DIMENSI PARTISI DAN BILANGAN KROMATIK LOKASI DARI GRAF HASIL OPERASI KORONA LINTASAN DENGAN SIKLUS SERTA ANALISIS KOMPUTASINYA

Tesis

Oleh

NUR HAMZAH
2327031005

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

Abstract

THE PARTITION DIMENSION AND THE LOCATION CHROMATIC NUMBER FOR CORONA OPERATION OF PATH WITH CYCLES AND ITS COMPUTATIONAL ANALYSIS

By

Nur Hamzah

The partition dimension of a graph is determined by minimum number of vertex partitions such that every vertex has different representation to the ordered partitions. This research discusses the partition dimension for the corona operation of path and cycle $(P_n \odot C_m)$. The results obtained are $pd(P_n \odot C_3) = 4$ for $n = 3, 4$ and 5 for $n \geq 5$. Furthermore, if $m = 4, 5$ then $pd(P_n \odot C_m) = 4$ for $n = 3$ and 5 for $n \geq 4$. This research also discusses the algorithm for determining the partition dimension and the locating chromatic number of $P_n \odot C_m$.

Keywords: *path graph, cycle graph, partition dimension, locating chromatic number, python.*

ABSTRAK

DIMENSI PARTISI DAN BILANGAN KROMATIK LOKASI DARI GRAF HASIL OPERASI KORONA LINTASAN DENGAN SIKLUS SERTA ANALISIS KOMPUTASINYA

Oleh

Nur Hamzah

Dimensi partisi pada suatu graf ditentukan dari minimum banyaknya partisi titik sedemikian sehingga setiap titik mempunyai representasi berbeda terhadap partisi terurutnya. Pada penelitian ini dibahas dimensi partisi dari hasil operasi korona graf lintasan dengan siklus $(P_n \odot C_m)$. Hasil yang diperoleh $pd(P_n \odot C_3) = 4$ untuk $n = 3, 4$ dan 5 untuk $n \geq 5$. Selanjutnya jika $m = 4, 5$ maka $pd(P_n \odot C_m) = 4$ untuk $n = 3$ dan 5 untuk $n \geq 4$. Pada penelitian ini juga dibahas algoritma penentuan dimensi partisi dan bilangan kromatik lokasi dari graf $P_n \odot C_m$.

Kata-kata kunci: *graf lintasan, graf siklus, dimensi partisi, bilangan kromatik lokasi, python.*

DIMENSI PARTISI DAN BILANGAN KROMATIK LOKASI DARI GRAF HASIL OPERASI KORONA LINTASAN DENGAN SIKLUS SERTA ANALISIS KOMPUTASINYA

NUR HAMZAH

Tesis

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
MAGISTER MATEMATIKA

pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

Judul Skripsi	:	**DIMENSI PARTISI DAN BILANGAN KROMATIK LOKASI DARI GRAF HASIL OPERASI KORONA LINTASAN DENGAN SIKLUS SERTA ANALISIS KOMPUTASINYA**
Nama Mahasiswa	:	***Nur Hamzah***
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2327031005**
Program Studi	:	**Magister Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dr. Asmiati, S.Si.,M.Si.
NIP 197604112000122001

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP 19740316 200501 1 001

2. Ketua Program Studi Magister Matematika

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.
NIP 198406272006042001

MENGESAHKAN

1. Tim penguji

Ketua : **Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **1. Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D.** ....

: **2. Dr. Muslim Ansori, M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

3. Direktur Program Pasca Sarjana

Prof. Dr. Ir. Murhadi, M.Si.
NIP. 196403261989021001

Tanggal Lulus Ujian Tesis: **20 Maret 2025**

PERNYATAAN TESIS MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Nur Hamzah**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2327031005**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul tesis	:	**DIMENSI PARTISI DAN BILANGAN KROMATIK LOKASI DARI GRAF HASIL OPERASI KORONA LINTASAN DENGAN SIKLUS SERTA ANALISIS KOMPUTASINYA**

Dengan ini menyatakan bahwa tesis ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa tesis ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 20 Maret 2025

Penulis,

Nur Hamzah

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Nur Hamzah. Penulis merupakan anak kedua dari tiga bersaudara yang lahir dari pasangan Ayah Abadi Abdullah Mudjid dan Ibu Suharti. Penulis lahir di Mesuji pada tanggal 12 September 2000.

Penulis menyelesaikan pendidikan formal di Sekolah Dasar di SD Negeri 1 Way Huwi pada tahun 2012, menyelesaikan pendidikan Sekolah Menengah Pertama di SMP Swasta Azzainiyyah Sukabumi-Jawa Barat pada tahun 2015, menyelesaikan Sekolah Menengah Atas di SMA Swasta Azzainiyyah Sukabumi-Jawa Barat pada tahun 2018. Selanjutnya, penulis menyelesaikan Sarjana Strata-1 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung pada tahun 2022. Pada tahun 2023, penulis melanjutkan pendidikan formal sebagai mahasiswa Program Magister di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.

Selain pendidikan formal penulis mengikuti pendidikan nonformal, diantaranya sebagai Santri Pondok Pesantren Azzainiyyah Sukabumi-Jawa Barat tahun 2012-2018, sebagai peserta Ruangguru CAMP 2022, peserta Fresh Graduate Academy (FGA) 2022, dan sebagai peserta Seams School 2024.

KATA INSPIRASI

"Maka sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan. Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan"

(QS. Al-Insyirah: 5-6)

إذ الفتى حسب اعتقاده رفع وكل من لم يعتقد لم ينتفع

(Nadzom Jurumiyyah Al-Imriti : 17)

"Dzikir, Fikir, Amal Saleh"

(Tri Motto PMII)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin,

Puji dan syukur kehadirat Allah Subhanahu Wata'ala atas limpahan nikmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad Shallallahu 'Alaihi Wasallam.

Dengan penuh syukur, kupersembahkan karya ini kepada:

Keluarga Tercinta

Terimakasih kepada keluargaku tercinta, Ayah Abadi Abdullah Mudjid, Ibu Suharti, Mbak Amelya Herda Losari, dan Adik Hilyah Aulia. Terimakasih untuk semua do'a, kasih sayang, dukungan dan semangat dalam segala hal serta nasehat yang diberikan.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat berjasa dalam membantu, memberikan masukan, arahan, serta ilmu yang berharga.

Sahabat – Sahabatku

Terimakasih kepada sahabat – sahabatku atas semua do'a, dukungan, semangat, serta canda tawa keceriaan selama masa perkuliahan ini.

Almamater Tercinta Universitas Lampung

SANWACANA

Bismillahirrahmanirrahim, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini yang berjudul ”Dimensi Partisi dan Bilangan Kromatik Lokasi dari Graf Hasil Operasi Korona Lintasan dengan Siklus serta Analisis Komputasinya” dengan baik. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing I serta Pembimbing Akademik yang telah memberikan bimbingan, arahan serta saran kepada penulis sehingga tesis ini dapat diselesaikan dengan baik.

2. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing II serta Ketua Jurusan Matematika yang telah memberikan arahan, bimbingan serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan tesis ini.

3. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D. selaku Penguji I yang telah memberikan masukan, saran serta evaluasi yang membangun kepada penulis selama proses penyusunan tesis ini.

4. Ibu Dr. Muslim Ansori, M.Si. selaku Penguji II yang telah memberikan arahan, bimbingan serta saran kepada penulis selama proses penyusunan tesis ini.

5. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Ketua Program Studi Magister Matematika yang telah memberikan motivasi dan bimbingan selama proses penyusunan tesis ini.

6. Seluruh dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Ayah, Ibu, Mbak, Adik dan keluarga besar yang selalu memotivasi, memberikan dukungan dan do’a kepada penulis.

8. Teman satu bimbingan, Wahyu Dwi Amansyah yang telah memberikan semangat, motivasi maupun saran kepada penulis.

9. Teman – teman Jurusan Magister Matematika angkatan 2023 yang sudah banyak membantu selama masa perkuliahan.

10. Sahabat – sahabat Pergerakan Mahasiswa Islam Indonesia Komisariat Universitas Lampung

11. Semua pihak yang membantu dalam proses penyusunan tesis ini yang tidak dapat penulis sebut satu persatu.

Semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa tesis ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan tesis ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 20 Maret 2025

Nur Hamzah

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

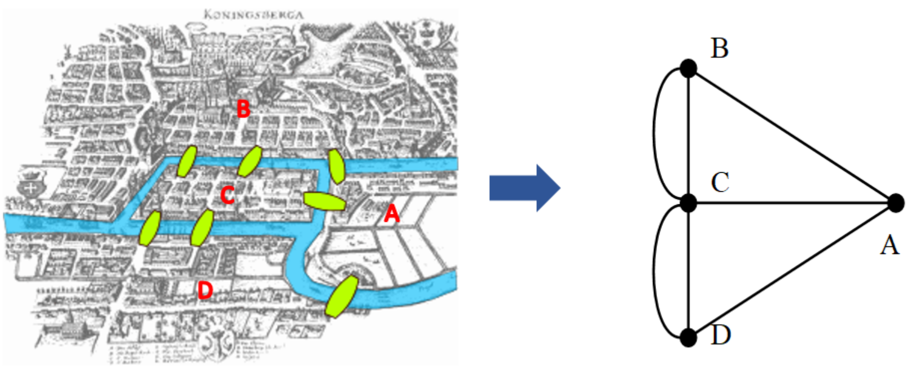
DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika diskrit yang mempelajari tentang himpunan titik dan sisi. Teori graf diperkenalkan pertama kali oleh *Leonardo Euler* seorang matematikawan asal Swiss yang hidup pada tahun 1707-1783. Euler menggunakan teori graf untuk menyelesaikan masalah Tujuh Jembatan *Königsberg (Seven Königsberg Bridges)* pada tahun 1736. Euler merepresentasikan daratan menjadi himpunan titik dan jembatan yang menghubungkan daratan direpresentasikan menjadi sisi.



Gambar 1.1 Jembatan *Königsberg* dan representasinya pada graf.

Penelitian tentang teori graf mengalami perkembangan yang signifikan dalam teori maupun aplikasinya. Diantara studi tentang graf ialah dimensi matrik yang dikaji oleh Harary F. dan Melter R.A. pada tahun 1976, kemudian konsep dimensi matrik dikembangkan menjadi dimensi partisi oleh Chartrand, dkk. (2000). Dimensi partisi didapatkan dengan membagi titik-titik pada suatu graf menjadi kelas-kelas partisi, kemudian dihitung representasi dari masing-masing titik terhadap semua kelas partisi yang dibentuk.

Chartrand, dkk. (2000) mempublikasi dimensi partisi untuk graf lintasan P_n, dan diperoleh $pd\left(P_n\right) = 2$, dimensi partisi untuk graf lengkap K_n, yaitu $pd\left(K_n\right) = n$. Asmiati pada tahun 2016 meneliti tentang dimensi partisi dari graf amalgamasi bintang yang dihubungkan oleh suatu lintasan, diperoleh $pd\left(nS_{m,k}\right)$, dimana $k \geq 1,\ m \geq 2$ adalah k untuk $1 \leq n \leq \left\lfloor \frac{k}{m-1} \right\rfloor$ dan $(k+1)$ untuk lainnya(Asmiati, 2016). Daming, dkk. (2020) memperoleh dimensi partisi untuk graf hasil amalgamasi siklus $pd(Amal\left(C_n\right)_m) = 3$ untuk $m = 2,\ 3$ dan $n \geq 3$. Empat tahun kemudian Daming, dkk. (2024) meneliti dimensi partisi hasil amalgamasi graf roda dengan graf bintang. Ramdhani & Rahmi (2021) mengkaji dimensi partisi pada graf lintasan. Penelitian terbaru oleh Nabila dkk. (2023) membahas dimensi partisi hasil amalgamasi sisi pada graf siklus.

Selanjutnya, perpaduan serta pengembangan dari dimensi matrik dan dimensi partisi menghasilkan bilangan kromatik lokasi pada graf yang dikaji dan diperkenalkan pertama kali oleh Chartrand, dkk. (2002).

Chartrand, dkk. (2002) telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf, diantaranya pada graf lengkap diperoleh $\chi_L\ (K_n) = n$, pada graf terhubung (G) diperoleh $3 \leq \chi_L(G) \leq n$ untuk orde $n \geq 3$, serta pada graf siklus diperoleh $\chi_L\ (C_n) = 3$ untuk n ganjil dan $\chi_L\ (C_n) = 4$ untuk n genap. Setahun kemudian Chartrand dkk. membuktikan bahwa bilangan kromatik lokasi graf G dengan orde *n* yang memuat graf multipartit lengkap berorde $(n - 1)$ sebagai subgraf induksinya, berada pada selang $\left[\frac{n+1}{2},\ n\right]$ dan juga graf-graf yang mempunyai bilangan kromatik lokasi dengan batas atasnya $(n - 2)$. Selanjutnya Chartrand, dkk. (2003) juga menunjukkan bahwa terdapat pohon berorde $n \geq 5$ dengan bilangan kromatik lokasi $k \in \{3, 4,\ \ldots\ ,\ n - 2,\ \}$.

Asmiati, dkk. (2019) membahas bilangan kromatik lokasi pada graf subdivisi barbell yang mengandung graf Petersen yang digeneralisasi. Studi lebih lanjut oleh Asmiati dkk. (2021) menemukan bilangan kromatik lokasi pada graf lintasan shadow barbell, menunjukkan batas atas dan batas bawah. Selain itu, penelitian oleh Ghanem, dkk. (2019) meneliti bilangan kromatik lokasi pada graf hasil operasi power untuk lintasan dan siklus. Tahun 2022, Sudarsana, dkk. mengkaji bilangan kromatik lokasi pada graf m-shadow yang terhubung. Penelitian lainnya, subdivisi graf friendship oleh Salindeho, dkk. (2020). Irawan, dkk. (2021), meneliti tentang bilangan kromatik lokasi pada graf origami, kemudian Irawan, dkk. (2022) menyajikan prosedur baru untuk menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf origami, menggunakan bahasa pemerograman Python. Di sisi lain, studi tentang graf split oleh Rahmatalia, dkk. (2022) dan Prawinasti, dkk. (2021) menunjukkan bagaimana variasi struktur graf dapat menghasilkan hasil yang berbeda dalam bilangan kromatik lokasinya.

Studi terbaru oleh Hamzah & Asmiati (2024) meneliti tentang bilangan kromatik lokasi hasil operasi korona pada graf lintasan dan siklus, operasi korona merupakan salah satu operasi pada graf yang diperkenalkan oleh Fucht dan Harary pada tahun 1970.

Menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf yang memiliki jumlah titik yang banyak memerlukan waktu yang cukup lama, selain itu belum adanya teorema untuk menentukan dimensi partisi sembarang graf sehingga untuk mendapatkan dimensi partisi pada kelas-kelas graf yang berbeda diperlukan penelitian lebih lanjut. Penelitian ini akan mengkaji dimensi partisi dan bilangan kromatik lokasi dari graf hasil operasi korona graf lintasan dengan siklus, penelitian ini juga mendiskusikan algoritma dimensi partisi dan bilangan kromatik lokasi dengan bantuan bahasa pemrograman Python.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Untuk mendapatkan dimensi partisi dari hasil operasi korona graf lintasan dengan graf siklus $P_n \odot C_m$.
2. Untuk mendapatkan bilangan kromatik lokasi dari hasil operasi korona graf

lintasan dengan graf siklus $P_n \odot C_m$.

3. Untuk mendapatkan algoritma dimensi partisi dan bilangan kromatik lokasi, kemudian diterapkan kepada graf hasil operasi korona graf lintasan dengan siklus.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini bagi pembaca diantaranya adalah:

1. Memberikan pemahaman tentang dimensi partisi dari hasil operasi korona graf lintasan dengan graf siklus $P_n \odot C_m$
2. Memberikan pemahaman tentang algoritma dimensi partisi serta penggunaaan algoritma tersebut dalam bahasa Python, khususnya dalam kasus bilangan kromatik lokasi hasil operasi korona graf lintasan dengan graf siklus $P_n \odot C_m$
3. Memberikan pemahaman tentang algoritma bilangan kromatik lokasi serta penggunaaan algoritma tersebut dalam bahasa Python, khususnya dalam kasus bilangan kromatik lokasi hasil operasi korona graf lintasan dengan graf siklus $P_n \odot C_m$
4. Sebagai referensi bagi penelitian selanjutnya tentang bilangan kromatik lokasi dan dimensi partisi pada graf.

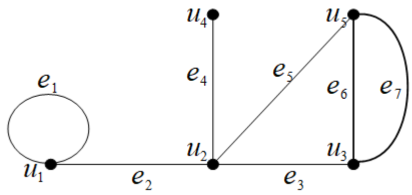
BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

Deo (1989) menjelaskan bahwa suatu graf $G = (V,\ E)$ adalah suatu himpunan yang terdiri dari himpunan $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ dengan $k = 1, 2, ...$ yang disebut titik dan himpunan $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ yang disebut sisi, sisi e_k dimana $k = 1,\ 2,\ 3, \ldots$ adalah pasangan tak terurut dari titik-titik (u, v), $u, v \in V$. Titik u dan v dikatakan bertetangga jika u dan v dihubungkan oleh sebuah sisi e, dan e disebut menempel dengan titik u dan v. Himpunan tetangga dari suatu titik v dinotasikan dengan $N(v)$ adalah himpunan yang memuat titik-titik yang bertetangga dengan v.

Banyaknya sisi yang menempel pada titik v disebut derajat titik v atau dinotasikan dengan $d(v)$. Sembarang titik v dikatakan titik terisolasi *(isolated vertex)* jika $d(v) = 0$, sedangkan titik v disebut daun (*pendant*) jika $d(v) = 1$. *Loop* adalah sisi yang memiliki titik ujung yang sama $e = (v, v)$, sedangkan sisi ganda (*multiple edge*) adalah graf yang memiliki beberapa sisi berbeda yang menempel pada pasangan titik yang sama. Suatu graf G dikatakan graf sederhana (*simple graph*) jika tidak terdapat *loop* dan sisi ganda. Jika terdapat lintasan untuk sebarang dua titik pada graf G , maka G disebut graf terhubung (*connected graph*).



Gambar 2.1 Contoh graf G dengan 5 titik dan 7 sisi.

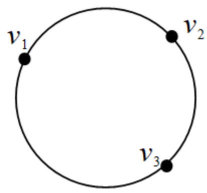
Gambar 2.1 adalah contoh graf dengan 5 titik, yaitu $V(G) = \{u_1, u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5\}$

dan 7 sisi, yaitu $E(G) = \{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ e_6, e_7\}$. Titik u_2 dan u_5 terhubung dengan satu sisi yaitu e_5, maka titik u_2 dan u_5 dikatakan bertetangga (*adjencent*), dan sisi e_5 dikatakan menempel dengan titik u_2 dan u_5. Himpunan tetangga dari titik u_5 adalah $N(u_5) = \{u_2, u_3\}$. Titik u_4 disebut daun (*pendant*) karena hanya memiliki tepat satu sisi, sedangakan sisi e_1 disebut $loop$ karena setiap ujung sisi menempel ketitik yang sama yaitu u_1. Sisi e_6 dan e_7 disebut sisi ganda karena memiliki ujung-ujung titik yang sama. Adapun derajat masing-masing titik adalah $d(u_1) = 3,\ d(u_2) = 4,\ d(u_3) = 3,\ d(u_4) = 1,\ d(u_5) = 3.$

Graf lintasan W adalah urutan dari titik dan sisi $W = v_0,\ e_1,\ v_1,\ e_2, \ldots\ e_i,\ v_i,$ $\ldots\ e_n\ v_n$ dimana $1 \leq i \leq n$. Lintasan dengan n titik disebut P_n. Titik v_0 adalah titik awal lintasan dan v_n adalah titik akhir lintasan. Di bawah ini merupakan graf lintasan dengan 4 titik (P_4).

Gambar 2.2 Graf lintasan P_4.

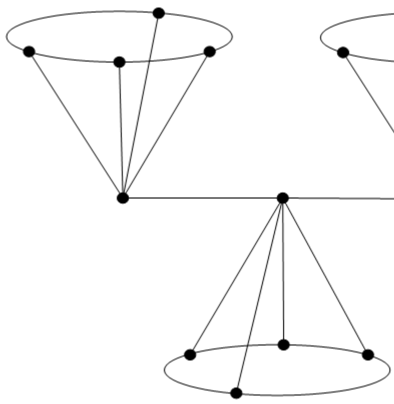
Graf siklus adalah graf lintasan dengan titik awal dan titik akhir sama. Dengan kata lain graf siklus adalah graf yang memiliki n titik yang setiap titik nya berderajat 2 dengan $n \geq 3$. Graf siklus dengan n titik disebut juga C_n. Berikut ini contoh graf siklus dengan 3 titik (C_3).



Gambar 2.3 Graf siklus C_3.

2.2 Operasi Korona pada Graf

Operasi korona pada graf diperkenalkan oleh Frucht dan Harary (1970). Operasi korona untuk sembarang dua graf G dan H dinotasikan dengan $G \odot H$ adalah graf yang diperoleh dari duplikat graf H sebanyak titik yang ada di graf G (duplikat graf H dinyatakan dengan H_i , $i = 1, 2, 3, \ldots , |V(G)|$) kemudian setiap titik ke-i di $V(G)$ bertetangga dengan setiap titik di H_i. Gambar dibawah ini adalah contoh dari $P_3 \odot C_4$.

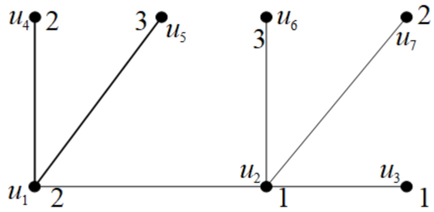


Gambar 2.4 Graf hasil operasi korona $P_3 \odot C_4$.

2.3 Dimensi Partisi pada Graf

Chartrand pada tahun 1998 mengembangkan dimensi matrik dari suatu graf menjadi himpunan kelas-kelas partisi dari graf tersebut, kemudian menghitung jarak dari setiap titik pada graf tersebut dengan himpunan partisi. Secara definisi misalkan graf $G = (V, E)$ adalah graf terhubung, titik-titik $u, v \in V(G)$, dan himpunan partisi $\Pi = S_1, S_2, \ldots, S_k \subseteq V(G)$ dimana $k = 1, 2, 3, \ldots$ dan $S_i \cap S_j = \emptyset$ untuk $i, j = 1, 2, 3, \ldots$ dan $i \neq j$, misalkan jarak antara v dan himpunan S_k dinotasikan oleh $d(v, S_k)$ dimana $d(v, S_k) = \min d(v, x)|x \in S_k$ adalah jarak dari titik v ke x. Representasi dari sembarang titik v terhadap Π didefinisikan dengan $r(v|\Pi) = \{d(v, S_1), d(v, S_2), \ldots, d(v, S_k)\}$. Urutan jarak titik v ke partisi S_k disebut ordinat ke-k. Jika $r(v|\Pi) \neq r(u|\Pi)$ untuk dua titik berbeda dari $V(G)$ maka Π disebut partisi pembeda. Dimensi partisi dari suatu graf adalah nilai k kelas partisi terkecil dari partisi pembeda Π.

Gambar 2.5 adalah graf G dengan 7 titik. Misalkan $V(G)$ dipartisi menjadi 2 partisi Π_1, maka akan terdapat representasi dua titik berbeda terhadap Π_1, yaitu $r(u|\Pi_1) =$



Gambar 2.5 Graf G dengan minimum partisi pembeda 3.

$r(v|\{Pi_1)$, maka Π_1 bukan partisi pembeda. Misalkan diberikan tiga partisi $\Pi_2 = S_1, S_2, S_3$ dimana $S_1 = u_2, u_3, S_2 = u_1, u_4, u_7, S_3 = u_5, u_6$. Setiap titik pada graf tersebut memiliki representasi terhadap Π_2 sebagai berikut:

$r(u_1|\Pi_2) = 1, 0, 1;$ $r(u_4|\Pi_2) = 2, 0, 2;$ $r(u_7|\Pi_2) = 1, 0, 2.$

$r(u_2|\Pi_2) = 0, 1, 1;$ $r(u_5|\Pi_2) = 2, 1, 0;$

$r(u_3|\Pi_2) = 0, 2, 2;$ $r(u_6|\Pi_2) = 1, 2, 0;$

Karena $r(v|\Pi_2) \neq r(u|\Pi_2)$, maka Π_2 adalah partisi pembeda, karena terdapat tiga partisi pada Π_2 dimana tiga adalah nilai minimum partisi pembeda pada graf G, maka $pd(G) = 3$.

Teorema 2.3.1 Misalkan C_n adalah graf siklus dengan n titik. Dimensi partisi dari C_n adalah 3.

2.4 Bilangan Kromatik Lokasi pada Graf

Chartand, dkk.,(2002), mendefinisikan bilangan kromatik lokasi sebagai berikut. Diberikan graf G, dan titik-titik u, $v \in V(G)$, dimana u dan v bertetangga. Misalkan suatu pewarnaan titik c untuk u dan v di G, dinotasikan dengan $c(u)$ dan $c(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$. Misalkan kelas warna Q_i adalah himpunan titik-titik yang di beri warna i, maka $\prod = \{Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_k\}$ adalah himpunan kelas warna dari $V(G)$. Kode warna $q_\Pi(u)$ dari u adalah $k-$pasang terurut $\{d(u, Q_1), d(u, Q_2), d(u, Q_3), \ldots, d(u, Q_k)\}$ dengan $d(u, Q_i) = \min\{d(u, x)|\, x \in Q_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Urutan jarak titik u ke partisi Q_k disebut ordinat ke-k. Pewarnaan c disebut pewarnaan lokasi dari G, Jika setiap titik di G

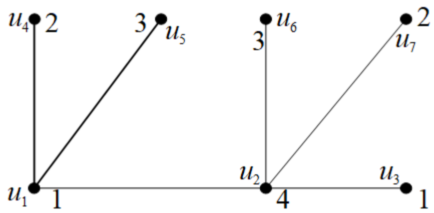
mempunyai kode warna yang berbeda. Jika k adalah minimum banyaknya kelas warna yang digunakan sehingga memenuhi pewarnaan lokasi di G, maka k disebut bilangan kromatik lokasi dari G, yang dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.

Teorema 2.4.1 (Chatrand, dkk., 2002) Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf G. Jika u dan v adalah dua titik yang berbeda di G sedemikian sehingga $d(u,\ w) \ = \ d(v,\ w)$ untuk semua $w \ \in \ V(G) - \ \{u,\ v\}$, maka $c(u) \neq \ c(v)$. Secara khusus, jika *u* dan v adalah titik – titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) \ = \ N(v)$, maka $c(u) \ \neq \ c(v)$.

Bukti. Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung dan misalkan $\prod \ = \ \{c_1\ ,\ c_2,\ \ldots\ ,\ c_k\}$ adalah partisi dari titik – titik G ke dalam kelas warna c_i. Untuk semua titik $u,\ v \in V(G)$, andaikan $c(u) \ = \ c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama, misal c_i dari Π. Akibatnya, $(u\ ,\ c_i) \ = \ d(v,\ c_i) \ = \ 0$. Karena $d(u,\ w) \ = \ d(v,\ w)$ untuk setiap $w \in V(G) \ - \ \{u,\ v\}$ maka $d(u\ ,\ c_i) \ = \ d(v,\ c_i)$ untuk setiap $j \ \neq \ i\ ,\ 1 \ \leq \ j \ \leq \ k$. Akibatnya $q_\Pi(u) \ = \ q_\Pi(v)$ sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Sehingga, $c(u) \ \neq \ c(v)$. ■

Akibat 2.4.2 Jika G adalah graf terhubung dengan suatu titik yang bertetangga dengan k daun, maka $\chi_L(G) \ \geq \ k \ + \ 1$.

Bukti. Misalkan v adalah suatu titik yang bertetangga dengan k daun, yaitu $x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_k$ di G. Berdasarkan Teorema 2.4.1, setiap pewarnaan lokasi dari G mempunyai warna yang berbeda untuk setiap x_i dimana $i \ = \ 1, 2,\ \ldots\ ,\ k$. Karena v bertetangga dengan semua x_i, maka v harus mempunyai warna yang berbeda dengan semua daun x_i. Akibatnya $\chi_L(G) \ \geq \ k \ + \ 1$. ■



Gambar 2.6 Graf G dengan bilangan kromatik lokasi 4.

Gambar 2.6 adalah graf G dengan 7 titik. Akan dicari bilangan kromatik lokasi pada graf G tersebut. Terlebih dahulu ditentukan batas bawah dari graf G, karena titik u_2 pada graf G memiliki jumlah daun terbanyak diantara titik lainnya, yaitu 3 daun, maka berdasarkan Akibat 2.4.2 $\chi_L(G) \geq 4$. Misalkan c adalah pewarnaan titik empat warna pada graf G sedemikian sehingga diperoleh kelas-kelas warna yaitu: $\Pi = \{Q_1,\ Q_2,\ Q_3, Q_4\}$ dimana $Q_1 = \{u_1,\ u_3\}$, $Q_2 = \{u_4, u_7\}$, $Q_3 = \{u_5,\ u_6\}$, dan $Q_4 = \{u_2\}$. Setiap titik pada graf tersebut memiliki kode warna sebagai berikut:

$$q_\Pi(u_1) = \{0,\ 1,\ 1,\ 1\};\ q_\Pi(u_4) = \{1,\ 0,\ 2,\ 2\};\ q_\Pi(u_7) = \{2,\ 0,\ 2,\ 1\};$$

$$q_\Pi(u_2) = \{1,\ 1,\ 1,\ 0\};\ q_\Pi(u_5) = \{1,\ 2,\ 0,\ 2\};$$

$$q_\Pi(u_3) = \{0,\ 2,\ 2,\ 1\};\ q_\Pi(u_6) = \{2,\ 2,\ 0,\ 1\}.$$

Karena kode warna pada setiap titik di graf G tersebut berbeda dan merupakan pewarnaan minimun maka $\chi_L(G) \leq 4$, sedemikian sehingga graf tersebut memiliki bilangan kromatik lokasi $\chi_L(G) = 4$.

Teorema 2.4.3 (Chartrand dkk., 2002)

Graf Siklus C_n misalkan $n \geq 3$, maka

$$\chi_L(C_n) = \begin{cases} 3\ , & untuk\ n\ ganjil \\ 4\ , & untuk\ n\ genap \end{cases}$$

Bukti. Dengan mempertimbangkan dua kasus

Kasus 1.

$n \geq 3$ adalah ganjil. Misal himpunan titik graf siklus $V(C_n) = \{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n\}$ ditetapkan warna 1 untuk v_1 diberi warna 1, warna 2 untuk v_i jika *i* adalah genap dan warna 3 untuk v_i jika $i \geq 3$ dan ganjil. Berdasarkan Akibat 2.1 perlu ditunjukkan bahwa ini adalah pewarnaan lokasi untuk membuktikan bahwa $\chi_L(C_n) = 3$. Pertimbangkan dua sub kasus berikut :

Subkasus 1.1

Jika $n \geq 4k + 1$, dimana $k \geq 1$. Untuk $1 \leq i \leq k$, $(v_{2i}) = (2i\text{–}1, 0, 1)$ dan untuk $k + 1 \leq i \leq 2k$, $c(v_{2i}) = (2k + 2\text{–}2i, 0, 1)$. Juga, untuk $1 \leq i \leq k$, $(v_{2i}) = (2i - 1, 1, 0)$ dan untuk $k + 1 \leq i \leq 2k$, $c(v_{2i}) = (2k + 2 - 2i, 0, 1)$. Karena vektor-vektor, $c(v_i)$ berbeda. Sehingga pewarnaan tersebut adalah pewarnaan lokasi, jadi $\chi_L(C_{4k+1}) = 3$.

Subkasus 1.2

$n = 4k + 3$, dimana $k \geq 0$. Membuktikan bahwa $\chi_L(C_{4k+3}) = 3$ dengan cara yang sama pada subkasus 1.1 .

Kasus 2

Jika $n \geq 4$ adalah genap. Misalkan kembali himpunan titik graf siklus $(C_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Diberi warna 1 untuk v_i ,warna 2 untuk v_i, warna 3 untuk v_i , jika $i \geq 3$, i ganjil, dan warna 4 untuk v_i jika $i \geq 4$ genap. Akan ditunjukkan bahwa pewarnaan lokasi dari C_n adalah $\chi_L (C_{4k}) = 4$.

Subkasus 2.1

Jika $n = 4k$, dimana $k \geq 1$ untuk $1 \leq i \leq k$, $q_\Pi(v_{2i}+1) = (2i, 2i - 1, 0, 1)$, dimana $k + 1 \leq i \leq 2k - 1$, $q_\Pi(v_{2i} + 1) = (4k - 2i, 4k - 2i + 1, 0, 1)$. Untuk $2 \leq i \leq k$, $q_\Pi(v_{2i}) = (2i - 1, 2i - 1, 1, 0)$, dimana $k + 1 \leq i \leq 2k$, $q_\Pi(v_{2i}) = (2k + 1\ 2i, 4k + 2 - 2i, 1, 0)$. Karena ordinat- ordinat dari $q_\Pi(v_i)$ berbeda, pewarnaan tersebut adalah pewarnaan lokasi.

Subkasus 2.2

Jika $n = 4k + 2$, dimana $k \geq 1$. Pembuktian bahwa pewarnaan tersebut adalah pewarnaan lokasi sama seperti sub kasus 2.1. Selanjutanya ini hanya perlu membuktikan bahwa $\chi_L(G) = 4$, jika n adalah genap. Asumsikan sebaliknya bahwa terdapat pewarnaan lokasi c dari C_n memerlukan 3 warna, misalkan 1, 2, 3, untuk $n \geq 4$. Setidaknya terdapat satu warna, misalkan 2 adalah warna bilangan genap t dari titik C_n, dimana $2 \leq t \leq n/2$. Seperti proses siklus pada C_n. Dimulai dengan 1 misalkan, $v_{i1},\ v_{i2},\ \ldots\ ,\ v_{in}$, titik-titik dari C_n bahwa berwarna 2. Karena tidak ada 2 titik yang bertetangga , termasuk untuk setiap bilangan bulat dengan $1 \leq j \leq$ t , interval $I_j = \{v_{ij+1},\ v_{ij+2},\ \ldots\ ,\ v_{ij+1} - 1\}$.

Pertama, akan ditunjukkan bahwa tidak ada interval yang memiliki kardinalitas ganjil untuk 3 atau lebih, untuk asumsi sebaliknya beberapa selang I_j memuat bilangan ganjil pada titik 3 atau lebih . Tanpa menghilangkan secara umum, Asumsikan bahwa v_{ij+1} dan $v_{ij+1} - 1$ diberi warna 1. Meskipun demikian, $q_\Pi(v_{ij} + 1) = q_\Pi(v_{ij+1} - 1) = (0, 1, 1)$ tetapi tidak mungkin.

Kedua, akan ditunjukkan bahwa tidak ada selang yang memuat bilangan genap pada titik-titiknya, untuk asumsikan sebaliknya, bahwa terdapat selang-selang yang memuat bilangan genap di titik –titiknya. Karena c_{2k} memilikisusunan genap, pasti terdapat bilangan genap dari selang yang memuat bilangan genap pada titik-titiknya. Misal I_j dan I_k menjadi 2 selang berbeda memuat bilangan genap dititiktitiknya. Asumsikan, tanpa kehilangan keumuman, bahwa $v_{ij} + 1$ diberi pewarnan 1. Tepat hanya 1 dari $v_{ik} + 1$ dan $v_{ik} - 1$ diberi warna 1, maka $q_\Pi(v_{ij} + 1) = q_\Pi(v_{ij+1} - 1) = (0, 1, 1)$ kontradiksi. Akibatnya, semua selang $t = n/2$ memuat tepat satu titik. Sehingga, terdapat bilangan bulat terkecil I_j $(1 \leq j \leq n/2)$, maka $v_{ik} + 1$ dan $v_{ik} - 1$ diberi warna yang berbeda, misalkan 1 dan 3, secara berturut-turut. Pentingnya, terdapat bilangan bulat $I_k > I_j$ bahwa $v_{ik} - 1$ diberi warna 3 dan $v_{ik} + 1$ diberi warna 1. Meskipun demikian $q_\Pi(v_{ij} + 1) = q_\Pi(v_{ij+1} - 1) = (0, 1, 1)$. Hasil akhir kontradiksi oleh karena itu $\chi_L(C_n) = 4$ jika n adalah genap. ■

Teorema 2.4.4 (Hamzah, dkk., 2024)

Bilangan kromatik lokasi hasil operasi korona $P_n \odot C_3$ adalah 5 untuk $3 \leq n < 7$, dan 6 untuk $n \geq 7$.

Bukti. Untuk membuktikan Teorema 2.3 akan dibagi menjadi dua kasus.

Kasus 1 : Diberikan graf hasil operasi korona $P_n \odot C_3$ dengan $3 \leq n < 7$. Akan dibuktikan batas bawah bilangan kromatik lokasi, karena pada graf $P_n \odot C_3$ terdapat graf C_3 berdasarkan Teorema 2.2 maka $\chi_L(P_n \odot C_3) \geq 3$. Misalkan pewarnaan titik c menggunakan 3 warna untuk graf hasil operasi korona $P_n \odot C_3$, jelas pewarnaan tersebut tidak memenuhi syarat pewarnaan titik karena akan terdapat kode warna yang sama pada titik yang bertetangga $c\left(u_i^k\right) = c\left(u_i^l\right)$ dengan $k \neq l$ atau $c\left(u_i^j\right) = c(v_i)$. Sehingga $\chi_L(P_n \odot C_3) \geq 4$ dengan $3 \leq n < 7$.

Misalkan pewarnaan titik c menggunakan 4 warna untuk graf hasil operasi korona $P_n \odot C_3$. Perhatikan bahwa $d(u_i^1, v) = d(u_i^3, v)$ dengan $v \notin \{u_i^1, u_i^3\}$. Akibatnya $c\left\{u_i^k\right\} = \{1, 2, 3, 4\} / \{v_i\}$. Jika menggunakan 4 warna maka akan terdapat $c(u_a^m) = c(u_b^n)$ dengan $i \neq b,\ m \neq n$ dan $q_\Pi(u_a^m) = q_\Pi(u_b^n)$, sehingga kontradiksi dengan syarat pewarnaan lokasi. Sehingga dibutuhkan sekurang-kurangnya 5 warna. Akibatnya $\chi_L(P_n \odot C_3) \geq 5$ dengan $3 \leq n < 7$.

Selanjutnya, misalkan batas atas $P_n \odot C_3$ adalah 5, sehingga menghasilkan 5 kelas-kelas warna yaitu $Q_1 = \{u_1^1,\ u_3^1\}$, $Q_2 = \{u_1^2,\ u_2^1,\ u_3^2\}$, $Q_3 = \{u_1^3,\ u_2^2\}$, $Q_4 = \{u_2^3,\ v_1,\ v_3\}$, $Q_5 = \{u_3^3,\ v_2\}$, Jelas bahwa $q_\Pi(u) \neq q_\Pi(v)$, yaitu kode warna untuk sembarang dua titik berbeda pada $P_n \odot C_3$ dengan $3 \leq n \leq 7$ adalah berbeda. Akibatnya $\chi_L(P_n \odot C_3) \leq 5$ dengan $3 \leq n \leq 7$. Karena diperoleh batas atas dan batas bawah sama maka $\chi_L(P_n \odot C_3) = 5$ untuk $3 \leq n < 7$.

Kasus 2 : Diberikan graf hasil operasi korona $P_n \odot C_3$ dengan $n \geq 7$. Akan ditentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi hasil operasi korona $P_n \odot C_3$ untuk $n \geq 7$. Misalkan c merupakan pewarnaan titik menggunakan 5 warna pada $P_n \odot C_3$ untuk $n \geq 7$ sedemikian sehingga akan terdapat $c(u_a^m) = c(u_b^n)$ dengan $a \neq b,\ m \neq n$ dan $q_\Pi(u_a^m) = q_\Pi(u_b^n)$, sehingga kontradiksi dengan syarat pewarnaan lokasi. Sehingga dibutuhkan sekurang-kurangnya 6 warna.

Misalkan c pewarnaan titik pada $P_n \odot C_3$ untuk $n \geq 7$ dengan menggunakan 6 warna sebagai berikut :

$$q_{\Pi}\left(u_i^j\right) = \begin{cases} 1 & , \quad untuk\ i = 1, 2, \ldots,\ n\ dan\ j = 1 \\ 2 & , \quad untuk\ i = 1, 2, \ldots,\ n\ dan\ j = 2 \\ 3 & , \quad untuk\ i = 1, 2, \ldots,\ n-1\ dan\ j = 3 \\ 6 & , \quad untuk\ i = n\ dan\ j = 3 \end{cases}$$

$$q_{\Pi}\left(v_i\right) = \begin{cases} 4 & , \quad untuk\ i\ ganjil \\ 5 & , \quad untuk\ i\ genap \end{cases}$$

Jelas bahwa $q_{\Pi}(u) \neq q_{\Pi}(v)$ untuk sembarang dua titik berbeda di $P_n \odot C_3$ dimana $n \geq 7$. Maka $\chi_L\left(P_n \odot C_3\right) = 6$ untuk $n \geq 7$. ■

Teorema 2.4.5 (Hamzah, dkk., 2024)

Bilangan kromatik lokasi hasil operasi korona $P_n \odot C_4$ adalah 5 untuk $3 \leq n < 6$, dan 6 untuk $n \geq 6$.

Bukti. Untuk membuktikan Teorema 2.3 akan dibagi menjadi dua kasus.

Kasus 1 : Diberikan graf hasil operasi korona $P_n \odot C_4$ dengan $3 \leq n < 6$. Akan dibuktikan batas bawah bilangan kromatik lokasi, karena graf $P_n \odot C_4$ memuat graf siklus dengan 4 titik berdasarkan Teorema 2.3 $\chi_L\left(P_n \odot C_4\right) \geq 4$, Misalkan pewarnaan titik c menggunakan 4 warna untuk graf hasil operasi korona $P_n \odot C_4$ untuk $n \geq 3$. Perhatikan bahwa $d\left(u_i^1, v\right) = d\left(u_i^4, v\right)$ dengan $v \notin \{u_i^1, u_i^4\}$. Akibatnya $c\left\{u_i^k\right\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\} / \{v_i\}$. Jika menggunakan 4 warna maka akan terdapat $c\left(u_a^m\right) = c\left(u_b^n\right)$ dengan $i \neq b,\ m \neq n$ dan $q_{\Pi}\left(u_a^m\right) = q_{\Pi}\left(u_b^n\right)$, sehingga kontradiksi dengan syarat pewarnaan lokasi. Sehingga dibutuhkan sekurang-kurangnya 5 warna. Akibatnya $\chi_L\left(P_n \odot C_4\right) \geq 5$. Selanjutnya, akan dicari batas atas $P_n \odot C_4$ dengan $3 \leq n < 6$. Misalkan c pewarnaan titik dengan 5 warna sedemikian sehingga diperoleh 5 kelas-kelas warna, maka $q_{\Pi}(u) \neq q_{\Pi}(v)$ untuk dua titik berbeda. Sehingga $\chi_L\left(P_n \odot C_4\right) = 5$ dengan $3 \leq n < 6$.

Kasus 2 : Diberikan graf hasil operasi korona $P_n \odot C_3$ dengan $n \geq 7$. akan dicari batas bawah dari $P_n \odot\ C_4$ untuk $n \geq 6$. Misalkan pewarnaan titik c menggunakan 5 warna untuk graf hasil operasi korona $P_n \odot\ C_4$ untuk $\geq\ 6$. Jika menggunakan 5 warna maka akan terdapat $c\left(u_a^m\right) = c\left(u_b^n\right)$ dengan $i \neq b,\ m \neq n$ dan $q_\Pi\left(u_a^m\right) = q_\Pi\left(u_b^n\right)$, sehingga kontradiksi. Sehingga dibutuhkan sekurang-kurangnya 6 warna. Akibatnya $\chi_L\left(P_n \odot\ C_4\right)\ \geq\ 6$ untuk $n\ \geq\ 6$. Selanjutnya akan dicari batas bawah $P_n \odot\ C_4$ dengan $n\ \geq\ 6$. Misalkan $P_n \odot\ C_4$ dengan $n\ \geq\ 6$ diberikan pewarnaan titik c dengan menggunakan 6 warna sebagai Berikut:

$$q_\Pi\left(u_i^j\right) = \begin{cases} 1 & ,\quad untuk\ i = 1\ dan\ j = 1 \\ 2 & ,\ untuk\ i = 1\ dan\ j = 2\ ; i =\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n\ dan\ j = 1 \\ 3 & ,\ untuk\ i = 1\ dan\ j = 3\ ; i = 2,\ 3,\ \ldots,\ n\ dan\ j = 2 \\ 4 & ,\ untuk\ i = 1\ dan\ j = 4\ ; i = 2,\ 3,\ \ldots,\ n\ dan\ j = 3 \\ 5 & ,\ untuk\ i \neq 1\ genap\ dan\ j = 4 \\ 6 & ,\ untuk\ i \neq 1\ ganjil\ dan\ j = 4 \end{cases}$$

$$c_\Pi\left(v_i\right) = \begin{cases} 5 & ,\quad untuk\ i\ ganjil \\ 6 & ,\quad untuk\ i\ genap \end{cases}$$

Maka, diperoleh 6 kelas-kelas partisi. Karena $q_\Pi(u) \neq q_\Pi(v)$ untuk setiap dua titik berbeda. Sehingga $\chi_L\left(P_n \odot\ C_4\right) = 5$ dengan $n \geq 6$. ■

2.5 Python

Python adalah bahasa pemrograman tingkat tinggi yang terkenal karena sintaksnya yang sederhana, mudah dipelajari, dan mendekati bahasa manusia. Python dirancang untuk mendukung berbagai paradigma pemrograman seperti pemrograman berorientasi objek, prosedural, dan fungsional. Python bersifat *open source*, sehingga dapat digunakan secara gratis dan memiliki komunitas besar yang terus mengembangkan pustaka dan framework untuk berbagai kebutuhan, mulai dari pengembangan web, data science, dan komputasi yang lebih kompleks (Halvorsen, 2020).

Python memiliki *library* yang terus berkembang sesuai dengan kebutuhan pemerograman, diantara modul yang sangat berguna untuk computing yang kompeks adalah *multiprocessing library.* Menurut Aziz, dkk. (2021) keuntungan menggunakan multiprocessing adalah:

1. Peningkatan *Throughput*: lebih banyak pekerjaan dapat diselesaikan dalam waktu yang sama dengan meningkatkan jumlah prosesor.
2. Menghemat biaya dengan berbagi memori, bus, dan periferal: dibandingkan dengan beberapa sistem tunggal, sistem multiprosesor menghemat sumber daya. Selain itu, jika banyak program berjalan pada data yang sama, lebih hemat menyimpan data tersebut pada satu disk yang dibagi oleh semua prosesor dalam sistem.
3. Meningkatkan keandalan: karena kemampuan dipusatkan pada banyak prosesor, keandalan sistem meningkat. Jika salah satu prosesor gagal, kecepatan sistem mungkin sedikit melambat, tetapi sistem akan tetap berfungsi secara normal.

2.6 Kompleksitas Algoritma

Kumalasari, [2017] menjelaskan bahwa algoritma merupakan sekumpulan perintah atau intruksi yang jelas untuk menyelesaikan suatu masalah. Suatu algoritma terdapat bagian-bagian yang dapat dianalisis yaitu kecepatan waktu, kapasitas biaya, kapistas ruang, dan lain-lain. Kompleksitas waktu biasa dinotasikan dengan $T(n)$ dimana n adalah banyak input dari suatu algoritma. Batas atas untuk kompleksitas waktu dinotasikan dengan $O(f(n))$. Notasi *Big-O* adalah fungsi asimtotik dari $f(n)$. Jika n dibuat semakin besar, waktu yang dibutuhkan tidak akan pernah melebihi suatu konstanta C dikali dengan $f(n)$. Berikut contoh perhitungan kompleksitas waktu dari algoritma *selection-sort* [Maulana, 2016].
Algoritma:
Pass traversal $[1..N-1]$

Min $\leftarrow$ Pass

i traversal [Pass $+ 1..N$]

if (Ti $<$ Tmin) then

min $\leftarrow$ i

Temp $\leftarrow$ TPass

TPass $\leftarrow$ Tmin

Tmin $\leftarrow$ Temp

T[1..Pass] terurut

Kompleksitas waktu diperoleh:

$T(n) = (n-1) + (n-2) + ... + 2 + 1 = (\frac{n(n-1)}{2}) = O(n^2)$

Sehingga, kompleksitasnya adalah $O(n^2)$

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan di Jurusan Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung pada semester ganjil tahun ajaran 2025/2026.

3.2 Tahapan Penelitian

Penelitian ini melalui tahapan-tahapan sebagai berikut:

1. Mencari dimensi partisi pada graf hasil operasi korona graf lintasan dan graf siklus $P_n \odot C_m$.
   (a) Membangun graf hasil operasi korona graf lintasan dan graf siklus $P_n \odot C_m$.
   (b) Menentukan batas bawah dari $pd\,(P_n \odot C_m)$ dengan pembuktian kontradiksi.
   (c) Menentukan batas atas dari $pd\,(P_n \odot C_m)$.
   (d) Jika batas bawah dan batas atas sama, maka diperoleh dimensi partisinya.
2. Penerapan algoritma dimensi partisi pada graf hasil operasi korona graf lintasan dan graf siklus $P_n \odot C_m$ dengan bantuan bahasa pemerograman Python.

(a) Menentukan algoritma untuk mengkontruksi graf hasil operasi korona graf lintasan dan graf siklus $P_n \odot C_m$.

(b) Membangun algoritma untuk *class* graf hasil operasi korona graf lintasan dan graf siklus $P_n \odot C_m$.

(c) Menentukan algoritma dimensi partisi.

(d) Membangun algoritma dimensi partisi menggunakan bahasa Python.

(e) Menerapkan algoritma dimensi partisi pada graf operasi korona graf lintasan dan graf siklus $P_n \odot C_m$.

(f) Evaluasi program.

3. Penerapan algoritma bilangan kromatik lokasi pada graf hasil operasi korona graf lintasan dan graf siklus $P_n \odot C_m$ dengan bantuan bahasa pemerograman Python.

(a) Menentukan algoritma untuk mengkontruksi graf hasil operasi korona graf lintasan dan graf siklus $P_n \odot C_m$.

(b) Membangun algoritma untuk *class* graf hasil operasi korona graf lintasan dan graf siklus $P_n \odot C_m$.

(c) Menentukan algoritma bilangan kromatik lokasi.

(d) Membangun algoritma bilangan kromatik lokasi menggunakan bahasa Python.

(e) Menerapkan algoritma bilangan kromatik lokasi pada graf operasi korona graf lintasan dan graf siklus $P_n \odot C_m$.

(f) Evaluasi program.

BAB V

SIMPULAN DAN SARAN

5.1 Simpulan

Dimensi partisi untuk graf hasil operasi korona graf lintasan dengan graf siklus $(P_n \odot C_m)$ adalah 4 untuk $n = 3, 4$ dan 5 untuk $n \geq 5$. Selanjutnya, untuk $m = 4, 5$ diperoleh $pd(P_n \odot C_m) = 4$ untuk $n = 3$ dan 5 untuk $n \geq 4$.

Algoritma dimensi partisi dan algoritma bilangan kromatik lokasi berhasil diterapkan untuk graf $P_n \odot C_m$. Kompleksitas algoritma dimensi partisi adalah $O(n^6)$, sedangkan kompleksitas algoritma bilangan kromatik lokasi adalah $O(n^8)$. Semakin banyak titik pada graf maka akan semakin lama waktu eksekusi program.

5.2 Saran

Pada penelitian ini penggunaan bahasa pemerograman Python memberikan kemudahan untuk memperoleh dimensi partisi dan bilangan kromatik lokasi graf hasil operasi korona graf lintasan dengan graf siklus, tetapi dalam proses *running* program masih terkendala minimnya spesifikasi komputer yang digunakan sehingga proses *running* kurang efisien. Penelitian dapat dilanjutkan dengan memodifikasi program sedemikan sehingga algoritma yang dihasilkan dapat lebih efisien dan cepat dalam menemukan bilangan kromatik lokasi.

DAFTAR PUSTAKA

Asmiati.(2016). On The Locating-Chromatic Numbers of Non Homogeneous Caterpillars and Firecracker Graphs. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. **100(8)**:1305- 1316.

Asmiati, Yana, I. S. G., & Yulianti, L. (2019). On the locating chromatic number of subdivision of barbell graphs containing generalized petersen graph. *International Journal of Computer Science and Network Security*, **19(7)**, 45-50.

Asmiati, Damayanti, M., & Yulianti, L., (2021). On the Locating Chromatic Number of Barbell Shadow Path Graphs. *IJC*,**5(2)**:82-93.

Aziz, Z.A., Abdulqader, D.N., Sallow, A.B., Omer, H.K., (2021). Python Parallel Processing and Multiprocessing: A Review. *Academic Journal of Nawroz University (AJNU),* **10(3)**.

Chartrand G, Salehi E, Zhang P. (2000). On the Partition Dimension of Graph. *Congr. Numer*. **130**:157-168.

Chartrand G, Erwin D, Henning MA, Slater PJ, Zhang P. (2002). The Locating-Chromatic Number of a Graph. *Bull. Inst. Combin. Appl.,* **36**,89-101.

Chartrand G, Erwin, Henning MA, Slater J, Zhang P. (2003). Graph of Order n with Locating-chromatic Number n-1. *Discrete Math*. **269**:65-79.

Deo, N. (1989). *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. Prentice Hall of India Private Limited, New Delhi.

Daming, A. S, Hasmawati, Haryanto, L., Nurwahyu, B., (2020). Dimensi Partisi Graf Hasil Amalgamasi Siklus. *JMSK: Jurnal Matematika, Statistikam & Komputasi*, **16(2)**.

Daming, A. S., & Yuliani. (2024). Dimensi partisi graf hasil amalgamasi sisi graf roda dengan graf bintang. Euler: *Jurnal Ilmiah Matematika, Sains, dan Teknologi*, **12(2)**, 139–144.

Frucht R. & Harary F., (1970). On the Corona of Two Graphs. *Aequationes mathematicae*. **4(3)**, pp.322-325.

Ghanem, M., Al-Ezeh, A., & Dabour, A. (2019). Locating chromatic number of powers of path and cycles. *Symmetry*, **11(389)**, 2-6.

Harary F & Melter RA. (1976). On the Metric Dimension of a Graph. *Ars Combinatori*. **2**,191-195.

Halvorsen, H.P., (2020). *Python Programing*. https://www.halvorsen.blog/documents/programming/python/.

Hamzah, N., Asmiati, Amansyah, W.D. (2024). Locating-chromatic number for corona operation of path graph and cycle graph. *Indonesian Journal of Combinatorics*, **8(2)**, 127-135.

Irawan, A., Asmiati, Zakaria, L., & Muludi, K. (2021). The locating-chromatic number of origami graphs. *Algorithms*, **14(6)**, 1-15.

Irawan, A., Asmiati, Utami, B.H.S., Nuryaman, A., & Muludi, K. (2022). A procedure for determining the locating chromatic number of an origami graph. *IJCSNS*, **22(9)**.

Kumalasari, D. (2017). Analisa Perbandingan Kompleksitas Algoritma Bubble Sort, Cocktail Sort Dan Comb Sort Dengan Bahasa Pemrograman C++. *Journal Speed – Sentra Penelitian Engineering dan Edukasi*, **9(2)**, 1-7.

Khairiah, A., Noviani, E., & Fran, F. (2020). Dimensi partisi pada graf. *Buletin Ilmiah Matematika, Statistika, dan Terapannya (BIMASTER)*, **9(1)**, 189-194.

Maulana, R. (2016). Analisa Perbandingan Kompleksitas Algoritma SELECTIONSORT dan INSERTIONSORT. *INFORMATIKA*, **3**, 208-218.

Nabila, A. D., Hasmawati, & Nur, M. (2023). Dimensi partisi hasil amalgamasi sisi pada graf siklus. *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputer*, **20(1)**, 65-74.

Prawinasti, K., Ansori, M., Asmiati, Notiragayu, & Rofi, A. R. G. N. (2021). The locating chromatic number for split graph of cycle. *Journal of Physics: Conference Series, IOP Publishing Ltd.*

Rahmatalia, S., Asmiati, & Notiragayu. (2022). Bilangan kromatik lokasi graf split lintasan. *Jurnal Matematika Integratif*, **18(1)**, 73-80. doi: 10.24198/jmi.v18.n1.36091.73-80.

Ramdhani, V., & Rahmi, F. (2021). The partition dimension of a path graph. *Sainstek: Jurnal Sains dan Teknologi*, **13(2)**, 66-72.

Salindeho, B. M., Assiyatun, H., & Baskoro, E. T. (2020). On the locating-chromatic number of subdivisions of friendship graph. *JIMS: Journal of the Indonesian Mathematical Society*, **26(2)**.

Sudarsana, I. W., Susanto, F., & Musdalifah, S. (2022). The locating chromatic number for m-shadow of a connected graph. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, **10(2)**, 589-601.