DERIVATIF FUNGSI-FUNGSI BERNILAI BARISAN l_q PADA INTERVAL $0 < q < 1$

Skripsi

Oleh

ANWAR
NPM. 2117031040

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

ABSTRACT

DERIVATIVES OF FUNCTIONS WITH VALUES IN l_q SEQUENCE ON INTERVAL $0 < q < 1$

By

Anwar

A sequence is a function whose domain is the set of positive integers. A space that contains a sequence is called a sequence space. One of the sequence spaces is the lq sequence which consists of convergent sequence that satisfy certain norm criteria, defined as $\|x\|_q = \left\{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^q\right\}^{\frac{1}{q}}$ with $0 < q < 1$. This study shows the elementary properties of derivatives of functions with values in l_q sequence on the interval $0 < q < 1$. This also shows maxima and minima criteria of functions with values in l_q sequence on the interval $0 < q < 1$.

Keywords : Function, Limit, Derivative, Sequence, Function Sequence, l_q Sequence.

ABSTRAK

DERIVATIF FUNGSI-FUNGSI BERNILAI BARISAN l_q PADA INTERVAL $0 < q < 1$

Oleh

Anwar

Barisan adalah suatu fungsi yang domainnya adalah himpunan bilangan bulat positif. Ruang yang beranggotakan barisan disebut ruang barisan. Salah satu ruang barisan yaitu barisan lq yang terdiri dari barisan konvergen yang memenuhi kriteria norma tertentu, yang didefinisikan sebagai $\|x\|_q = \left\{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^q\right\}^{\frac{1}{q}}$ dengan $0 < q < 1$. Penelitian ini menunjukkan sifat-sifat dasar derivatif fungsi-fungsi bernilai barisan l_q pada interval $0 < q < 1$. Selain itu, penelitian ini juga menunjukkan kriteria maksimal dan minimal fungsi-fungsi bernilai barisan l_q pada interval $0 < q < 1$.

Kata Kunci : Fungsi, Limit, Turunan, Barisan, Barisan Fungsi, Barisan l_q.

DERIVATIF FUNGSI-FUNGSI BERNILAI BARISAN l_q PADA INTERVAL $0 < q < 1$

Oleh

ANWAR

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025

Judul Skripsi	:	**DERIVATIF FUNGSI-FUNGSI BERNILAI BARISAN l_q PADA INTERVAL $0 < q < 1$**
Nama Mahasiswa	:	Anwar
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2117031040**
Program Studi	:	**Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.	**Siti Laelatul Chasanah, M.Si.**
NIP. 197202271998021001	NIP. 199306012019032021

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** .....

Sekretaris : **Siti Laelatul Chasanah, M.Si.** .....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.** .....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **12 Juni 2025**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Anwar**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2117031040**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**DERIVATIF FUNGSI-FUNGSI BERNILAI BARISAN l_q PADA INTERVAL $0 < q < 1$**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 12 Juni 2025

Penulis,

Anwar

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Anwar yang lahir di Jakarta pada tanggal 07 September 2002. Penulis menyelesaikan pendidikan di Madrasah Ibtidaiyah Negeri pada tahun 2015 di MIN 6 Bandar Lampung. Kemudian, menyelesaikan pendidikan sekolah menengah pertama di SMP Negeri 2 Bandar Lampung pada tahun 2018, dan menyelesaikan pendidikan sekolah menengah atas di SMA Negeri 13 Bandar Lampung pada tahun 2021.

Pada tahun 2021 penulis diterima sebagai mahasiswa S1 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui penerimaan Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN). Selama menempuh pendidikan, penulis menyelesaikan Praktik Kerja Lapangan (PKL) di Komisi Pemilihan Umum Kota Bandar Lampung. Sebagai wujud nyata dan implementasi ilmu yang telah diperoleh selama perkuliahan, penulis turut serta dalam kegiatan Kuliah Kerja Nyata (KKN) Universitas Lampung tahun 2024 di Desa Sindang Anom, Kecamatan Sekampung Udik, Kabupaten Lampung Timur.

KATA INSPIRASI

“Sesunguhnya bersama kesulitan ada kemudahan”

(Q.S. Al-Insyirah : 6)

“Investasi dalam pengetahuan adalah hal terpenting”

(Benjamin Franklin)

“Jadilah orang yang kuat, tetapi tidak kasar. Bersikaplah baik, tetapi jangan lemah. Bersikaplah rendah hati, tetapi tidak menjadi pemalu”

(Thomas Robert Malthus)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap Alhamdulillah dan syukur kepada Allah swt atas nikmat serta hidayah-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Ayah dan Ibuku Tercinta

Terimakasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini. Terimakasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta
Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah swt atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Derivatif Fungsi-Fungsi Bernilai Barisan lq pada Interval $0 < q < 1$" dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad saw.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat selesai. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing 1 yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

2. Ibu Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

3. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Penguji yang bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.

4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

5. Bapak Ir. Warsono, PH.D., M.S., Ph.D. selaku dosen pembimbing akademik.

6. Seluruh dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Kedua orang tua yang selalu memberikan motivasi dan dukungan.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 12 Juni 2025

Anwar

DAFTAR ISI

Halaman

I PENDAHULUAN 1

1.1 Latar Belakang Masalah 1

1.2 Tujuan Penelitian 2

1.3 Manfaat Penelitian 2

II TINJAUAN PUSTAKA 3

2.1 Fungsi 3

2.2 Limit 10

2.3 Turunan 16

2.4 Barisan 20

2.5 Deret 22

2.6 Barisan l_q pada Interval $0 < q < 1$ 23

2.7 Ruang Barisan 24

2.8 Ruang Vektor 25

2.9 Ruang Bernorm 29

III METODE PENELITIAN 31

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian 31

3.2 Tahapan Penelitian 31

IV HASIL DAN PEMBAHASAN 32

4.1 Limit pada Barisan 32

4.2 Barisan Fungsi 41

4.3 Derivatif Fungsi-Fungsi Bernilai Barisan l_q pada Interval $0 < q < 1$ 47

4.4 Sifat-Sifat Dasar Derivatif Fungsi-Fungsi Bernilai Barisan l_q pada Interval $0 < q < 1$ 48

4.5 Maksimal dan Minimal Fungsi-Fungsi Bernilai Barisan l_q pada Interval $0 < q < 1$ 60

V KESIMPULAN DAN SARAN 63

5.1 Kesimpulan 63

5.2 Saran 64

DAFTAR PUSTAKA 65

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Barisan adalah suatu fungsi yang domainnya adalah himpunan bilangan bulat positif. Misal terdapat bilangan bulat positif 1 , 2 , 3 , ..., n , ... yang bersesuaian dengan bilangan real x_n tertentu, maka $x_1,\ x_2$, ..., x_n , ... dikatakan barisan (Mizrahi & Sulivan, 1982). Suatu fungsi f merupakan suatu aturan korespondensi (padanan) yang menghubungkan setiap obyek a pada suatu himpunan, disebut daerah asal, dengan suatu nilai tunggal $f(a)$ dari suatu himpunan kedua. Himpunan nilai yang akan diperoleh secara demikian disebut daerah hasil fungsi. Untuk memberi nama fungsi dipakai suatu huruf tunggal seperti f (atau g atau F), $f(a)$, yang dibaca "f dari a" atau "f pada a", menunjukkan nilai yang diberikan f terhadap a (Purcel dkk., 2007). Salah satu ilmu matematika yang termasuk dalam cabang ilmu analisis adalah derivatif.

Proses pada derivatif suatu fungsi disebut diferensiasi sedangkan fungsi yang dapat di derivatifkan disebut *differentiable*. Seiring perkembangan ilmu matematika, konsep derivatif telah diperluas dari fungsi-fungsi bernilai riil ke berbagai jenis fungsi lainnya, termasuk fungsi bernilai vektor dan fungsi bernilai barisan.

Terdapat penelitian yang mengkaji tentang derivatif. Asyhar (2014) mengenai aplikasi derivatif dalam masalah analisis keuntungan maksimum. Penelitian lainnya dilakukan oleh Kusuma & Yunianti (2017) tentang sifat-sifat derivatif mutlak fungsi pada ruang metrik. Penelitian serupa juga dilakukan oleh Nurwahidah & Mariani (2021) tentang derivatif sebuah pendekatan matematis dalam analisis keuntungan maksimum. Penelitian lain dilakukan oleh Janan & Janan (2024) tentang derivatif fraksional dari fungsi hiperbolik. Penelitian lainnya juga dilakukan oleh Fadilla (2024) tentang derivatif fungsi hiperbolik.

Berdasarkan penelitian sebelumnya, belum ada peneliti yang mengkaji tentang derivatif fungsi-fungsi bernilai barisan l_q pada interval $0 < q < 1$. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk meneliti tentang derivatif fungsi-fungsi bernilai barisan l_q pada interval $0 < q < 1$.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penulisan proposal ini adalah :

1. Mendefinisikan derivatif fungsi-fungsi bernilai barisan l_q pada interval $0 < q < 1$.
2. Menyelidiki sifat-sifat dasar derivatif fungsi-fungsi bernilai barisan l_q pada interval $0 < q < 1$.
3. Mendefinisikan maksimal dan minimal fungsi bernilai barisan l_q pada interval $0 < q < 1$.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penulisan proposal sebagai berikut :

1. Menambah pengetahuan mahasiswa tentang konsep derivatif fungsi-fungsi bernilai barisan l_q pada interval $0 < q < 1$.
2. Memahami konsep dan sifat-sifat derivatif dalam fungsi bernilai barisan l_q pada interval $0 < q < 1$.
3. Memberikan informasi tentang maksimal dan minimal fungsi bernilai barisan l_q pada interval $0 < q < 1$.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Fungsi

Berikut diberikan penjelasan mengenai definisi, teorema, dan contoh fungsi.

Definisi 2.1.1

Suatu fungsi f merupakan suatu aturan korespondensi yang menghubungkan setiap obyek a pada suatu himpunan, yang disebut daerah asal, dengan suatu nilai tunggal $f(a)$ dari suatu himpunan kedua. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut daerah hasil fungsi. Untuk memberi nama fungsi dipakai suatu huruf tunggal seperti f (atau g atau F), $f(a)$, yang dibaca "f dari a" atau "f pada a", menunjukkan nilai yang diberikan f terhadap a (Purcel dkk., 2007).

Contoh 2.1.1

Misalkan $f(x) = x^2 - 2x$, maka

$$f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 = 16 - 8 = 8.$$

Definisi 2.1.2

Diberikan f sebuah fungsi dari himpunan C ke himpunan D ($f : C \to D$). Fungsi ini disebut fungsi surjektif jika dan hanya jika $\forall\, z \in D\ \exists\, y \in C$ sehingga $f(y) = z$ (Darwanto dkk., 2020).

Contoh 2.1.2

Diketahui fungsi $f : R \to R$ yang didefinisikan dengan rumus $f(x) = x - 1$. Perhatikan bahwa, untuk setiap $y \in R$, terdapat $x = y + 1$, $x \in R$ sedemikian hingga $f(x) = f(y + 1) = (y + 1) - 1 = y + 1 - 1 = y$. Sehingga f merupakan fungsi surjektif.

Definisi 2.1.3

Fungsi $f : A \to B$ disebut fungsi satu-satu (injektif), apabila setiap dua elemen yang berlainan di A akan dipetakan pada dua elemen yang berbeda di B. Selanjutnya secara singkat dapat dikatakan bahwa $f : A \to B$ adalah fungsi injektif apabila $a \neq b$ berakibat $f(a) \neq f(b)$ Pernyataan ini ekuivalen, jika $f(a) = f(b)$ maka akibatnya $a = b$ (Darwanto dkk., 2020).

Contoh 2.1.3

Misalkan fungsi $f : R \to R$ yang didefinisikan $f(c) = c - 1$. Ambil sebarang $c_1 \neq c_2$. Maka $f(c_1) = c_1 - 1 \neq c_2 - 1 = f(c_2)$. Dengan demikian untuk $c_1 \neq c_2$ maka $f(c_1) \neq f(c_2)$. Sehingga f merupakan fungsi injektif.

Definisi 2.1.4

Fungsi f dikatakan sebagai fungsi bijektif jika fungsi tersebut adalah fungsi surjektif dan juga fungsi injektif (Darwanto dkk., 2020).

Contoh 2.1.4

Diketahui fungsi $f : R \to R$ yang didefinisikan dengan rumus $f(x) = x - 1$. Telah dibuktikan bahwa f merupakan fungsi injektif dan surjektif. Dengan demikian f merupakan fungsi bijektif.

Definisi 2.1.5

Misalkan a adalah anggota himpunan A dan b adalah anggota himpunan B, maka $f^{-1}(b) = a$ jika $f(a) = b$ (Darwanto dkk., 2020).

Contoh 2.1.5

Diketahui $f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu. Invers fungsi f adalah $f^{-1} = \{(u, 1), (w, 2), (v, 3)\}$.

Definisi 2.1.6

Misalkan g adalah suatu fungsi dari himpunan K ke himpunan L dan f adalah fungsi dari himpunan L ke himpunan M. Komposisi f dan g, dinotasikan dengan $f \circ g$ didefinisikan oleh $(f \circ g)(a) = f(g(a))$ (Darwanto dkk., 2020).

Contoh 2.1.6

Diberikan fungsi $f(b) = b - 1$ dan $g(b) = b^2 + 1$. Maka

$$(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(b^2 + 1) = b^2 + 1 - 1 = b^2.$$

Definisi 2.1.7

Misalkan f terdefinisi pada suatu interval terbuka yang mengandung c. Dikatakan bahwa f kontinu di c jika

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

(Purcel dkk., 2007).

Definisi 2.1.8

Pertidaksamaan adalah sebuah bentuk pernyataan matematika yang mengandung satu peubah atau lebih yang dihubungkan dengan tanda $<, >, \leq, \geq$. Tanda $<$ dibaca kurang dari, tanda $>$ dibaca lebih dari, tanda $\leq$ dibaca kurang dari sama dengan, dan tanda $\geq$ dibaca lebih dari sama dengan (Rifa'i, 2019).

Definisi 2.1.9

Jika terdapat dua fungsi $f(x)$ dan $g(x)$, maka pertidaksamaan fungsi dapat dituliskan dalam bentuk

a. $f(x) < g(x)$;
b. $f(x) > g(x)$;
c. $f(x) \leq g(x)$;
d. $f(x) \geq g(x)$

(Jumaidi & Fauzi, 2020).

Teorema 2.1.1

Untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ berlaku

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Bukti :

Perhatikan Untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\begin{aligned} |a + b|^2 = (a + b)^2 &= |a|^2 + 2ab + |b|^2 \\ &\leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2. \end{aligned}$$

Karena itu, diperoleh

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

(Gunawan, 2023).

Definisi 2.1.10

Fungsi f dikatakan kontinu pada interval tertutup $I = [k, l]$ jika dan hanya jika f kontinu di setiap titik $c \in (k, l)$, kontinu kanan di k, dan kontinu kiri di l (Gunawan, 2023).

Definisi 2.1.11

Misalkan T daerah asal f mengandung titik c. Dikatakan bahwa

1. $f(c)$ adalah nilai maksimum f pada T jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua x di T,
2. $f(c)$ adalah nilai minimum f pada T jika $f(c) \leq f(x)$ untuk semua x di T,
3. $f(c)$ adalah nilai ekstrim f pada T jika ia adalah nilai maksimum atau nilai minimum,
4. Fungsi yang ingin kita maksimumkan atau minimumkan adalah fungsi objektif

(Purcel dkk., 2007).

Teorema 2.1.2

Misalkan f kontinu pada interval $[m, n]$. Maka f terbatas pada $[m, n]$ (Gunawan, 2023).

Bukti :

Misalkan f tak terbatas pada $[m, n]$. Maka terdapat suatu barisan (x_n) di $[m, n]$ sedemikian sehingga

$\mid f(x_n) \mid \rightarrow +\infty$ untuk $n \rightarrow \infty$

Karena (x_n) terbatas, maka $\exists$ suatu sub-barisan (x_n) yang konvergen ke sebuah titik $c \in [m, n]$. Tetapi f kontinu di c, sedemikian rupa sehingga $f(x_{nk}) \rightarrow f(c)$ untuk $k \rightarrow \infty$. Ini bertentangan, jadi mestilah f terbatas pada $[m, n]$. ■

Teorema 2.1.3

Misalkan f kontinu pada interval $[b, c]$. Maka f mencapai nilai maksimum dan nilai minimum pada $[b, c]$ (Gunawan, 2023).

Bukti :

Diketahui f terbatas pada $[b, c]$. Misalkan $v := supf([b, c])$. Konstruksi barisan (x_n) di $[b, c]$ dengan $f(x_n) \rightarrow v$ untuk $n \rightarrow \infty$. Karena (x_n) terbatas, terdapat sub-barisan (x_{nk}) yang konvergen ke suatu titik $c \in [b, c]$. Namun kekontinuan di

c mengakibatkan $f(x_{nk}) \to f(c)$ untuk $k \to \infty$. Jadi mestilah $v = f(c)$, dan ini berarti bahwa v merupakan nilai maksimum. Serupa dengan itu, f juga mencapai nilai minimumnya. ■

Teorema 2.1.4

Misalkan f didefinisikan dalam interval l yang memuat titik c. Jika $f(c)$ adalah nilai ekstrim, maka c haruslah berupa suatu titik kritis, dengan kata lain, c adalah salah satu dari

1. Titik ujung dari l;
2. Titik stasioner dari f; yakni titik di mana $f'(c) = 0$; atau
3. Titik singular dari f; yakni titik di mana $f'(c)$ tidak ada.

Bukti :

Lihatlah kasus pertama di mana $f(c)$ adalah nilai maksimum f pada I dan misalkan bahwa c bukan merupakan titik ujung atau pun titik singular. Akan dibuktikan bahwa c adalah titik stasioner.

Sekarang, karena $f(c)$ adalah nilai maksimum, maka $f(x) \leq f(c)$ untuk semua x dalam I; yaitu

$$f(x) - f(c) \leq 0$$

Jadi jika $x < c$, sehingga $x–c < 0$, maka

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

sedangkan jika $x > c$, maka

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

Tetapi $f'(c)$ ada, karena c bukan titik singular. Akibatnya, ketika kita misalkan $x \to c^-$ dalam $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$ dan $x \to c^+$ dalam $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$, diperoleh masing-masing, $f'(c) \geq 0$ dan $f'(c) \leq 0$. Disimpulkan bahwa $f'(c) = 0$, seperti yang diinginkan.

Kasus dimana $f(c)$ adalah nilai minimum menggunakan cara yang serupa. ■

(Purcel dkk., 2007).

Teorema 2.1.5

Misalkan f kontinu dalam interval I dan terdiferensial pada setiap titik dalam dari I.

1. Jika $f'(x) > 0$ untuk semua titik dalam I, maka f monoton naik pada I.
2. Jika $f'(x) < 0$ untuk semua titik dalam I, maka f monoton turun pada I.

Bukti :

Akan dibuktikan f monoton naik pada I dengan cara memperlihatkan jika u, v pada I dengan $u < v$, maka $f(u) < f(v)$. Karena f terdiferensialkan pada interval I yang memuat interval $[u, v]$, maka terdapat suatu $c \in (u, v)$ sehingga

$$f'(c) = \frac{f(v)-f(u)}{v-u}$$

Pada bentuk ini diketahui $f'(c) > 0$ dan $v - u > 0$, yang mengakibatkan $f(v) - f(u) > 0$. Dari sini diperoleh $f(u) < f(v)$. Kasus dimana f monoton turun pada I menggunakan cara yang serupa. ■

(Martono, 1999).

Teorema 2.1.6

Misalkan f kontinu pada sebuah interval terbuka (a, b) yang memuat sebuah titik kritis c.

1. Jika $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam (a, c) dan $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam (c, b), maka $f(c)$ merupakan nilai maksimum lokal f.

2. Jika $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam (a, c) dan $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam (c, b), maka $f(c)$ merupakan nilai minimum lokal f.

Bukti :

Berdasarkan teorema 2.1.4, karena $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam (a, c), maka f monoton naik pada (a, c) dan $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam (c, b), maka f monoton turun pada (c, b). Jadi $f(x) < f(c)$ untuk semua x dalam (a, b), kecuali di $x = c$. Dapat disimpulkan bahwa $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal f. Kasus dimana $f(c)$ adalah nilai minimum lokal menggunakan cara yang serupa

(Purcel dkk., 2007).

Definisi 2.1.12

f yang terdiferensialkan pada selang terbuka I dikatakan

1. Cekung ke atas pada selang I jika f' monoton naik pada I.

2. Cekung ke bawah pada selang I jika f' monoton turun pada I.

(Martono, 1999).

Teorema 2.1.7

Misalkan f terdiferensialkan dua kali dalam selang terbuka I

1. Jika $f''(x) > 0$ pada I, maka f cekung ke atas pada I.

2. Jika $f''(x) < 0$ pada I, maka f cekung ke bawah pada I.

Bukti :

Karena $f''(x) > 0$ pada I, maka f' monoton naik pada I. Berdasarkan definisi 2.1.9 tentang kecekungan , kondisi ini mengakibatkan f cekung ke atas pada I. Karena $f''(x) < 0$ pada I, maka f' monoton turun pada I. Berdasarkan definisi 2.1.9 tentang kecekungan , kondisi ini juga akan mengakibatkan f cekung ke bawah pada I. ■

(Martono, 1999).

Teorema 2.1.8

Misalkan f' dan f'' ada pada setiap titik interval terbuka (a, b) yang berisikan c, dan misalkan $f'(c) = 0$.

1. Jika $f'' < 0$, maka $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal f,

2. Jika $f'' > 0$, maka $f(c)$ adalah nilai minimum lokal f.

Bukti :

Berdasarkan teorema 2.1.6 karena $f'' < 0$, maka f cekung ke bawah dekat c dan menyatakan bahwa ini membuktikan (1). Namun, agar yakin bahwa f cekung ke bawah di lingkungan c, diperlukan $f''(x) < 0$ di lingkungan tersebut, dan tidak ada dalam hipotesis yang menjamin itu. Menurut definisi

$$f''(x) = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)-f'(c)}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)-0}{x-c} < 0$$

sehingga dapat disimpulkan bahwa terdapat interval (α, β) di sekitar c di mana

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x)-0}{x-c} < 0, \qquad x \neq c$$

Tetapi pertidaksamaan ini mengimplikasikan bahwa $f'(x) > 0$ untuk $\alpha < x < c$ dan $f'(x) < 0$ untuk $c < x < \beta$. Berdasarkan teorema 2.1.5 jadi $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal. Kasus dimana $f(c)$ yaitu nilai minimum lokal dapat menggunakan cara yang serupa. ■

(Purcel dkk., 2007).

2.2 Limit

Berikut merupakan definisi, teorema, dan contoh tentang limit.

Definisi 2.2.1

Untuk menyatakan bahwa $\lim_{x\to c} f(x) = L$, dikatakan bahwa ketika x mendekati c, namun tidak sama dengan c, maka nilai $f(x)$ akan mendekati L (Purcel dkk., 2007).

Contoh 2.2.1

Misalkan $\lim_{x\to 3}(4x - 5)$. Ketika x mendekati 3 maka $4x - 5$ mendekati terhadap $4 \cdot 3 - 5 = 7$. Dituliskan dalam bentuk

$$\lim_{x\to 3}(4x - 5) = 7.$$

Definisi 2.2.2

Untuk menyatakan bahwa $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$, berarti bahwa saat x mendekati nilai c dari arah kanan, nilai fungsi $f(x)$ mendekati L. Demikian pula, untuk menyatakan bahwa $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$, berarti bahwa saat x mendekati nilai c dari arah kiri, nilai fungsi $f(x)$ juga mendekati L. (Purcel dkk., 2007).

Definisi 2.2.3

Diberikan $\lim_{x\to c} f(x) = L$ yang artinya untuk setiap $\epsilon > 0$ yang nilainya sangat kecil, $\exists\ \delta > 0$ sedemikian sehingga $|f(x) - L| < \epsilon$ dengan syarat $0 < |x - c| < \delta$ atau dengan kata lain $0 < |x - c| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon$ (Purcel dkk., 2007).

Teorema 2.2.1

Misalkan n adalah bilangan bulat positif, k merupakan konstanta, dan f serta g adalah fungsi-fungsi yang memiliki limit di titik c. Maka

1. $\lim_{x\to c} k = k$
2. $\lim_{x\to c} x = c$
3. $\lim_{x\to c} \big[kf(x)\big] = k \lim_{x\to c} f(x)$
4. $\lim_{x\to c} \big[f(x) + g(x)\big] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$
5. $\lim_{x\to c} \big[f(x) - g(x)\big] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$
6. $\lim_{x\to c} \big[f(x) \cdot g(x)\big] = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x)$

7. $\lim_{x\to c}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$, asalkan $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$
8. $\lim_{x\to c}\left[f(x)\right]^n = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$
9. $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$, asalkan $\lim_{x\to c} f(x) > 0$ ketika n genap

(Purcel dkk., 2007).

Bukti :

1. Akan dibuktikan bahwa $\lim_{x\to c} k = k$.

   Ambil sebarang $\epsilon > 0$, kemudian kita akan mencari $\delta > 0$, sehingga

   $\mid f(x) - k \mid < \epsilon$ apabila $0 < |x - c| < \delta$

   Ketidaksamaan sebelah kiri akan memenuhi untuk setiap nilai $\epsilon > 0$ karena kita sementara membuktikan nilai limit jika $f(x) = k$. Berarti dapat dipilih untuk setiap $\delta > 0$, sehingga

   $$\mid f(x) - k \mid = |k - k| = 0 < \epsilon.$$ ■

2. Akan dibuktikan bahwa $\lim_{x\to c} x = c$.

   Ambil sebarang $\epsilon > 0$ dan pilih $\delta = \epsilon$, sedemikian sehingga jika

   $0 < |x - c| < \delta = \epsilon$, maka $\mid f(x) - c \mid = |x - c| < \delta = \epsilon$. ■

3. Akan dibuktikan bahwa $\lim_{x\to c}\left[kf(x)\right] = k\lim_{x\to c} f(x)$.

   Misalkan $\lim_{x\to c} f(x) = K$.

   • Untuk $k = 0$, maka $kf(x) = 0$, sehingga

   $$\lim_{x\to c}[kf(x)] = \lim_{x\to c}[0] = 0 = 0f(x).$$

   Berarti teorema diatas benar untuk $k = 0$.

   • Untuk $k \neq 0$,

   Ambil sebarang $\epsilon > 0$, karena $\lim_{x\to c} f(x) = K$ dan berdasarkan definisi limit berarti terdapat $\delta_1 > 0$, sehingga

   $\mid f(x) - K \mid < \frac{\epsilon}{|k|}$ apabila $0 < \mid x - c \mid < \delta_1$.

   Sekarang, pilih $\delta = \delta_1$ dan akan dibuktikan bahwa

   $\mid kf(x) - kK \mid < \frac{\epsilon}{|k|}$ apabila $0 < \mid x - c \mid < \delta$.

   Kemudian , andaikan $0 < \mid x - c \mid < \delta$ berarti

   $$\mid kf(x) - kK \mid < \tfrac{\epsilon}{|k|} = \mid k \mid \mid f(x) - K \mid < \mid k \mid \tfrac{\epsilon}{|k|} = \epsilon.$$ ■

4. Akan dibuktikan bahwa $\lim_{x\to c}\big[f(x)+g(x)\big]=\lim_{x\to c}f(x)+\lim_{x\to c}g(x)$.

   Misalkan $\lim_{x\to c}f(x)=K$ dan $\lim_{x\to c}g(x)=L$.

   Ambil sebarang $\epsilon>0$, karena $\lim_{x\to c}f(x)=K$ dan $\lim_{x\to c}g(x)=L$, berarti terdapat $\delta_1>0$ dan $\delta_2>0$, sehingga jika $0<|x-c|<\delta_1$ maka $|f(x)-K|<\frac{\epsilon}{2}$ dan jika $0<|x-c|<\delta_2$ maka $|g(x)-L|<\frac{\epsilon}{2}$.

   Sekarang, pilih $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, kemudian akan ditunjukkan bahwa jika $0<|x-c|<\delta$ maka $|f(x)+g(x)-(K+L)|<\epsilon$.

   Andaikan $0<|x-c|<\delta$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}|f(x)+g(x)-(K+L)| &= |f(x)+g(x)-K-L|\\ &= |(f(x)-K)+(g(x)-L)|\\ &\le |f(x)-K|+|g(x)-L| \quad \text{(Ketidaksamaan Segitiga)}\\ &< \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon\\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

   ■

5. Akan dibuktikan bahwa $\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to c}f(x)-\lim_{x\to c}g(x)$.

   Misalkan $\lim_{x\to c}f(x)=K$ dan $\lim_{x\to c}g(x)=L$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)] &= \lim_{x\to c}[f(x)+(-1)g(x)]\\ &= \lim_{x\to c}f(x)+\lim_{x\to c}(-1)g(x)\\ &= \lim_{x\to c}f(x)+(-1)\lim_{x\to c}g(x) \qquad \text{(Teorema 2.2.1 nomor 3)}\\ &= K+(-1)L\end{aligned}$$

   Dengan demikian, diperoleh

   $\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)]=K-L=\lim_{x\to c}f(x)-\lim_{x\to c}g(x)$. ■

6. Akan dibuktikan bahwa $\lim_{x\to c}\big[f(x)\cdot g(x)\big]=\lim_{x\to c}f(x)\cdot\lim_{x\to c}g(x)$.

   Misalkan $\lim_{x\to c}f(x)=K$ dan $\lim_{x\to c}g(x)=L$.

   Karena $\lim_{x\to c}f(x)=K$ dan $\lim_{x\to c}g(x)=L$ dengan menggunakan teorema 2.2.1 nomor 1 dan 2, diperoleh

   $\lim_{x\to c}[f(x)-K]=\lim_{x\to c}f(x)-\lim_{x\to c}K=K-K=0$ dan

$\lim_{x\to c}[g(x)-L] = \lim_{x\to c} g(x) - \lim_{x\to c} L = L - L = 0.$

Ambil sebarang $\epsilon > 0$. Maka terdapat $\delta_1 > 0$ dan $\delta_2 > 0$, sehingga jika $0 < |x-c| < \delta_1$ maka $|(f(x)-K)-0| < \sqrt{\epsilon}$ dan jika $0 < |x-c| < \delta_2$ maka $|(g(x)-L)-0| < \sqrt{\epsilon}$.

Pilih $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, maka jika $0 < |x-c| < \delta$, kita mendapatkan

$|[f(x)-K][g(x)-L]-0| = |f(x)-K||g(x)-L| < \sqrt{\epsilon}\cdot\sqrt{\epsilon} = \epsilon.$

Telah dibuktikan bahwa

$$\lim_{x\to c}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to c}[(f(x)-K)(g(x)-L)] = 0.$$

Namun, masih belum membuktikan teorema di atas secara lengkap. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}[f(x)-K][g(x)-L] &= f(x)g(x) - Lf(x) - Kg(x) + KL\\ f(x)g(x) &= [f(x)-K][g(x)-L] + Lf(x) + Kg(x) - KL\end{aligned}$$

Karena $\lim_{x\to c}[(f(x)-K)(g(x)-L)] = 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}\big[f(x)g(x)\big] &= \lim_{x\to c}[[f(x)-K][g(x)-L] + Lf(x) + Kg(x) - KL]\\ &= \lim_{x\to c}[f(x)-K][g(x)-L] + \lim_{x\to c} Lf(x) + \lim_{x\to c} Kg(x) - \lim_{x\to c} KL\\ &= 0 + \lim_{x\to c} Lf(x) + \lim_{x\to c} Kg(x) - \lim_{x\to c} KL\\ &= L\lim_{x\to c} f(x) + K\lim_{x\to c} g(x) - KL\\ &= L\cdot K + K\cdot L - KL\\ &= KL\\ &= \lim_{x\to c} f(x)\cdot\lim_{x\to c} g(x).\end{aligned}$$

■

7. Akan dibuktikan bahwa $\lim_{x\to c}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$, asalkan $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$.

   Misalkan $\lim_{x\to c} f(x) = K \quad$ dan $\quad \lim_{x\to c} g(x) = L$.

   Akan ditunjukkan $\lim_{x\to c}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L}$.

   Misalkan $\epsilon > 0$, karena $\lim_{x\to c} g(x) = L$, ada $\delta_1 > 0$ sehingga

   $|g(x)-L| < \frac{|L|}{2} \quad$ untuk $\quad 0 < |x-c| < \delta_1$.

Dengan menggunakan asumsi bahwa $0 < |x - c| < \delta_1$, diperoleh

$$\begin{aligned}
|L| &= |L - g(x) + g(x)| \\
&< |L - g(x)| + |g(x)| \\
&= |g(x) - L| + |g(x)| && (|L - g(x)| = |g(x) - L|) \\
&< \frac{|L|}{2} + |g(x)| && (\text{Asumsi bahwa } 0 < |x - c| < \delta_1)
\end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
|L| &< \frac{|L|}{2} + |g(x)| \\
|L| - \frac{|L|}{2} &< \frac{|L|}{2} - \frac{|L|}{2} + |g(x)| \\
\frac{|L|}{2} &< |g(x)| \\
\left(\frac{|L|}{2}\right)^{-1} &> \left(|g(x)|\right)^{-1} \\
\frac{1}{|g(x)|} &< \frac{2}{|L|}.
\end{aligned}$$

Karena $\delta_2 > 0$ maka $|g(x) - L| < \frac{|L|^2}{2}\epsilon$ untuk $0 < |x - c| < \delta_2$.

Pilih $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, jika $0 < |x - c| < \delta$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L}\right| &= \left|\frac{L - g(x)}{Lg(x)}\right| \\
&= \frac{1}{|Lg(x)|}|L - g(x)| \\
&= \frac{1}{|L|}\frac{1}{|g(x)|}|g(x) - L| \\
&< \frac{1}{|L|}\frac{2}{|L|}|g(x) - L| && (\text{Asumsi bahwa } 0 < |x - c| < \\
& && \delta \leq \delta_1) \\
&< \frac{2}{|L|^2}\frac{|L|^2}{2}\epsilon && (\text{Asumsi bahwa } 0 < |x - c| < \delta \leq \delta_2) \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Telah dibuktikan bahwa $\lim_{x \to c} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L}$. Sehingga

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] &= \lim_{x\to c}\left[f(x)\frac{1}{g(x)}\right]\\ &= \lim_{x\to c} f(x)\lim_{x\to c}\frac{1}{g(x)} \qquad \text{(Gunakan Teorema 6)}\\ &= K\frac{1}{L} = \frac{K}{L} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}.\end{aligned}$$ ■

8. Akan dibuktikan bahwa $\lim_{x\to c}\left[f(x)\right]^n = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$, untuk $n \in \mathbb{Z}$.

   Misalkan $\lim_{x\to c} f(x) = K$.

   Akan dibuktikan menggunakan induksi matematika yaitu

   $\lim_{x\to c}\left[f(x)\right]^n = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n = K^n$, untuk $n \geq 2$ dan n adalah bilangan bulat. Untuk $n = 2$, diperoleh

   $$\lim_{x\to c}\left[f(x)\right]^2 = \lim_{x\to c} f(x)f(x) = \lim_{x\to c} f(x)\lim_{x\to c} f(x) = KK = K^2.$$

   Jadi, terbukti benar untuk $n = 2$. Asumsikan bahwa benar untuk $n-1$, sehingga berlaku $\lim_{x\to c}\left[f(x)\right]^{n-1} = K^{n-1}$.

   Dengan menggunakan teorema 2.2.1 nomor 6, diperoleh

   $$\begin{aligned}\lim_{x\to c}\left[f(x)\right]^n &= \lim_{x\to c}\left(\left[f(x)\right]^{n-1} f(x)\right)\\ &= \lim_{x\to c}\left[f(x)\right]^{n-1}\lim_{x\to c} f(x)\\ &= K^{n-1}K\\ &= K^n\\ &= \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n\end{aligned}$$ ■

9. Akan ditunjukkan bahwa $\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$, asalkan $\lim_{x\to c} f(x) > 0$ ketika n genap.

   Berdasarkan teorema 2.2.1 nomor 8 diperoleh

   $$\lim_{x\to c}(f(x))^n = (\lim_{x\to c} f(x))^n$$

   Berarti jika $n = \frac{1}{k}$, maka didapat :

   $$\lim_{x\to c}(f(x))^{\frac{1}{k}} = (\lim_{x\to c} f(x))^{\frac{1}{k}}$$

$$\lim_{x\to c} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x\to c} f(x)}$$

atau dapat dituliskan

$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$$ ■

(Dawkins, 2007).

Contoh 2.2.2

Misalkan $\lim_{x\to 3} 2x^4$. Maka

$$\lim_{x\to 3} 2x^4 = 2\lim_{x\to 3} x^4 = 2\big[\lim_{x\to 3} x\big]^4 = 2\big[3\big]^4 = 162.$$

Contoh 2.2.3

Misalkan $\lim_{x\to 4}(3x^2 - 2x)$. Maka

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4}(3x^2 - 2x) &= \lim_{x\to 4} 3x^2 - \lim_{x\to 4} 2x \\
&= 3\lim_{x\to 4} x^2 - 2\lim_{x\to 4} x \\
&= 3\Big(\lim_{x\to 4} x^2\Big) - 2\Big(\lim_{x\to 4} x\Big) \\
&= 3(4)^2 - 2(4) \\
&= 40.
\end{aligned}$$

2.3 Turunan

Pada subbab ini akan dijelaskan definisi, teorema, dan contoh mengenai turunan.

Definisi 2.3.1

Turunan dari fungsi f adalah fungsi lain yang dilambangkan dengan f' (dibaca "f aksen") yang nilainya pada sebarang bilangan c didefinisikan sebagai $f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ dengan syarat limitnya ada dan bukan ∞ atau -∞ (Purcel dkk., 2007).

Contoh 2.3.1

Misalkan $f(y) = 13y - 6$, maka

$$f'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\mid 13(4+h) - 6 \mid - \mid 13(4) - 6 \mid}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{13h}{h} = 13.$$

Teorema 2.3.1

Jika $f'(c)$ ada, maka fungsi f adalah kontinu di titik c.

Bukti :

Untuk membuktikan f kontinu di c, maka akan ditunjukkan bahwa $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Tuliskan $f(x)$ dalam bentuk

$$f(x) = f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c), \quad x \neq c$$
$$\lim_{h\to 0} f(x) = \lim_{h\to 0} \left[f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c) \right]$$
$$= \lim_{h\to 0} f(c) + \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \lim_{h\to 0}(x - c)$$
$$= f(c) + f'(c) \cdot 0$$
$$= f(c)$$ ■

(Purcel dkk., 2007).

Teorema 2.3.2

Jika f dan g merupakan fungsi-fungsi yang dapat terdiferensiasikan, maka

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

atau

$$D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x).$$

Bukti :

Misalkan $F(x) = f(x) + g(x)$. Maka

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \left[\frac{[f(x+h) + g(x+h)]}{h} - \frac{[f(x) + g(x)]}{h} \right]$$
$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$
$$= f'(x) + g'(x)$$ ■

(Purcel dkk., 2007).

Teorema 2.3.3

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

atau

$$D_x[f(x) - g(x)] = D_x f(x) - D_x g(x).$$

Bukti :

Misalkan $F(x) = f(x) - g(x)$. Maka

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{[f(x+h)-g(x+h)]}{h} - \frac{[f(x)-g(x)]}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= f'(x) - g'(x) \end{aligned}$$ ■

(Purcel dkk., 2007).

Teorema 2.3.4

Jika f dan g yaitu fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka

$$(f\cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

atau

$$D_x[f(x)\cdot g(x)] = f(x)D_x g(x) + g(x)D_x f(x).$$

Bukti :

Misalkan $F(x) = f(x)\cdot g(x)$. Maka

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - g(x)}{h} + \frac{g(x)\cdot f(x+h) - f(x)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\cdot \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \end{aligned}$$ ■

(Purcel dkk., 2007).

Teorema 2.3.5

Jika f dan g merupakan fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan dengan $g(x) \neq 0$ maka

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

atau

$$D_x\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_x f(x)-f(x)D_x g(x)}{g^2(x)}.$$

Bukti :

Misalkan $F(x) = f(x)/g(x)$. Maka

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)f(x+h)-f(x)g(x+h)}{h} \cdot \frac{1}{g(x)g(x+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{g(x)f(x+h)-g(x)f(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\cdot \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{g(x)g(x+h)}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{\left[g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\cdot \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{g(x)g(x+h)}\right\} \\
&= [g(x)f'(x)-f(x)g'(x)]\frac{1}{g(x)g(x)}
\end{aligned}$$

■

(Purcel dkk., 2007).

Contoh 2.3.2

Carilah turunan dari $5x^2+7x-6$. Maka

$$\begin{aligned}
D_x(5x^2+7x-6) &= D_x(5x^2+7x) - D_x(6) \\
&= D_x(5x^2) + D_x(7x) - D_x(6) \\
&= 5D_x(x^2) + 7D_x(x) - D_x(6) \\
&= 5\cdot 2x + 7\cdot 1 - 0 \\
&= 10x + 7.
\end{aligned}$$

2.4 Barisan

Barisan merupakan salah satu subbab yang mendukung inti dari permasalahan yang akan diselesaikan pada skripsi ini. Untuk itu akan dijelaskan mengenai definisi, teorema, serta contoh barisan.

Definisi 2.4.1

Barisan adalah suatu fungsi yang domainnya adalah himpunan bilangan bulat positif. Misal terdapat bilangan bulat positif 1,2,3 , ..., n , ... yang bersesuaian dengan bilangan real x_n tertentu, maka $x_1,\ x_2, ...,\ x_n, ...$ dikatakan barisan (Mizrahi & Sulivan, 1982).

Contoh 2.4.1

Barisan bilangan real dengan suku-suku $x_n = \frac{1}{n}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan dapat dinyatakan dalam bentuk

$$x = \Big(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, ...\Big).$$

Definisi 2.4.2

Barisan dikatakan konvergen (*convergent*) jika $\exists$ bilangan $x \in X$ sehingga $\forall$ bilangan asli $\epsilon > 0$ $\exists$ bilangan asli n_0 dan setiap bilangan asli $n \geq n_0$ benar bahwa $\mid x_n - x \mid < \epsilon$, pengertian tersebut ditulis singkat dengan $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ atau $\big(x_n\big) \to x$ untuk $n \to \infty$ dan bilangan x disebut limit barisan $\big(x_n\big)$, dan dikatakan barisan $\big(x_n\big)$ konvergen ke x. Barisan $\big(x_n\big)$ yang tak konvergen dikatakan divergen (Darmawijaya, 2007).

Contoh 2.4.2

Akan ditunjukkan barisan $\big(\frac{1}{n}\big)$ konvergen sebab untuk setiap $\epsilon > 0$ ada bilangan asli n_0 (bergantung pada ϵ), sehingga $n \geq n_0$ berlaku $\mid \frac{1}{n} - 0 \mid < \epsilon$ itu disebut barisan $\big(\frac{1}{n}\big)$ konvergen ke 0 atau barisan $\big(\frac{1}{n}\big)$ mempunyai limit 0 untuk $n \to \infty$ dan ditulis dengan $\lim_{n\to\infty} \mid \frac{1}{n} - 0 \mid < \epsilon$ atau dapat ditulis dengan $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Definisi 2.4.3

Suatu barisan $x = (x_n)$ dikatakan terbatas jika dan hanya jika $\exists$ suatu bilangan $M \geq 0$ sedemikian sehingga $\mid x_n \mid \leq M\ \forall n \in N$. Himpunan dari semua barisan terbatas dilambangkan dengan l_∞ (Maddox, 1970).

Definisi 2.4.4

Barisan bilangan real (x_n) merupakan suatu fungsi dari himpunan semua bilangan asli $\mathbb{N}$ ke dalam himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$ (Muslikh, 2012).

Teorema 2.4.1

Diberikan barisan bilangan real (x_n) dengan $x_n \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jika $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, maka $x \geq 0$.

Bukti :

Andaikan $x < 0$. Karena $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ maka $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$\mid x_n - x \mid < \epsilon.$$

Jika diambil $\epsilon = \frac{-x}{2} > 0$ (hal ini dibenarkan karena $x < 0$), maka untuk setiap $n \geq N$ diperoleh

$$\mid x_n - x \mid < \tfrac{-x}{2},$$

Khususnya untuk $n = N$, maka

$$\mid x_N - x \mid < \tfrac{-x}{2}.$$

Karena $x_N \geq 0$, didapat

$$x_N - x < \tfrac{-x}{2}$$

atau

$$x_N < \tfrac{x}{2}.$$

Karena $x_N \geq 0$, maka dari ketaksamaan terakhir didapat $x > 0$. Hal ini kontradiksi dengan $x < 0$. Jadi haruslah x ≥ 0. ■

(Muslikh, 2012).

Definisi 2.4.5

Barisan bilangan real (x_n) dikatakan terbatas (keatas atau kebawah) jika daerah jangkau $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ terbatas (Muslikh, 2012).

2.5 Deret

Deret adalah salah satu subbab yang mendukung dari permasalahan yang akan diselesaikan pada skripsi ini. Untuk itu akan dijelaskan tentang deret.

Definisi 2.5.1

Deret tak terhingga $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen dan mempunyai jumlah S, jika barisan jumlah parsial (S_n) konvergen ke S. Jika (S_n) divergen, maka deret divergen. Deret divergen tidak memiliki jumlah (Purcel dkk., 2007).

Definisi 2.5.2

Deret yang berbentuk

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ...$$

di mana $a \neq 0$ disebut deret geometri.

Jika $|r| < 1$ maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ konvergen ke $\frac{a}{1-r}$ dan jika $|r| > 1$ maka divergen.

(Purcel dkk., 2007).

Definisi 2.5.3

Deret yang berbentuk

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + ...$$

di mana p konstanta disebut deret p.

Jika $p > 1$ maka deret p konvergen dan jika $p \leq 1$ maka deret p divergen.

(Purcel dkk., 2007).

Definisi 2.5.4

Misalkan f adalah fungsi kontinu, positif, tidak naik pada interval $[1, \infty)$ dan andaikan bahwa $a_n = f(n)$ untuk semua bilangan bulat positif n. Maka deret tak terhingga

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konvergen jika dan hanya jika integral tak wajar

$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

konvergen (Purcel dkk., 2007).

Definisi 2.5.5

Andaikan bahwa $a_n \geq 0$, $b_n > 0$, dan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

jika $0 < L < \infty$, maka $\sum a_n$ dan $\sum b_n$ bersama-sama konvergen atau divergen. Jika $L = 0$ dan $\sum b_n$ konvergen, maka $\sum a_n$ konvergen (Purcel dkk., 2007).

Definisi 2.5.6

Misalkan $(|a_n|^{\frac{1}{n}})$ terbatas dan $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = L$. Jika $L < 1$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen; jika $L > 1$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen (Gunawan, 2023).

2.6 Barisan l_q pada Interval $0 < q < 1$

Subbab ini menjelaskan barisan l_q pada Interval $0 < q < 1$ menurut Darmawijaya (2007).

Definisi 2.6.1

Diberikan ω yaitu koleksi semua barisan bilangan real. Maka

$$\omega = \{\tilde{x} = (x_n) : x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Untuk setiap bilangan real q dengan $0 < q < 1$ didefinisikan

$$l_q = \left\{ \tilde{x} = (x_n) \in \omega : \sum_{n=1}^{\infty} \mid x_n \mid^q < \infty \right\}$$

dan norm pada l_q yaitu

$$\|x\|_q = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mid x_n \mid^q \right\}^{\frac{1}{q}}$$

(Darmawijaya, 2007).

Contoh 2.6.1

Untuk setiap bilangan real q dengan $0 < q < 1$ didefinisikan

$$l_{\frac{1}{2}} = \left\{ \tilde{x} = (x_n) \in \omega : \sum_{n=1}^{\infty} \mid x_n \mid^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$$

dan norm pada $l_{\frac{1}{2}}$ yaitu

$$\|x\|_{\frac{1}{2}} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mid x_n \mid^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{\frac{1}{2}}}.$$

2.7 Ruang Barisan

Berikut akan dijelaskan definisi dan contoh tentang ruang barisan.

Definisi 2.7.1

Diberikan ω yaitu koleksi semua barisan bilangan real. Maka

$$\omega = \{\tilde{x} = (x_n) : x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Untuk setiap bilangan real p dengan $1 \leq p < \infty$ didefinisikan

$$l_p = \left\{ \tilde{x} = (x_n) \in \omega : \sum_{n=1}^{\infty} \mid x_n \mid^{p} < \infty \right\}$$

dan norm pada l_p yaitu

$$\|x\|_p = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mid x_n \mid^{p} \right\}^{\frac{1}{p}}$$

(Darmawijaya, 2007).

Contoh 2.7.1

Untuk setiap bilangan real p dengan $1 \leq p < \infty$ didefinisikan

$$l_1 = \left\{ \tilde{x} = (x_n) \in \omega : \sum_{n=1}^{\infty} \mid x_n \mid^{1} < \infty \right\}$$

dan norm pada l_1 yaitu

$$\|x\|_1 = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mid x_n \mid^{1} \right\}.$$

Definisi 2.7.2

Ruang barisan klasik l_1 adalah koleksi dari semua bilangan riil (x_k) yang memenuhi $\sum_{n=1}^{\infty} \mid x_k \mid < +\infty$, dan ditulis dengan

$$l_1 = \left\{ (x_k)_{k\geq 1}; \sum_{k=1}^{\infty} \mid x_k \mid < +\infty \right\}.$$

Diberikan norma pada l_1 sebagai berikut

$$\|x\|_1 = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mid x_k \mid \right\}$$

(Alwi, 2014).

Definisi 2.7.3

Ruang barisan klasik l_∞ adalah koleksi dari semua barisan bilangan terbatas dengan norma $\|x\|_\infty = sup\Big\{ \mid x_k \mid ; k \geq 1 \Big\}$, ditulis dengan

$$l_\infty = \left\{ x = (x_k); \sup_{k\geq 1} \mid x_k \mid < +\infty \right\}.$$

Dengan norma pada l_∞ sebagai berikut :

$$\|x\|_\infty = \left\{ \sup_{k\geq 1} \mid x_k \mid \right\}$$

(Alwi, 2014).

2.8 Ruang Vektor

Berikut akan dijelaskan definisi, teorema, dan contoh tentang ruang vektor.

Definisi 2.8.1

Misalkan V merupakan suatu himpunan takkosong dari objek-objek sebarang, di mana dua operasinya didefinisikan, yaitu penjumlahan dan perkalian dengan skalar. V disebut ruang vektor dan objek-objek pada V disebut vektor, jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$,
2. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (sifat komutatif),
3. $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$ (sifat asosiatif),
4. Ada sebuah vektor $\mathbf{0} \in V$ sehingga $\mathbf{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \boldsymbol{u}$ untuk semua $\boldsymbol{u} \in V$,
5. Untuk setiap $\boldsymbol{u} \in V$, terdapat suatu objek $-\boldsymbol{u} \in V$, sehingga $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$,

6. Jika k adalah skalar sebarang dan $\boldsymbol{u}$ adalah objek sebarang $\in V$ maka, $k\boldsymbol{u}$ terdapat pada V,
7. $k(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$ (sifat distributif),
8. $(k+l)\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{u} + l\boldsymbol{u}$,
9. $k(l\boldsymbol{u}) = (kl)\boldsymbol{u}$,
10. $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

(Anton & Rorres, 2004).

Contoh 2.8.1

Misalkan V terdiri dari suatu objek tunggal yang dinotasikan dengan $\mathbf{0}$ dan dapat didefinisikan

$$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \text{dan} \quad k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

untuk semua skalar k. Ruang vektor ini disebut sebagai ruang vektor nol.

Teorema 2.8.1

Misalkan V merupakan suatu ruang vektor, $\boldsymbol{u}$ adalah suatu vektor pada V, dan k adalah suatu skalar, maka :

1. $0\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$
2. $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$
3. $(-1)\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$
4. Jika $k\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$, maka $k = 0$ atau $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$

Bukti :

1. Akan dibuktikan bahwa $0\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.

   Perhatikan bahwa:

   $$\begin{aligned} 0\boldsymbol{u} + 0\boldsymbol{u} &= (0+0)\boldsymbol{u} && \text{(Aksioma 8)} \\ &= 0\boldsymbol{u} && \text{(Sifat dari bilangan 0)} \end{aligned}$$

   Berdasarkan aksioma 5, vektor $0\boldsymbol{u}$ memiliki bentuk negatif, $-0\boldsymbol{u}$. Dengan menambahkan negaifnya pada kedua ruas diatas, maka akan menghasilkan:

$$[0\boldsymbol{u} + 0\boldsymbol{u}] + (-0\boldsymbol{u}) = 0\boldsymbol{u} + (-0\boldsymbol{u})$$

Atau

$$\begin{aligned} 0\boldsymbol{u} + [0\boldsymbol{u} + (-0\boldsymbol{u})] &= 0\boldsymbol{u} + (-0\boldsymbol{u}) && \text{(Aksioma 3)} \\ 0\boldsymbol{u} + \mathbf{0} &= \mathbf{0} && \text{(Aksioma 5)} \\ 0\boldsymbol{u} &= \mathbf{0}. && \text{(Aksioma 4)} \end{aligned}$$

■

2. Akan dibuktikan bahwa $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

   Perhatikan bahwa :

$$\begin{aligned} k\mathbf{0} + k\boldsymbol{u} &= k(\mathbf{0} + \boldsymbol{u}) \\ &= k\boldsymbol{u} \end{aligned}$$

   Dengan menjumlahkan negatif dari $k\boldsymbol{u}$, yaitu $-k\boldsymbol{u}$ pada kedua ruas diatas, maka akan diperoleh :

$$\begin{aligned} (k\mathbf{0} + k\boldsymbol{u}) + (-k\boldsymbol{u}) &= k\boldsymbol{u} + (-k\boldsymbol{u}) \\ k\mathbf{0} + (k\boldsymbol{u} + (-k\boldsymbol{u})) &= \mathbf{0} \\ k\mathbf{0} + \mathbf{0} &= \mathbf{0} \\ k\mathbf{0} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

■

3. Akan dibuktikan bahwa $(-1)\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$.

   Untuk menunjukkan $(-1)\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$, diperlukan bahwa $\boldsymbol{u} + (-1)\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} + (-1)\boldsymbol{u} &= 1\boldsymbol{u} + (-1)\boldsymbol{u} && \text{(Aksioma 10)} \\ &= (1 + (-1))\boldsymbol{u} && \text{(Aksioma 8)} \\ &= 0\boldsymbol{u} && \text{(Sifat dari bilangan)} \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

■

4. Akan dibuktikan bahwa Jika $k\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$, maka $k = 0$ atau $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.

   Jika $k\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ dan $k \neq 0$, maka $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} k\boldsymbol{u} &= \mathbf{0} \\ 1/k(k\boldsymbol{u}) &= (1/k)\mathbf{0} \\ ((1/k)k\boldsymbol{u}) &= (1/k)\mathbf{0} \\ 1.\boldsymbol{u} &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{u} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

■

Jika $k\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ dan $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$, maka $k = 0$

$$\begin{aligned} k\boldsymbol{u} &= \mathbf{0} \\ (k\boldsymbol{u})1/\boldsymbol{u} &= \mathbf{0}(1/\boldsymbol{u}) \\ k(\boldsymbol{u}(1/\boldsymbol{u})) &= \mathbf{0}(1/\boldsymbol{u}) \\ k.1 &= 0 \\ k &= 0. \end{aligned}$$

■

(Anton & Rorres, 2004).

Definisi 2.8.2

Diketahui V ruang vektor atas lapangan F dan $W \subset V$. Jika himpunan W terhadap operasi-operasi yang sama dengan operasi-operasi di dalam V juga merupakan ruang vektor atas F, maka W disebut ruang vektor bagian dari V (Darmawijaya, 2007).

Definisi 2.8.3

Suatu vektor $\boldsymbol{w}$ disebut suatu kombinasi linear dari vektor-vektor $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_r$ jika dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\boldsymbol{w} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + ... + k_r\boldsymbol{v}_r$$

di mana $k_1, k_2, ..., k_r$ adalah skalar (Anton & Rorres, 2004).

Definisi 2.8.4

Jika $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_r\}$ adalah suatu himpunan vektor-vektor pada suatu ruang vektor V, maka subruang W dari V yang terdiri dari semua kombinasi linear vektor-vektor pada S disebut sebagai ruang yang direntang *(space spanned)* oleh $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_r$ dan vektor-vektor $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_r$ merentang *(span)* W. Untuk menyatakan bahwa W merupakan ruang yang direntang oleh vektor-vektor pada himpunan $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_r\}$ kita menuliskan

$$W = rentang(S) \quad atau \quad W = rentang\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_r\}$$

(Anton & Rorres, 2004).

Definisi 2.8.5

Jika $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_r\}$ adalah himpunan takkosong vektor-vektor maka persamaan vektor

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + ... + k_r\boldsymbol{v}_r = \mathbf{0}$$

memiliki paling tidak satu solusi, yaitu

$$k_1 = 0, k_2 = 0, ..., k_r = 0$$

Jika ini satu-satunya solusi, maka S disebut sebagai himpunan bebas linear *(linearly independent)*. Jika terdapat solusi-solusi lain, maka S disebut sebagai himpunan tidak bebas linear *(linearly dependent)* (Anton & Rorres, 2004).

2.9 Ruang Bernorm

Pada subbab ini akan dijelaskan materi mengenai ruang bernorm.

Definisi 2.9.1

Dalam konteks ruang vektor X, sebuah norma adalah fungsi $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ yang mempunyai sifat-sifat berikut untuk setiap $y, z \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\|y\| \geq 0$ untuk setiap $y \in X$,
2. $\|y\| = 0$, jika dan hanya jika $y = \mathbf{0}$,
3. $\|\alpha y\| = \|\alpha\| \cdot \|y\|$ untuk setiap skalar α dan $y \in X$,
4. $\|y + z\| \leq \|y\| + \|z\|$ untuk setiap $y, z \in X$.

Disebut norma (*norm*) pada X dan bilangan nonnegatif $\|y\|$ disebut norm vektor y. Ruang linier X yang dilengkapi dengan suatu $norm$ $\|.\|$ disebut ruang bernorma (*norm space*) dan dituliskan singkat dengan $(X, \|.\|)$ atau X saja asalkan $norm$ nya telah diketahui (Darmawijaya, 2007).

Lemma 2.9.1

Dalam ruang linear bernorma X berlaku $\|y\| - \|z\| \leq \|y - z\|$ $\forall$ $y, z \in X$ (Maddox, 1970).

Bukti :

$\forall$ $y, z \in X$ diperoleh

$\|y\| - \|z\| = \|y - z + z\| - \|z\| \leq \|y - z\| + \|z\| - \|z\| = \|y - z\|$ ■

Definisi 2.9.2

Barisan (x_n) di dalam ruang bernorma $(X, \|.\|)$ disebut barisan Cauchy atau barisan fundamental jika $\forall$ bilangan $\epsilon > 0$ $\exists$ bilangan asli n_0, sehingga $\forall$ dua bilangan asli $m, n \geq n_0$ berlaku $\|x_m - x_n\| < \epsilon$ (Barttle & Sherbert, 2000).

Teorema 2.9.1

Setiap barisan yang konvergen di dalam ruang bernorma X merupakan barisan Chaucy (Barttle & Sherbert, 2000).

Bukti :

Misalkan (x_n) adalah barisan di X dengan $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ dan misalkan $\epsilon < 0$ maka $\exists$ bilangan asli $N \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga berlaku $d(x, x_n) < \frac{\epsilon}{2}\ \forall\ n \geq N$, akibatnya untuk $n, m \geq N$ berlaku $d(x_n, x_m) \leq d(x_m, x) + d(x_n) < \epsilon$, jadi (x_n) barisan Cauchy. ■

Definisi 2.9.3

Ruang bernorma dikatakan lengkap (*complete*) jika setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen (Barttle & Sherbert, 2000).

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung pada semester ganjil tahun ajaran 2024/2025.

3.2 Tahapan Penelitian

Tahapan penelitian dalam penelitian ini adalah :

1. Mempelajari konsep dan mengkonstruksi limit pada barisan.
2. Memahami konsep dan mengkonstruksi barisan fungsi.
3. Mencari literatur tentang derivatif fungsi-fungsi bernilai barisan l_q pada interval $0 < q < 1$.
4. Mengkonstruksi definisi dan contoh derivatif fungsi-fungsi bernilai barisan l_q pada interval $0 < q < 1$.
5. Menunjukkan sifat-sifat derivatif fungsi-fungsi bernilai barisan l_q pada interval $0 < q < 1$.
6. Menyelidiki definisi dan memberikan contoh tentang maksimal dan minimal fungsi bernilai barisan l_q pada interval $0 < q < 1$.
7. Membuat kesimpulan tentang derivatif fungsi-fungsi bernilai barisan l_q pada interval $0 < q < 1$.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan sebelumnya, maka dapat dibuat kesimpulan sebagai berikut :

1. Diberikan fungsi-fungsi $\bar{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^{\infty}$. Derivatif fungsi $\bar{f}$ di tulis $\frac{d\bar{f}}{dx} \in l_q$
$$\bar{f}'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\bar{f}(x+h)-\bar{f}(x)}{h}$$
asalkan nilai limitnya ada, bukan ∞ atau -∞, dan $(\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{d\bar{f}}{dx}|^q)^{\frac{1}{q}} < \infty$ pada interval $0 < q < 1$.

2. Jika $\bar{f}$ dan $\bar{g}$ adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka
   a. $(\bar{f} + \bar{g})'(x) = \bar{f}'(x) + \bar{g}'(x)$
   b. $(\bar{f} - \bar{g})'(x) = \bar{f}'(x) - \bar{g}'(x)$
   c. $(\bar{f} \cdot \bar{g})'(x) = \bar{f}(x)\bar{g}'(x) + \bar{g}(x)\bar{f}'(x)$

3. Jika $\bar{f}$ dan $\bar{g}$ adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan dengan $\bar{g}(x) \neq 0$ maka
$$\left(\frac{\bar{f}}{\bar{g}}\right)'(x) = \frac{\bar{g}(x)\bar{f}'(x)-\bar{f}(x)\bar{g}'(x)}{\bar{g}^2(x)}$$

4. $\bar{f}(x)$ mempunyai maksimal dan minimal pada $[a, b]$ jika $\frac{d\bar{f}}{dx} = \bar{0}$ pada $x \in [a, b]$ dan x sebagai titik kritis.

5. Misalkan $\bar{f}'$ dan $\bar{f}''$ ada pada setiap titik interval terbuka (a, b) yang memuat c, dan misalkan $\bar{f}'(c) = \bar{0}$.
   a. Jika $\bar{f}'' < \bar{0}$, maka $\bar{f}(c)$ adalah nilai maksimum lokal $\bar{f}$.
   b. Jika $\bar{f}'' > \bar{0}$, maka $\bar{f}(c)$ adalah nilai minimum lokal $\bar{f}$.

5.2 Saran

Disarankan kepada para penelitian yang akan datang untuk mengembangkan penelitian terhadap derivatif parsial fungsi-fungsi bernilai barisan lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Asyhar, Beni. 2014. Aplikasi Derivatif dalam Permasalahan Analisis Keuntungan Maksimum. *Jurnal Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam*. **2**(1), 1-14.

Alwi, Wahidah. 2014. Ruang Banach pada Ruang Barisan l_1, l_p, dan l_∞. *Jurnal Teknosains*. **8**(1), 39-50.

Anton, H. & Rorres, C. 2004. *Aljabar Linier Elementer Jilid 1 Edisi Kedelapan*. Erlangga, Jakarta.

Barttle, R. G., & Sherbert, D.R. 2000. *Introduction to Real Analysis : Third Edition*. John Willey dan Sons, Inc, New York.

Darmawijaya, Soeparna. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*. Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

Darwanto, Dinata, K.B., & Junaidi. 2020. *Teori Himpunan*. Universitas Muhammadiyah Kotabumi, Lampung Utara.

Dawkins, Paul. 2007. *Calculus 1*. Lamar University, United States.

Fadillah, N.N. 2024. Derivatif Fungsi Hiperbolik. *Jurnal Pustaka Cendekia Pendidikan*. **2**(2), 88-94.

Gunawan, Hendra. 2023. *Pengantar Analisis Real Edisi Kedua*. ITB, Bandung.

Janan, S. & Janan, T. 2024. Derivatif Fraksional dari Fungsi Hiperbolik. *Jurnal Matematika, Statistika, dan Komputasi*. **21**(1), 267-284.

Jumaidi & Fauzi, A. 2020. *Matematika*. PT Gramedia, Jakarta.

Kusuma, W.D. & Yunianti, D.N. 2017. Sifat-Sifat Turunan Mutlak Fungsi pada Ruang Metrik. *Jurnal Ilmiah Matematika*. **3**(6), 74-79.

Maddox, I.J. 1970. *Element of Functional Analysis. Cambridge*. University Press, London.

Martono, Koko. 1999. *Kalkulus*. Erlangga, Jakarta.

Mizrahi, A. & Sulivan, M. 1982. *Calculus and Analytic Geometry*. Wadsworth Publishing Company Belmont, California.

Muslikh, Mohamad. 2012. *Analisis Real*. UB Press, Malang.

Nurwahidah & Mariani, A. 2021. Turunan (Derivatif): Sebuah Pendekatan Matematis dalam Analisis Keuntungan Maksimum. *Jurnal Matematika dan Statistika serta Aplikasinya*. **9**(1), 1-6.

Purcell, E. J., Verberg, D., & Rigdon, S. E. 2007. *Kalkulus Jilid 1 Edisi Kesembilan*. Erlangga, Jakarta.

Rifa'i, Mohammad. 2019. *Matematika Dasar*. Uwais Inspirasi Indonesia, Ponorogo.