dari $B_{L_2 \odot \overline{K_4}}$ 28

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matematika adalah suatu bidang ilmu yang sangat menarik untuk diteliti karena dalam matematika ini terdapat beberapa cabang ilmu yang dapat mempermudah penyelesaian masalah sehari-hari, salah satunya yaitu teori graf. Graf merupakan salah satu bentuk model matematis yang dapat memberikan solusi untuk berbagai masalah spesifik. Saat ini, teori graf semakin maju dan menarik perhatian karena keunikan serta banyaknya aplikasi yang ada. Terdapat beberapa tema yang sering dibahas dalam teori graf ini, seperti pelabelan, pewarnaan, bilangan kromatik, dan dimensi partisi (Khairiah dkk., 2020).

Perkembangan teori graf kini semakin meluas, terutama dalam konteks dimensi partisi. Dimensi partisi mengacu pada jumlah minimum partisi dari himpunan titik dalam suatu graf sedemikian rupa sehingga setiap titik dalam graf dapat dibedakan satu sama lain berdasarkan representasi jaraknya terhadap setiap partisi. Harary & Melter (1976) kemudian memperkenalkan istilah himpunan pembeda untuk konsep yang sama. Untuk mendapatkan perspektif yang berbeda dalam menyelesaikan masalah penentuan dimensi metrik graf, Chartrand dkk (1998) memperkenalkan istilah baru yang kemudian dikenal sebagai dimensi partisi graf, yaitu nilai minimum k yang memungkinkan adanya partisi pembeda dari $V(G)$, yang dilambangkan dengan $pd(G)$.

Konsep dimensi partisi pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dkk. (1998), yang diperoleh dengan cara mengelompokkan semua simpul pada graf G ke dalam sejumlah kelas partisi. Selanjutnya menentukan jarak seluruh simpul terhadap setiap kelas partisi untuk mendapatkan representasi. Representasi yang memiliki vektor koordinat berbeda dan memiliki jumlah kardinalitas minimum merupakan dimensi partisi dari graf G.

Penelitian mengenai dimensi partisi graf ini semakin berkembang. Safriadi dkk. (2020) berhasil mendapatkan dimensi partisi graf multipartit lengkap. Hasmawati dkk. (2021) berhasil mendapatkan dimensi partisi graf kincir angin belanda. Penelitian oleh Ramdhani & Rahmi (2021) berhasil mendapatkan dimensi partisi graf lintasan. Nabila dkk. (2023) berhasil mendapatkan dimensi partisi hasil amalgamasi sisi pada graf siklus. Rumahorbo dkk. (2024) berhasil mendapatkan dimensi partisi graf payung.

Berdasarkan penelusuran literatur, belum ada penelitian tentang dimensi partisi pada graf kaki seribu. Oleh karena itu, dalam penelitian ini dikaji mengenai dimensi partisi pada graf kaki seribu dan graf barbel kaki seribu.

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan dimensi partisi dari graf kaki seribu $L_n \odot \overline{K_r}$ dan dimensi partisi graf barbel kaki seribu $B_{L_n \odot \overline{K_r}}$ dengan $n \geq 2$ dan $r \geq 2$.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

1. Memberikan pemahaman dan wawasan mengenai dimensi partisi dan barbelnya dari graf kaki seribu.

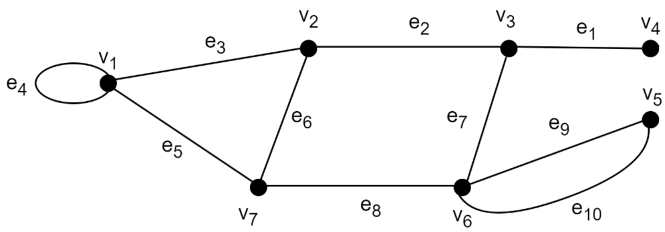
2. Sebagai referensi untuk penelitian lanjutan mengenai dimensi partisi dari operasi graf lainnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

Beberapa konsep dasar yang diterapkan dalam studi ini diambil dari (Deo,1989). Graf merupakan sekumpulan terurut $(V(G), E(G))$ dengan $(V(G)$ melambangkan kumpulan titik atau *vertex* dari G yang memiliki nilai tidak kosong, sementara $E(G)$ menunjukkan kumpulan sisi atau *edge* yang merupakan pasangan tidak terurut dari $V(G)$. Banyaknya titik pada $V(G)$ disebut orde dari graf G. Apabila titik v_1 dan v_2 terhubung oleh sisi e, maka titik v_1 dan v_2 menempel pada sisi e, dan dapat juga dikatakan bahwa sisi e menempel pada titik v_1 dan v_2, sehingga v_1 dan v_2 dianggap bertetangga satu sama lain.



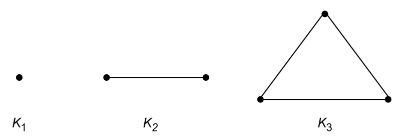
Gambar 2.1 Contoh graf dengan 7 titik dan 10 sisi

Pada Gambar 2.1 graf tersebut memiliki himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$. Titik yang bertetangga dengan titik v_6 adalah titik v_3, v_5 dan v_7. Sedangkan sisi yang menempel dengan titik v_6 adalah e_7, e_8, e_9 dan e_{10}. Derajat dari suatu titik v pada G adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik v yang dinotasikan dengan $d(v)$. Pada Gambar 2.1 $d(v_1) = 4$, $d(v_2) = 3$, $d(v_3) = 3$, $d(v_4) = 1$, $d(v_5) = 2$, $d(v_6) = 4$, $d(v_7) = 3$. *Pendant* adalah titik yang berderajat satu, pada Gambar 2.1 yang dikatakan sebagai *pendant* adalah v_4. Sisi $parallel$ adalah beberapa sisi yang memiliki dua titik ujung yang sama, $loop$ adalah sisi yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sisi $parallel$ pada Gambar 2.1 adalah e_9 dan e_{10} sedangkan e_4 merupakan $loop$. Graf yang tidak memiliki $loop$ dan sisi $parallel$ disebut graf sederhana, graf pada Gambar 2.1 bukan merupakan graf sederhana karena memiliki sisi $parallel$ dan $loop$.

Jalan $(walk)$ adalah barisan yang dimulai dari titik dan diakhiri oleh titik sehingga setiap sisi menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya. Lintasan merupakan jalan yang semua titiknya berbeda. Sebagai contoh, lintasan pada Gambar 2.1 ditunjukkan sebagai $v_4 - e_1 - v_3 - e_2 - v_2 - e_3 - v_1 - e_5 - v_7 - e_8 - v_6 - e_9 - v_5$. Sirkuit adalah lintasan yang dimulai dan diakhiri pada titik yang sama, yang sering dikenal sebagai lintasan tertutup. Terdapat dua jenis sirkuit, yaitu sirkuit genap dan ganjil. Sirkuit genap memiliki jumlah titik yang genap, sedangkan sirkuit ganjil memiliki jumlah titik yang ganjil. Sebagai contoh, sirkuit pada Gambar 2.1 dituliskan sebagai $v_2 - e_3 - v_1 - e_5 - v_7 - e_6 - v_2$.

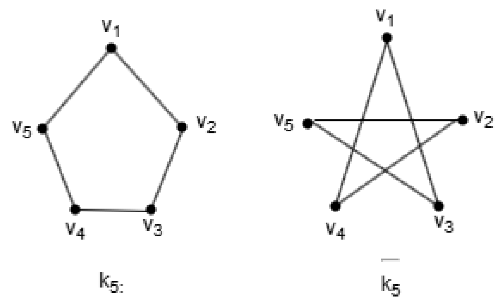
Suatu graf G disebut graf terhubung jika terdapat sekurang-kurangnya 1 lintasan untuk setiap pasangan titik berbeda di G. Dalam graf terhubung G, jarak (*distance*) antara dua titik yang berbeda v_i dan v_j dinotasikan dengan $d(v_i, v_j)$ yang merupakan panjang lintasan terpendek yang menghubungkan kedua titik dalam graf tersebut.

Graf $G(V, E)$ dikatakan graf lengkap jika untuk setiap pasangan titik v_i dan v_j di G terdapat sebuah sisi yang menghubungkannya. Tiap titik dalam graf lengkap selalu dihubungkan dengan titik lain melalui satu sisi, maka derajat tiap titik dalam sebuah graf lengkap G dengan n titik adalah $n - 1$. Suatu graf sederhana yang setiap titiknya bertetangga ($adjacent$) disebut graf lengkap. Graf lengkap dengan n titik dinotasikan dengan K_n (Fletcher dkk, 1991). Berikut diberikan contoh graf lengkap.



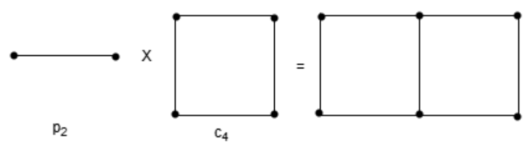
Gambar 2.2 Contoh graf lengkap

Komplemen dari graf G, yang dilambangkan dengan $\overline{G}$, merupakan graf dengan $V(\overline{G}) = V(G)$ dan uv merupakan sisi dalam $\overline{G}$ jika dan hanya jika sisi tersebut bukan sisi-sisi yang ada di G (Chartrand dan Oellermann, 1993). Berikut diberikan graf K_5 beserta komplemennya.



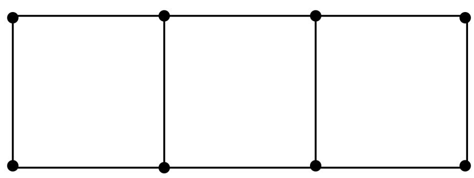
Gambar 2.3 Graf dan komplemennya

Misalkan G_1 dan G_2 merupakan 2 buah graf, hasil kali kartesian $G_1 \times G_2$ adalah graf yang himpunan titiknya $V(G_1) \times V(G_2)$ dan himpunan sisi dua titik u_1u_2 dan v_1v_2 bertetangga di $G_1 \times G_2$ jika dan hanya jika $u_1 = v_1$ dan $u_2v_2 \in E(G_2)$ atau $u_2 = v_2$ dan $u_1v_1 \in E(G_1)$ (Oellermann dan Peters, 2007). Berikut diberikan contoh graf hasil kali kartesian.



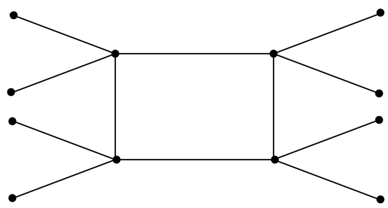
Gambar 2.4 Contoh graf hasil kali kartesian

Graf tangga (*ladder graph*), L_n, merupakan graf hasil kali kartesian dari graf lintasan P_n dan graf lintasan P_2. Graf tangga adalah bentuk khusus dari graf $P_n \times P_m$ dengan $m = 2$ (Asmiati, 2023). Berikut diberikan contoh graf L_4



Gambar 2.5 Graf tangga L_4

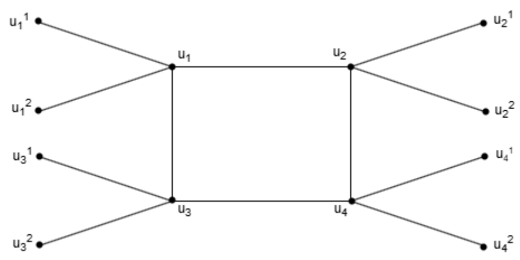
Operasi korona antara graf G dan graf H, yang dinotasikan dengan $G \odot H$ adalah graf yang diperoleh dari salinan graf H berdasarkan jumlah titik yang terdapat dalam graf G. Salinan graf H dinyatakan dengan H_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, |V(G)|$, dengan $|V(G)|$ menunjukkan banyaknya titik di G. Selanjutnya, setiap titik ke-i di $V(G)$ bertetangga dengan semua titik dalam H_i (Frucht& Harary., 1970). Diberikan contoh untuk operasi korona $L_2 \odot \overline{K_2}$.



Gambar 2.6 Graf hasil operasi korona $L_2 \odot \overline{K_2}$

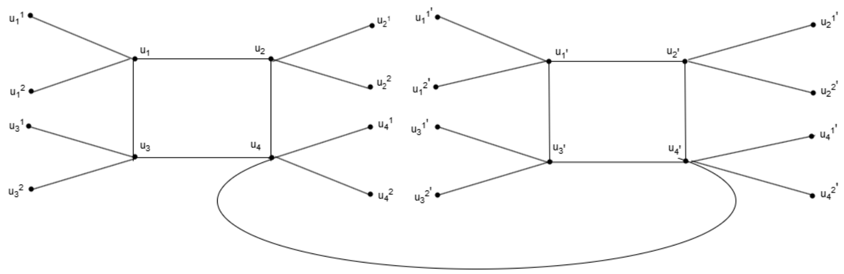
2.2 Graf Kaki Seribu dan Barbelnya

Graf kaki seribu $L_n \odot \overline{K_r}$ merupakan operasi hasil korona dari graf tangga L_n dengan komplemen graf lengkap $\overline{K_r}$ sehingga menghasilkan graf yang menyerupai kaki seribu. Graf kaki seribu merupakan graf tangga L_n dengan menambahkan sebanyak r lintasan yang memiliki panjang 1 pada setiap titik graf tangga. Graf kaki seribu dinotasikan dengan $L_n \odot \overline{K_r}$ (Nurvazly dkk., 2022). Pada graf ini, n menyatakan anak tangga yang membentuk bagian badan, dan r menyatakan derajat dari titik yang membentuk kaki. Misalkan himpunan titik dan sisi dari $(L_n \odot \overline{K_r})$ adalah $V(L_n \odot \overline{K_r}) = \{u_i \mid i = 1, 2, 3, \ldots, 2n\} \cup \{u_i^j \mid i = 1, 2, 3, \ldots, 2n, 1 \leq j \leq r\}$, $E(L_n \odot \overline{K_r}) = \{u_i u_{i+1} \mid i = 1, 3, 5, \ldots, 2n-1\} \cup \{u_i u_{i+2}; \mid i = 1, 3, 5, \ldots, 2n-3\} \cup \{u_i u_{i+2}; \mid i = 2, 4, 6, \ldots, 2n-2\} \cup \{u_i u_i^j \mid i = 1, 2, 3, \ldots, 2n, 1 \leq j \leq r\}$. Contoh graf kaki seribu $L_2 \odot \overline{K_2}$ ditunjukkan pada Gambar 2.7 sebagai berikut:



Gambar 2.7 Contoh graf kaki seribu $L_2 \odot \overline{K_2}$

Misalkan $B_{(L_n \odot \overline{K_r})}$ adalah graf barbel kaki seribu yang diperoleh dari salinan graf $L_n \odot \overline{K_r}$ dengan menghubungkan jembatan atau sisi di $u_{2n}u_{2n}\prime$. Misalkan himpunan titik dari $B_{L_n \odot \overline{K_r}}$ adalah
$V(L_n \odot \overline{K_r}) = \{u_i \mid i = 1, 2, 3, \ldots, 2n\} \cup \{u_i^r \mid i = 1, 2, 3, \ldots, 2n, 1 \leq j \leq r\} \cup \{u_i' \mid i = 1, 2, 3, \ldots, 2n\} \cup \{u_i^r\prime \mid i = 1, 2, 3, \ldots, 2n, 1 \leq j \leq r\}$
$E(L_n \odot \overline{K_r}) = \{u_iu_{i+1} \mid i = 1, 3, 5, \ldots, 2n-1\} \cup \{u_iu_{i+2} \mid i = 1, 3, 5, \ldots, 2n-1\} \cup \{u_iu_{i+2} \mid i = 2, 4, 6, \ldots, 2n-2\} \cup \{u_i'u_{i+1}' \mid i = 1, 3, 5, \ldots, 2n-3\} \cup \{u_i'u_{i+2}' \mid i = 1, 3, 5, \ldots, 2n-3\} \cup \{u_i'u_{i+2}' \mid i = 2, 4, 6, \ldots, 2n-2\} \cup \{u_i'u_i^j\prime \mid i = 1, 2, 3, \ldots, 2n, 1 \leq j \leq r\} \cup \{u_{2n}u_{2n}\prime\}$. Contoh graf barbel kaki seribu $B_{L_2 \odot \overline{K_2}}$ ditunjukkan pada Gambar 2.8 sebagai berikut:



Gambar 2.8 Contoh graf barbel kaki seribu $B_{L_2 \odot \overline{K_2}}$

2.3 Dimensi Partisi Graf

Untuk memahami konsep dimensi partisi, pertama-tama perlu diberikan pengertian dasar mengenai dimensi dan partisi. Dimensi diartikan sebagai jumlah koordinat minimum yang diperlukan untuk menentukan posisi titik-titik dalam suatu ruang atau objek, sedangkan partisi merupakan pengelompokan elemen dari himpunan dengan masing-masing kelompok memiliki anggota yang berbeda. Dimensi partisi adalah panjang jalur terpendek yang diperlukan antara titik dalam suatu graf terhadap partisi, sedangkan panjang jalur merujuk pada total jumlah sisi yang dilalui antara titik pada graf tersebut. Selanjutnya, akan dijelaskan definisi dimensi partisi pada graf, berbagai teorema yang berkaitan, serta beberapa contoh graf yang memiliki nilai dimensi partisinya.

Diberikan G graf terhubung. Jarak antara 2 titik u dan v di G, dinotasikan dengan $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v di G. Jarak dari titik v di G ke sebuah subhimpunan S dari titik G didefinisikan sebagai $\min\{d(v, x) \mid x \in S\}$, dan dinotasikan dengan $d(v, S)$. S adalah pembeda dua titik u dan v jika $d(u, S) \neq d(v, S)$.

Misalkan $G = (V, E)$ suatu graf, dengan $v \in V(G)$, dan $S \subset V(G)$. Jarak dari titik v ke himpunan S, dinotasikan dengan $d(v, S)$ adalah $\min\{d(v, x) \mid x \in S\}$ dengan $d(v, x)$ adalah jarak dari titik v ke x. Misalkan $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ adalah partisi dari $V(G)$ dengan $S_1, S_2, \ldots, S_k$ kelas-kelas dari Π. Representasi v terhadap Π, dinotasikan dengan $r(v \mid \Pi)$ adalah k-tupel terurut $(d(v, S_1), d(v, S_2), \ldots, d(v, S_k))$. Selanjutnya Π disebut partisi pembeda dari $V(G)$ jika $r(u \mid \Pi) \neq r(v \mid \Pi)$ untuk setiap dua titik berbeda $u, v \in V(G)$. Dimensi partisi dari G, dinotasikan $pd(G)$ adalah nilai k terkecil sehingga G mempunyai partisi pembeda dengan k kelas (Chartrand dkk., 1998). Misalkan partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, \ldots, S_k\}$ pada graf G. Titik $v \in V(G)$ disebut titik dominan jika representasi titik v_i mempunyai nilai 0 pada ordinat ke-i dan 1 untuk lainnya (Baskoro & Asmiati 2013).

Lemma 2.4.1 (Asmiati, 2023) Diberikan G graf terhubung dengan partisi pembeda Π dari $V(G)$ untuk $u, v \in G$, jika $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$ maka u dan v merupakan elemen yang berbeda dari Π.

Bukti.

Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, \ldots, S_k\}$ adalah himpunan terurut k- partisi dari $V(G)$ dengan k adalah bilangan asli yang dibatasi oleh jumlah titik di G dan misalkan u, v adalah elemen-elemen yang terdapat pada kelas Π yang sama. Jika diketahui $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$ maka akan ditunjuk
kan Π bukan suatu partisi pembeda dari $V(G)$. ■

Contoh 2.1: Berikut ini diberikan contoh graf G dan selanjutnya ditentukan dimensi partisi dari graf tersebut.

Gambar 2.9 Contoh dimensi partisi graf G

Graf G dipartisi sedemikian sehingga diperoleh $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, dengan $S_1 = \{v_2\ , v_3\ , v_7\}$, $S_2 = \{v_4, v_6\}$, $S_3 = \{v_1\ , v_5\}$ sehingga representasi dari graf G adalah:

$$r(v_1 \mid \Pi) = (1,1,0) \qquad r(v_5 \mid \Pi) = (2,2,0)$$
$$r(v_2 \mid \Pi) = (0,1,1) \qquad r(v_6 \mid \Pi) = (2,0,1)$$
$$r(v_3 \mid \Pi) = (0,2,2) \qquad r(v_7 \mid \Pi) = (0,2,1)$$
$$r(v_4 \mid \Pi) = (1,0,2)$$

Terlihat bahwa representasi dari setiap titik berbeda, maka Π adalah partisi pembeda dari graf G dan $pd(G) \leq 3$.

Untuk menunjukkan batas bawah $pd(G) \geq 3$, andaikan terdapat partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2\}$ dari G, dengan $S_1 = \{v_2\ , v_3\ , v_7\}$, $S_2 = \{v_1\ , v_4\ , v_5\ , v_6\}$. Maka representasi setiap simpul pada graf G sebagai berikut:

$$r(v_1 \mid \Pi) = (1,0) \qquad r(v_5 \mid \Pi) = (2,0)$$
$$r(v_2 \mid \Pi) = (0,1) \qquad r(v_6 \mid \Pi) = (2,0)$$
$$r(v_3 \mid \Pi) = (0,2) \qquad r(v_7 \mid \Pi) = (0,2)$$
$$r(v_4 \mid \Pi) = (1,0)$$

Terlihat bahwa terdapat titik yang memiliki representasi yang sama, yaitu $r(v_5 \mid \Pi)$ dan $r(v_6 \mid \Pi)$. Hal ini kontradiksi jadi, $pd(G) \geq 3$. Akibatnya $pd(G) = 3$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun ajaran 2024/2025 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini, langkah-langkah yang digunakan untuk menentukan dimensi partisi graf kaki seribu $L_n \odot \overline{K_r}$ sebagai berikut:

1. Menentukan dimensi partisi graf kaki seribu

   a. Mengonstruksi graf $L_n \odot \overline{K_r}$, $n \geq 2$, $r \geq 2$

   b. Menentukan batas bawah dimensi partisi dari garf kaki seribu $L_n \odot \overline{K_r}$, $n \geq 2$ dan $r \geq 2$.

   c. Menentukan batas atas dari $pd(L_n \odot \overline{K_r})$. Himpunan titik-titik pada graf $(L_n \odot \overline{K_r})$ dikelompokkan dalam kelas partisi pembeda. Minimum banyaknya partisi pembeda merupakan dimensi partisi dari graf kaki seribu $(L_n \odot \overline{K_r})$.

   d. Jika batas atas dimensi partisi graf kaki seribu $(L_n \odot \overline{K_r}) \leq x$ dan batas bawah dimensi partisi pada graf kaki seribu $(L_n \odot \overline{K_r}) \geq x$, maka diperoleh dimensi partisi graf kaki seribu $pd(L_n \odot \overline{K_r}) = x$.

   e. Menuliskan hasil yang didapatkan ke dalam pernyataan matematika.

   f. Membuktikan hasil yang telah diperoleh lalu menarik kesimpulan.

2. Menentukan dimensi partisi graf barbel kaki seribu

   a. Mengonstruksi graf $B_{L_n \odot \overline{K_r}}$, $n \geq 2, r \geq 2$

   b. Menentukan batas bawah dimensi partisi dari graf kaki seribu $B_{L_n \odot \overline{K_r}}$, $n \geq 2$ dan $r \geq 2$.

   c. Menentukan batas atas dimensi partisi dari graf kaki seribu $B_{L_n \odot \overline{K_r}}$. Setiap titik pada graf barbel kaki seribu $B_{L_n \odot \overline{K_r}}$ dikelompokkan ke dalam himpunan-himpunan partisi pembeda. Minimum banyaknya partisi merupakan dimensi partisi dari graf barbel kaki seribu $B_{L_n \odot \overline{K_r}}$.

   d. Jika batas atas dimensi partisi graf barbel kaki seribu $B_{L_n \circ \overline{K_r}} \leq x$ dan batas bawah dimensi partisi pada graf barbel kaki seribu $B_{L_n \circ \overline{K_r}} \geq x$, maka diperoleh dimensi partisi graf barbel kaki seribu adalah *pd*$(B_{L_n \odot \overline{K_r}}) = x$.

   e. Menuliskan hasil yang didapatkan ke dalam pernyataan matematika.

   f. Membuktikan hasil yang telah diperoleh lalu menarik kesimpulan.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari penelitian yang telah dilakukan untuk dimensi partisi pada graf kaki seribu $L_n \odot \overline{K_r}$ dan graf barbel kaki seribu $B_{(L_n \odot \overline{K_r})}$ diperoleh:

$$pd(L_2 \odot \overline{K_r}) = \begin{cases} r+1; & \text{untuk } r = 2,3 \\ r; & \text{untuk } r \geq 4 \end{cases}$$

$$pd(L_n \odot \overline{K_r}) = \begin{cases} 4; & \text{untuk } n \geq 3, r = 2,3 \\ r+1; & \text{untuk } n \geq 3, r \geq 4 \end{cases}$$

dan

$$pd(B_{L_2 \odot \overline{K_r}}) = \begin{cases} 4; & \text{untuk } r = 2,3 \\ r+1; & \text{untuk } 4 \leq r \leq 7 \\ r; & \text{untuk } r \geq 8 \end{cases}$$

$$pd(B_{L_n \odot \overline{K_r}}) = pd(L_n \odot \overline{K_r}) \text{ ; untuk } n \geq 3$$

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dikembangkan untuk mencari dimensi partisi graf operasi lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Asmiati. (2023). *Graf Edisi 2: Aplikasinya pada Lintasan Terpendek.* Matematika, Yogyakarta. (158 hlm).

Baskoro, E. T., & Asmiati (2013). Characterizing all trees with locatingchromatic number 3. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*. (1(2), 109-117).

Chartrand, G. & O.R., & Oellermann (1993). *Applied and algorithmic graph Theory*. McGraw-Hill Inc, New York. 395 hlm.

Chartrand, G., Salehi, E., & Zhang, P. (1998). On The Partition Dimension of a Graph. *Congressus Numer*. (130: 157-168).

Chartrand, G., Salehi, E., & Zhang, P. (2000).The Partition Dimension of a Graph. *Aequationes Math*. (59: 45-54).

Deo, N. (1989). *Graph Theory with Application to Engineering and Computer Science*. Prentince Hall of India Private Limited, New Delhi.

Fletcher, P., H. Hoyle & C.W. Patty (1991). *Foundation of Discrete Mathematics*. PWS Kent Publishing Company, Boston. 781 hlm.

Frucht, R & Harary, F. (1970). On the Corona of Two Graphs. *Aequationes mathematicae*. 4(3), 322-325.

Harary, F., & Melter, R. (1976). On the Metric Dimension of a Graph. $Ars\ Combin.$ (2: 191-195).

Hasmawati, Nurwahyu, B., Daming, A. S., Amir, A. K. (2021). Dimensi Partisi Graf Kincir Angin Belanda. *Jurnal Matematika, Statistika Komputasi*. (17(3): 472-483.)

Ihwan, M. D., & Rahmawati . (2014). Kajian bilangan Clique Grad Gear *Gn* dan Barbel *Bn*. *Gamatika*. (5(1)), 39-50.

Khairiah, A., Noviani, E., Fran, F. (2020). Dimensi Partisi pada Graf. *Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)*(9(1): 189-194.).

Nabila, A. D., Hermawati & Nur, M. (2023). Dimensi Partisi Hasil Amalgamasi-Sisi pada Graf Siklus. *Jurnal Matematika,Statistika dan Komputasi.* (20(1): 65-74).

Nurvazly, D. E., Chasanah, S. L., Wiranto, A. R. (2022). Variations of graceful labelling of subgraph of millipede graph. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2563, No. 1). AIP Publishing.

Oellermann, O.R, Peters-Fransen, J.(2007). The Strong Metrik Dimension of Graphs and Digraphs. *Discerete Appl. Math*. 155, 336-364.

Ramdhani, V., & Rahmi, F. (2021). The Partition Dimension of a Path Graph. *Sainstek: Jurnal Sains dan Teknologi*. (13(2): 66-72.).

Rumahorbo, Y. A., Suwilo, S., Mardiningsih, Nasution, P. K. (2024). Dimensi Partisi pada Graf Payung. *Journal of Mathematics Education and Science*. 9(2): 1-10.

Safriadi, Hamawati, & Haryanto, L. (2020). Dimensi Partisi Graf Multipartit Lengkap. *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi*. (16(3): 365-374).