PERBANDINGAN METODE GAUSS-SEIDEL, TITIK TETAP, DAN NEWTON *MIDPOINT* HALLEY (NMH) UNTUK SOLUSI SISTEM PERSAMAAN NONLINEAR

(Skripsi)

Oleh

DEMI IMANDA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

ABSTRACT

COMPARISON OF GAUSS-SEIDEL, FIXED POINT, AND NEWTON MIDPOINT HALLEY (NMH) METHODS FOR SOLUTION OF SYSTEMS OF NONLINEAR EQUATION

By

DEMI IMANDA

A system of nonlinear equations is a collection of two or more nonlinear equations whose solutions are convergent or divergent approximate roots. In this research, the author uses the Gauss-Seidel method, Fixed Point method, and Newton Midpoint Halley (NMH) method. With the results of the discussion, the Newton Midpoint Halley (NMH) method is the best method for solving the three systems of nonlinear equations. This is proven by the number of iterations of the Newton Midpoint Halley (NMH) method being smaller compared to the Gauss-Seidel and Fixed Point methods.

Keywords : Systems of Nonlinear Equations, Gauss-Seidel method, Fixed Point method, and Newton Midpoint Halley (NMH) method.

.

ABSTRAK

PERBANDINGAN METODE GAUSS-SEIDEL, TITIK TETAP, DAN NEWTON *MIDPOINT* HALLEY (NMH) UNTUK SOLUSI SISTEM PERSAMAAN NONLINEAR

Oleh

DEMI IMANDA

Sistem persamaan nonlinear merupakan kumpulan dari dua persamaan nonlinear atau lebih yang penyelesaiannya berupa akar-akar hampiran yang konvergen atau divergen. Pada penelitian ini, penulis menggunakan metode Gauss-Seidel, metode titik tetap, dan metode Newton *Midpoin*t Halley (NMH). Dengan hasil pembahasan yaitu metode Newton *Midpoin*t Halley (NMH) adalah metode terbaik untuk menyelesaikan ketiga sistem persamaan nonlinear tersebut. Hal ini dibuktikan dengan jumlah iterasi metode Newton *Midpoin*t Halley (NMH) lebih kecil dibandingkan dengan metode Gauss-Seidel dan titik tetap.

Kata Kunci : Sistem Persamaan Nonlinear, metode Gauss-Seidel, metode titik tetap, dan metode Newon *Midpoint* Halley (NMH).

PERBANDINGAN METODE GAUSS-SEIDEL, TITIK TETAP, DAN NEWTON *MIDPOINT* HALLEY (NMH) UNTUK SOLUSI SISTEM PERSAMAAN NONLINEAR

Oleh

DEMI IMANDA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar

SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

BANDAR LAMPUNG

2024

Judul Skripsi : **PERBANDINGAN METODE GAUSS SEIDEL, TITIK TETAP, DAN NEWTON *MIDPOINT* HALLEY (NMH) UNTUK SOLUSI SISTEM PERSAMAAN NONLINEAR**

Nama Mahasiswa : **Demi Imanda**

Nomor Pokok Mahasiswa : **2017031057**

Jurusan : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dr. La Zakaria, M.Sc.	**Dina Eka Nurvalzy, S.Pd., M.Si.**
NIP. 19690213 199402 1 001	NIP. 19931106 201903 2 018

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Prof. Dr. La Zakaria, M.Sc.** ....

Sekretaris : **Dina Eka Nurvalzy, S.Pd., M.Si** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dra. Dorrah Aziz, M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 19711001 200501 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **09 Agustus 2024**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: **Demi Imanda**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **2017031057**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **PERBANDINGAN METODE GAUSS-SEIDEL, TITIK TETAP, DAN NEWTON *MIDPOINT* HALLEY (NMH) UNTUK SOLUSI SISTEM PERSAMAAN NONLINEAR**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila di kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 09 Agustus 2024

Penulis,

SEPULUH RIBU RUPIAH 10000 METERAI TEMPEL 7EC2BALX286724998

Demi Imanda

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Demi Imanda, lahir di Bandar Lampung, pada tanggal 05 November 2002 sebagai anak pertama dari dua bersaudara pasangan Bapak Bagus Subekti dan Ibu Nursida Mulyani.

Penulis mengawali pendidikan di Taman Kanak-Kanak (TK) IKI PTP Nusantara VII pada tahun 2007-2008 dan menempuh pendidikan dasar di SDN 02 Rawa Laut pada tahun 2008-2014. Kemudian penulis melanjutkan jenjang pendidikannya di SMP Kartika II-2 Bandar Lampung pada tahun 2014-2017 dan Sekolah Menengah Atas di SMAN 09 Bandar Lampung pada tahun 2017-2020. Setelah itu penulis diterima sebagai mahasiswi Program Studi S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SBMPTN pada tahun 2020.

Selama menjadi mahasiswi, penulis aktif di beberapa kegiatan di antaranya: aktif dalam kepengurusan organisasi HIMATIKA FMIPA Unila sebagai anggota Bidang Eksternal pada tahun 2022 dan Staf Ahli Dinas Sains, Apresiasi, dan Prestasi (SAINPRES) Badan Eksekutif Mahasiswa (BEM) FMIPA pada tahun 2023.

Sebagai bentuk pengabdian mahasiswa dan menjalankan Tri Dharma Perguruan Tinggi, pada tahun 2023 penulis melaksanakan kegiatan Kerja Praktik (KP) di Badan Pendapatan Daerah (BAPENDA) dan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Tempel Rejo, Kecamatan Kedondong, Kabupaten Pesawaran, Provinsi Lampung.

KATA INSPIRASI

“Maka, sesungguhnya beserta kesulitan ada kemudahan.
Sesungguhnya beserta kesulitan ada kemudahan.”

(QS. Al-Insyirah: 5-6)

“ Sesungguhnya hanya orang-orang yang bersabarlah yang dicukupkan pahala mereka tanpa batas. ”

(QS. Az-Zumar: 10)

“Dan barang siapa yang bertakwa kepada Allah, niscaya Allah menjadikan baginya kemudahan dalam urusannya.”

(Q.S At-Talaq: 4)

“ Bantuan terbesar datang dengan cobaan terbesar. Ketika Allah mencintai manusia, Allah menguji mereka. Barang siapa yang menerimanya maka ia mendapatkan kridhaan-Nya, tetapi barang siapa yang tidak puas dengan hal itu, maka ia mendapatkan kemurkaan-Nya. ”

(Sunan Ibn Majah)

“ Education is the power to think clearly, the power to act well in the world’s work, and the power to appreciate life.”

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap rasa syukur atas segala puji dan kehadirat Allah SWT. yang telah melimpahkan nikmat dan hidayah-Nya sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik. Tak lupa pula shalawat serta salam selalu tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW. Dengan telah diselesaikannya skripsi ini, penulis persembahkan karya ini kepada:

Keluarga Tercinta

Ibu, Ayah, dan adik yang selalu memberikan do'a serta dukungannya sehingga dapat mengantarkanku sampai di titik ini.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terima kasih atas bimbingan, motivasi, bantuan, serta arahan yang telah diberikan.

Sahabat-sahabatku

Terima kasih kepada semua sahabatku yang telah mendampingi, memberi semangat, dan membawa energi positif selama proses penyusunan skripsi.

Almamater Tercinta Universitas Lampung

SANWACANA

Puji syukur atas kehadirat Allah Swt. berkat rahmat, nikmat, dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Perbandingan Metode Gauss-Seidel, Titik Tetap, dan Newton *Midpoint* Halley (NMH) untuk Solusi Sistem Persamaan Nonlinear".

Terselesaikannya skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak, baik langsung maupun tidak. Oleh karena itu, pada kesempatan kali ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. La Zakaria, M.Sc. selaku Pembimbing I yang telah dengan sabar membimbing, memotivasi, dan memberikan arahan sehingga skripsi ini dapat terselesaikan tepat waktu.
2. Ibu Dina Eka Nurvalzy, S.Pd., M.Si. selaku Pembimbing II yang telah memberikan dukungan, arahan, masukan, dan waktunya untuk membimbing dalam proses penyusunan skripsi ini.
3. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si. selaku Pembahas atas kesediannya untuk menguji dan dengan sabar memberikan masukan, kritik, serta saran.
4. Ibu Notiragayu, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing akademik yang senantiasa memberikan motivasi dan membimbing selama manjalani perkuliahan.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
6. Bapak Mulyono, S.Si., M.Si., Ph.D. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Seluruh dosen, staff, dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

8. Kedua orang tuaku Bapak Bagus Subekti dan Ibu Nursida Mulyani, terima kasih atas doa terbaik serta dukungan yang tiada hentinya untuk penulis. Dan adik yang penulis cintai Djofi Prianda Banu, terima kasih sudah selalu sabar dan menguatkan penulis.
9. Teman-teman bimbingan, Nada, Regina, Jihad, dan Rizka yang telah bersedia untuk sama-sama berjuang dan saling membantu satu sama lain.
10. Sahabat penulis, Fatiha, Annisa, Alika, Marizka, Anna, Adinda, dan Azzahra yang selalu bersedia memberikan dukungan dan mendengar keluh kesah penulis.
11. Teman seperjuangan selama kuliah, Anggita, Arinda, Arlinda, Azzura, Callista, Claudya, Micelle, Rani, dan Sinta yang memberikan dukungan, semangat, dan motivasi selama proses penyusunan skripsi ini.
12. Salsa, Lia, Yazid, Margel, Erwin, Ridho, Rara, Eri, Najia, Falen, dan Arvi yang telah menemani penulis menjalani dunia perkuliahan hingga menjadi lebih menyenangkan.
13. Seluruh pihak terkait yang telah banyak membantu dalam proses penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 09 Agustus 2024

Penulis,

Demi Imanda

NPM. 2017031057

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL vi

I. PENDAHULUAN 1

1.1 Latar Belakang Masalah 1

1.2 Batasan Masalah 3

1.3 Tujuan Penelitian 4

1.4 Manfaat Penelitian 4

II. TINJAUAN PUSTAKA 5

2.1 Persamaan 5

2.1.1 Persamaan Linear 6

2.1.2 Persamaan Nonlinear 6

2.2 Sistem Persamaan Nonlinear 7

2.3 Metode Numerik 8

2.4 Galat (*error*) 8

2.5 Metode Gauss-Seidel 9

2.6 Metode Titik Tetap 11

2.7 Metode Newton..15

2.7.1 Metode *Midpoint* 16

2.7.2 Metode Halley 16

2.7.3 Metode NMH...17

III. METODOLOGI PENELITIAN 20

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian...20

3.2 Metode Penelitian 20

IV. PEMBAHASAN 22

4.1 Solusi Sistem Persamaan Nonlinear Kasus 1 dengan Metode Gauss-Seidel...22

4.2 Solusi Sistem Persamaan Nonlinear Kasus 1 dengan Metode Titik Tetap 23
4.3 Solusi Sistem Persamaan Nonlinear Kasus 1 dengan Metode NMH 26
4.4 Solusi Sistem Persamaan Nonlinear Kasus 2 dengan Metode Gauss-Seidel..27
4.5 Solusi Sistem Persamaan Nonlinear Kasus 2 dengan Metode Titik Tetap 28
4.6 Solusi Sistem Persamaan Nonlinear Kasus 2 dengan Metode NMH 28
4.7 Perbandingan Solusi Sistem Persamaan Nonlinear Metode Gauss-Seidel, Metode Titik Tetap, dan Metode NMH...29
4.7.1 Metode Gauss-Seidel, Metode Titik Tetap, dan Metode NMH Kasus Pertama 29
4.7.2 Metode Gauss-Seidel, Metode Titik Tetap dan Metode NMH Kasus Kedua...30
V. KESIMPULAN 31
DAFTAR PUSTAKA...32

DAFTAR TABEL

Tabel Halaman

1. Hasil Iterasi Metode NMH pada *Wolfram Mathematica 9.0* 18
2. Solusi Sistem Persamaan Nonlinear Kasus 1 dengan Metode Gauss-Seidel 23
3. Solusi Sistem Persamaan Nonlinear Kasus 1 dengan Metode Titik Tetap ... 24
4. Solusi Sistem Persamaan Nonlinear Kasus 1 dengan Metode NMH 26
5. Solusi Sistem Persamaan Nonlinear Kasus 2 dengan Metode Gauss-Seidel 27
6. Solusi Sistem Persamaan Nonlinear Kasus 2 dengan Metode Titik Tetap ... 28
7. Solusi Sistem Persamaan Nonlinear Kasus 1 dengan Metode NMH 29
8. Perbandingan Antara Metode Gauss-Seidel, Titik Tetap, dan NMH Pada Kasus Pertama 30
9. Perbandingan Antara Metode Gauss-Seidel,Titik Tetap, dan NMH Pada Kasus Kedua 30

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matematika adalah ilmu eksak yang melibatkan rumus dan perhitungan. Berfungsi sebagai alat untuk menyederhanakan berbagai masalah. Dengan matematika, suatu permasalahan akan menjadi lebih mudah untuk disajikan, dipahami, dianalisis, dan dipecahkan. Namun, tidak semua permasalahan dapat diselesaikan hanya dengan perhitungan sederhana. Jika suatu masalah terlalu rumit untuk diselesaikan dengan metode analitik, maka metode numerik dapat digunakan sebagai alternatif untuk menemukan solusinya (Masykur dan Halim, 2009).

Permasalahan nonlinear yaitu persamaan di mana pangkat variabelnya lebih dari satu atau terdapat suku-suku yang merupakan hasil perkalian dari dua atau lebih variabel. Sedangkan kumpulan dari dua atau lebih persamaan disebut dengan sistem persamaan nonlinear. Solusi dari sistem persamaan nonlinear dapat berupa akar-akar pendekatan yang konvergen atau akar-akar pendekatan yang divergen (Prihandono, 2015).

Terdapat sejumlah metode numerik untuk mengatasi persoalan program nonlinear yang khusus, misalnya metode Newton Raphson, metode Jacobian, metode titik tetap, metode Newton *Midpoint* Halley (NMH), metode Broyden, dan metode Gauss-Seidel. Metode-metode tersebut digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinear (Chapra dan Canale, 1991).

Metode Gauss-Seidel adalah suatu penyelesaian sistem persamaan nonlinear dengan menggunakan nilai iterasi terbaru yang diperoleh. Keunggulan metode Gauss-Seidel terletak pada kecepatan proses iterasinya untuk mencapai konvergen (Sahid, 2005).

Metode titik tetap merujuk pada metode iterasi sederhana, metode langsung atau metode substitusi beruntun. Disebut metode iterasi sederhana karena algoritma iterasinya mudah dibentuk, sedangkan kekurangannya adalah proses iterasinya memakan waktu lama dan tidak dapat digunakan untuk menemukan solusi dari akar kompleks (imajiner) (Sahid, 2005).

Metode Newton *Midpoint* Halley (NMH) adalah metode Newton yang dikombinasikan dengan aturan *Midpoint* yang dapat menghasilkan akar dari persamaan lebih cepat. Kombinasi metode Newton dengan metode Halley menghasilkan metode baru yang lebih efisien untuk mencapai kekonvergenan (Ozban, 2004).

Beberapa penelitian sebelumnya yang mengkaji mengenai perbandingan dari metode numerik di antaranya yaitu Hidayah, F.N., dkk., (2019) melakukan penelitian mengenai metode Newton *Midpoint* Halley (NMH) untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinear. Hasil dari penelitiannya menunjukkan bahwa metode NMH dapat menyelesaikan sistem persamaan nonlinear. Ritonga & Suryana (2019) melakukan penelitian mengenai perbandingan kecepatan konvergensi akar persamaan nonlinier metode titik tetap dengan metode Newton Raphson menggunakan matlab. Hasil penelitiannya memperlihatkan bahwa kecepatan konvergensi menuju akar dengan metode Newton Raphson lebih cepat dibanding metode titik tetap. Sitompul & Siahaan (2022) melakukan penelitian mengenai solusi numerik persamaan diferensial biasa orde dua dengan sistem persamaan nonlinier. Hasil penelitiannya menunjukkan bahwa penerapan metode Newton pada beda hingga terpusat sangat baik dalam mengaproksimasi solusi eksak dari persamaan diferensial orde 2 dengan kondisi batas. Salwa, H.N., dkk., (2022) melakukan penelitian mengenai perbandingan metode Newton *Midpoint* Halley (NMH), metode Olver dan metode Chabysave dalam penyelesaian akar-akar persamaan nonlinear. Hasil dari penelitian ini yaitu metode NMH merupakan metode terbaik dalam menyelesaikan akar-akar persamaan nonlinear. Monice dkk (2023) melakukan penelitian mengenai studi perbandingan metode Gauss-Seidel dan metode Newton Raphson dalam rekonfigurasi penyulang okura PT.PLN Unit Layanan Pelanggan (ULP) Rumbai. Hasil dari penelitiannya yaitu metode Newton Raphson memperoleh tegangan tertinggi 1,00 pu dan terendah 0,981 pu sedangkan rugi-rugi daya aktif 74 kW dan reaktif sebesar 113 kVar dengan Iterasi 2 dan Max. Error 0,000156024 sedangkan metode Gauss Seidal memperoleh tegangan tertinggi 1,00 pu dan terendah 0,999 pu sedangkan rugi-rugi daya aktif 0,001 kW dan reaktif sebesar 0,002 kVar dengan iterasi 101 dan Max. Error 0.0245611.

Sejauh penelusuran literatur yang penulis lakukan, belum ada penelitian yang membahas mengenai metode Gauss-Seidel, metode titik tetap, dan metode Newton *Midpoint* Halley (NMH) untuk mencari solusi sistem persamaan polinomial nonlinear. Sehingga penulis tertarik untuk membahas metode Gauss-Seidel, metode titik tetap, dan metode Newton *Midpoint* Halley (NMH) untuk mencari solusi sistem persamaan polinomial nonlinear.

1.2 Batasan Masalah

Penelitian ini membahas tentang 2 kasus dengan bentuk persamaan yang berbeda untuk penyelesaian sistem persamaan nonlinear dengan metode Gauss-Seidel, metode titik tetap, dan metode Newton *Midpoint* Halley (NMH).

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk menemukan metode yang lebih efektif antara metode Gauss-Seidel, metode titik tetap, dan metode Newton *Midpoint* Halley (NMH) untuk mencari solusi sistem persamaan nonlinear.

1.4 Manfaat Penelitian

Pada penelitian ini, berdasarkan masalah dan tujuan penelitian yang telah diuraikan, manfaat penelitian ini yaitu:

1. Memberikan pengetahuan bagi para peneliti yang ingin mengkaji tentang penyelesaian sistem persamaan nonlinear dengan metode Gauss-Seidel, metode titik tetap, dan metode Newton *Midpoint* Halley (NMH).
2. Mengetahui metode yang lebih akurat di antara metode Gauss-Seidel, metode titik tetap, dan metode Newton *Midpoint* Halley (NMH) untuk sistem persamaan nonlinear.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan

Pernyataan matematika yang dinyatakan secara simbolis bahwa dua hal yang sama persis disebut persamaan. Tanda sama dengan (=) digunakan saat menulis persamaan. Kesamaan dua ekspresi yang terdiri dari satu atau lebih peubah dapat dinyatakan dengan menggunakan persamaan. Sebagai contoh, persamaan berikut ini selalu berlaku untuk x anggota bilangan real:

$$x(x-1) = x^2 - x$$

Persamaan di atas merupakan contoh dari identitas persamaan yang selalu benar. Sedangkan persamaan di bawah ini bukanlah suatu identitas:

$$x^2 - x = 0$$

Persamaan tersebut adalah salah untuk sejumlah tak hingga x, dan hanya benar untuk satu nilai. Oleh karena itu, jika terdapat persamaan diketahui bernilai benar, maka persamaan tersebut membawa informasi mengenai nilai x. Secara umum, nilai peubah di mana suatu persamaan menjadi benar disebut dengan solusi atau penyelesaian (Hulu & Sinaga, 2019).

Banyak penulis yang menggunakan istilah persamaan untuk kesamaan yang bukan identitas. Sebagai contoh,

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

adalah identitas, sedangkan $(x+1)^2 = 2x^2 + x + 1$ adalah persamaan yang memiliki akar $x = 0$ dan $x = 1$.

Huruf-huruf awal alfabet, seperti $a, b, c, \ldots$ sering dipakai sebagai konstanta, sedangkan huruf-huruf di akhir alfabet seperti x, y dan z umumnya digunakan untuk mewakili variabel (Hulu & Sinaga, 2019).

2.1.1 Persamaan Linear

Persamaan linear adalah persamaan di mana pangkat tertinggi dari variabelnya adalah satu (Ayres & Schmidt, 2004).

Dalam bentuk persamaan linear dengan n variabel, dapat dinyatakan dengan bentuk $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, di mana $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dan b adalah bilangan-bilangan real, sementara $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah variabelnya (Leon, 2001).

2.1.2 Persamaan Nonlinear

Persamanan nonlinear adalah persamaan yang bertujuan mencari akar x sehingga, $(x) = 0$. Karena fungsi $(x) = 0$ tidak memiliki rumus khusus, berbagai metode pendekatan digunakan untuk menentukan nilai akarnya. Dalam sistem persamaan nonlinear, terdiri dari himpunan nilai x yang secara bersamaan memenuhi semua persamaan sehingga hasilnya sama dengan nol. Penentuan akar dari persamaan tunggal juga merupakan bagian dari suatu masalah. Suatu masalah yang berkaitan dengan penyelesaian sistem nonlinear adalah menemukan lokasi akar-akar dari himpunan persamaan nonlinear (Asminah & Sahfitri, 2012).

Sistem persamaan nonlinear adalah sekumpulan persamaan nonlinear yang melibatkan fungsi tujuannya saja atau fungsi kendala yang berbentuk nonlinear, di mana pangkat variabelnya lebih dari satu. Beberapa fungsi tujuan dalam persamaan nonlinear tidak dapat diselesaikan secara analitik, tetapi dapat dipecahkan menggunakan metode-metode khusus yang dibuat untuk menangani masalah persamaan nonlinear (Utami, dkk., 2013).

Menurut Basuki (2005), secara umum semua persamaan yang berbentuk $f(x) = 0$ dikategorikan sebagai nonlinear jika fungsi yang terlibat merupakan fungsi nonlinear terhadap variabelnya. Contoh dari persamaan nonlinear adalah sebagai berikut:

$$f(x, y) = xy^2 + x + 10y + 8 = 0 \tag{2.1}$$

Penyelesaian persamaan nonlinear melibatkan penentuan akar-akar dari persamaan nonlinear, di mana akar dari persamaan $f(x) = 0$ adalah nilai x yang membuat nilai $f(x) = 0$.

2.2 Sistem Persamaan Nonlinear

Sistem persamaan nonlinear merupakan sekumpulan persamaan nonlinear yang saling terkait untuk mencapai tujuan tertentu (Munir, 2006). Berikut adalah bentuk dari persamaan-persamaan tersebut:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

dengan hasil penyelesaiannya adalah $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n})^{\boldsymbol{T}}$.

Secara umum penyelesaian sistem persamaan nonlinear sulit dilakukan secara analitik, oleh karena itu, digunakan pendekatan numerik untuk menyelesaikannya. Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk menangani masalah matematis melalui operasi hitung seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Hasil yang diperoleh dari metode numerik merupakan sebuah perkiraan. Hampiran, pendekatan, atau aproksimasi (*approximation*) diartikan sebagai nilai yang mendekati solusi sejati atau sebenarnya (Chapra and Canale, 2002).

2.3 Metode Numerik

Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk menyusun masalah matematik sehingga dapat diselesaikan menggunakan operasi perhitungan dasar seperti penjumlahan, perkalian, dan pembagian (Munir, 2006).

Perbedaan utama antara metode numerik dengan metode analitik terletak pada dua aspek. Pertama, solusi dari metode numerik selalu berupa angka, sedangkan metode analitik memberikan solusi dalam bentuk fungsi matematis, yang kemudian dapat dievaluasi untuk menghasilkan nilai numerik. Kedua, metode numerik menghasilkan solusi yang merupakan pendekatan atau hampiran terhadap solusi yang sebenarnya, sehingga sering disebut sebagai solusi hampiran atau solusi pendekatan. Namun, solusi hampiran dapat dibuat dengan tingkat ketelitian yang tinggi (Hidayati dkk., 2022).

2.4 Galat (*error*)

Secara umum, metode numerik tidak fokus untuk memperoleh jawaban yang eksak dari masalah yang dipecahkan. Penyelesaian yang diperoleh berupa penyelesaian pendekatan, oleh karena itu biasanya timbul galat (*error*). Galat (*error*) menunjukkan seberapa dekat solusi hampiran tersebut dengan solusi sebenarnya. Semakin kecil galatnya, semakin akurat solusi numerik yang diperoleh (Hidayati dkk., 2022).

Error yang kecil menunjukkan adanya konvergenitas (Munif dan Aries, 2003). Dalam proses iterasi, konvergenitas terjadi jika *error* pada iterasi pertama lebih besar dari *error* pada iterasi kedua, *error* iterasi kedua lebih besar daripada iterasi ketiga dan *error* iterasi ke-n lebih besar dari iterasi ke-$n + 1$. Hal ini dapat dituliskan secara matematis sebagai berikut:

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \cdots > \varepsilon_n > \varepsilon_{n+1}$$

konvergenitas tersebut merupakan syarat penyelesaian pada perhitungan numerik dengan proses iterasi.

2.5 Metode Gauss-Seidel

Metode Gauss-Seidel merupakan cara penyelesaian sistem persamaan nonlinear dengan menentukan nilai x_i^{n+1} berdasarkan nilai x_i^n yang paling baru (Ripai, 2012).

Persamaan umum untuk metode Gauss-Seidel diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_1^{i+1} &= g_1\left(x_1^i, x_2^i, x_3^i, \ldots, x_n^i\right) \\ x_2^{i+1} &= g_2\left(x_1^{i+1}, x_2^i, x_3^i, \ldots, x_n^i\right) \\ \vdots &= \qquad \vdots \\ x_n^{i+1} &= g_n\left(x_1^{i+1}, x_2^i, \ldots, x_{n-1}^i, x_n^i\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Iterasi dimulai dengan memberikan nilai awal untuk x:

$$x_i^{(0)} = \begin{matrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_{n^{(0)}} \end{matrix}$$

Iterasi akan berhenti jika:

$$x_1^{i+1} - x_1^i < \varepsilon$$

atau

$$\frac{x_1^{i+1} - x_1^i}{x_1^{i+1}} < \delta,$$

untuk $i = 1,2,3, \ldots, n$

Contoh 2.1

Selesaikan sistem persamaan nonlinear berikut dengan metode Gauss-Seidel:

$$x^2 - 2y = 3$$

$$4x - y^2 \quad = -1$$

dengan toleransi galat $\varepsilon = 0.00001$

Penyelesaian:

Langkah 1:

Menentukan fungsi analitik dari sistem persamaan nonlinear sebagai berikut:

$$f_1 x, y = x^2 - 2y - 3 = 0$$

$$f_2 x, y = 4x - y^2 + 1 = 0$$

dan solusi analitiknya adalah:

$$g_1 x, y = \sqrt{2y + 3}$$

$$g_2 x, y = \sqrt{4x + 1}$$

Langkah 2:

Menentukan nilai awal untuk nilai $x_0 = i + 1$ dan $y_0 = 2$

Langkah 3:

Prosedur iterasinya adalah:

$$x^{i+1} = \sqrt{2y^i + 3}$$

$$y^{i+1} = \sqrt{4x^{i+1} + 1}$$

Melakukan proses iterasi:

Iterasi ke-1

$$x^1 = \sqrt{2y + 3} = \sqrt{2(2) + 3} = 2.64575$$

$$y^{(1)} = \sqrt{4x + 1} = \sqrt{4(2.64575) + 1} = 3.40338$$

Iterasi ke-2

$$x^2 = \sqrt{2(3.40338) + 3} = \sqrt{6.80676} = 3.13157$$

$$\varepsilon_x = 3.13157 - 2.64575 = 0.48582$$

$$y^{(2)} = \sqrt{4(3.13157) + 1} = \sqrt{13.52628} = 3.67781$$

$$\varepsilon_y = 3.67781 - 3.40338 = 0.27443$$

Iterasi ke-3

$$x^{(3)} = \sqrt{2(3.67781) + 3} = \sqrt{10.35262} = 3.21801$$

$$\varepsilon_x = 3.21801 - 3.13157 = 0.08644$$

$$y^{(3)} = \sqrt{4(3.21801) + 1} = \sqrt{13.87204} = 3.72452$$

$$\varepsilon_y = 3.72452 - 3.67781 = 0.04671$$

$$\vdots$$

Iterasi ke-10

$$x^{(10)} = \sqrt{2(3.73382) + 3} = \sqrt{10.46764} = 3.23537$$

$$\varepsilon_x = 3.23537 - 3.23536 = 0.00001$$

$$y^{10} = \sqrt{4\ (3.23537) + 1} = \sqrt{13.9415} = 3.73383$$

$$\varepsilon_y = 3.73383 - 3.73382 = 0.00001$$

Berdasarkan perhitungan pada iterasi ke-10 diperoleh nilai yang mendekati nilai konvergensi yang diharapkan, yaitu nilai $x = 3.23537$ dan $y = 3.73383$ dengan galat yang kecil dari toleransi galat $\varepsilon = 0.00001$ yaitu galat untuk $x = 0.00001$ dan $y = 0.00001$.

2.6 Metode Titik Tetap

Metode titik tetap yang dikenal juga sebagai metode iterasi sederhana, disebut iterasi sederhana karena proses pembentukan prosedur iterasinya relatif mudah. Dalam metode ini, x dipisahkan sehingga persamaan $f(x) = 0$ setara dengan $x = g(x)$ dan prosedur iterasinya berbentuk $x_{r+1} = g(x_r)$.

Prosedur iterasi titik tetap untuk sistem dengan dua persamaan nonlinear:

$$x_{r+1} = g_1(x_r, y_r) \tag{2.4}$$

$$y_{r+1} = g_2(x_r, y_r) \tag{2.5}$$

di mana $r = 0,1,2, ...$

Iterasi akan berhenti jika:

$$|x_{r+1} - x_r| = \varepsilon$$

atau

$$\left|\frac{|x_{r+1} - x_r|}{x_{r+1}}\right| < \delta$$

dengan ε dan δ yang telah ditetapkan sebelumnya (Hidayati dkk., 2022).

Syarat perlu kekonvergenan metode iterasi titik tetap untuk sistem persamaan nonlinear adalah:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y} < 1$$

dan (2.6)

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} < 1$$

di dalam selang yang mengandung titik tetap p, q.

Contoh 2.2

Selesaikan sistem persamaan nonlinear berikut dengan metode titik tetap:

$$x^2 - 2y = 3$$

$$4x - y^2 = -1$$

dengan toleransi galat $\varepsilon = 0.00001$.

Penyelesaian:

Langkah 1:

Mengubah bentuk persamaan $f_1(x, y)$ dan $f_2(x, y)$ menjadi bentuk $x = g_1(x, y)$ dan $y = g_2(x, y)$:

$x = \sqrt{2y + 3}$

$y = \sqrt{4x + 1}$

jadi,

$g_1(x, y) = \sqrt{2y + 3}$

$g_2(x, y) = \sqrt{4x + 1}$

kemudian mencari turunan dari fungsi di atas, yaitu:

$\frac{\partial g_1}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{2y + 3}}$

$\frac{\partial g_2}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt{4x + 1}}$; $\frac{\partial g_2}{\partial y} = 0$

Langkah 2:

Menentukan nilai tebakan awal $x_0 = 1$ dan $y_0 = 2$, kemudian menghitung nilai turunan fungsi yaitu sebagai berikut:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{2y + 3}} = \frac{1}{\sqrt{2(2) + 3}} = \frac{1}{\sqrt{7}} = 0.378$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{4(1) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.894$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial y} = 0$$

Sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y} = 0.378 < 1$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} = 0.894 < 1$$

Jadi, syarat melakukan iterasi terpenuhi.

Langkah 3:

Prosedur iterasinya adalah:

$x_{r+1} = \sqrt{2y_r + 3}$

$y_{r+1} = \sqrt{4x_r + 1}$

Melakukan iterasi:

Iterasi ke-1

$x_{(1)} = \sqrt{2(2) + 3} = \sqrt{7} = 2.64575$

$y_{(1)} = \sqrt{4(1) + 1} = \sqrt{5} = 2.23607$

Iterasi ke-2

$x_{(2)} = \sqrt{2(2.23607) + 3} = \sqrt{7.47214} = 2.73352$

$\varepsilon_x \quad = 2.73352 - 2.64575 = 0.08777$

$y_{(2)} = \sqrt{4(2.64575) + 1} = \sqrt{11.583} = 3.40338$

$\varepsilon_y \quad = 3.40338 - 2.23607 = 1.16731$

Iterasi ke-3

$x_{(3)} = \sqrt{2(3.40338) + 3} = \sqrt{9.80676} = 3.13157$

$\varepsilon_x \quad = 3.13157 - 2.73352 = 0.39805$

$y_{(3)} = \sqrt{4(2.73352) + 1} = \sqrt{11.93408} = 3.45457$

$\varepsilon_y \quad = 3.45457 - 3.40338 = 0.05119$

$\vdots$

Iterasi ke-19

$x_{(19)} = \sqrt{2(3.73382) + 3} = \sqrt{10.46764} = 3.23537$

$\varepsilon_x \quad = 3.23537 - 3.23537 = 0.00000$

$y_{(19)} \quad = \sqrt{4(3.23537) + 1} = \sqrt{13.94148} = 3.73383$

$\varepsilon_y \quad = 3.73383 - 3.73382 = 0.00001$

Berdasarkan perhitungan iterasi ke-19 diperoleh nilai yang mendekati nilai konvergensi yang diinginkan yaitu nilai $x = 3.23537$ dan $y = 3.73383$ dengan galat dari toleransi galat $\varepsilon = 0.00001$ yaitu galat untuk $x = 0.00000$ dan $y = 0.00001$.

2.7 Metode Newton

Metode numerik yang digunakan untuk mencari akar persamaan nonlinier salah satunya adalah metode Newton (Anton & Rorres, 2013). Dalam menggunakan metode Newton untuk menyelesaikan persamaan nonlinear $f(x_n)$ diperlukan titik tebakan awal seta turunan pertama $f'(x_n)$ pada setiap iterasi. Rumus iterasi untuk metode Newton adalah sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; f'(x_n) \neq 0, n = \mathbb{Z}^+.$$

Rumus metode Newton untuk mencari akar suatu sistem persamaan nonlinier adalah:

$$\boldsymbol{X_{n+1}} = \boldsymbol{X_n} - \boldsymbol{J}(\boldsymbol{X_n})^{-1}.\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X_n}), n = \mathbb{Z}^+. \tag{2.7}$$

Persamaan (2.7) memerlukan tebakan awal $\boldsymbol{X_n}$ dan matriks Jacobian $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{X_n})$. Matriks Jacobian $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{X_n})$ merupakan turunan pertama dari fungsi $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X_n})$ dan dapat ditulis sebagai $\boldsymbol{F'}(\boldsymbol{X_n})$. Matriks $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{X_n})$ harus berupa matriks nonsingular. Kriteria untuk menghentikan iterasi metode Newton adalah Ketika norm galat iterasi menjadi lebih kecil dari galat toleransi, yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\|\boldsymbol{E}_{n+1}\| < E_\delta, \tag{2.8}$$

di mana $\boldsymbol{E}_{n+1} = |\boldsymbol{X_{n+1}} - \boldsymbol{X_n}|$.

2.7.1 Metode *Midpoint*

Salah satu modifikasi metode Newton adalah metode *Midpoint*. Metode ini diusulkan oleh Ozban (2004) dengan menggabungkan pendekatan metode Newton, dengan aturan *midpoint* dan aturan trapesium (Ozban, 2004). Rumus iterasi untuk metode *Midpoint* adalah sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{(f'(x_n) + f'(x_{n+1})^*)}{2}}, n = \mathbb{Z}^+$$

di mana $f'(x_n)$ adalah turunan pertama dari persamaan yang diberikan $f(x_n)$ sementara $(x_{n+1})^*$ dihitung menggunakan metode Newton. Dalam pencarian akar sistem persamaan nonlinier, metode *Midpoint* memerlukan tebakan awal $\boldsymbol{X_n}$ seta titik tengah dari turunan pertama $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X_n})$ atau $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{X_n})$ dengan $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{X^*_{n+1}})$ merupakan matriks Jacobian dari iterasi $n+1$ yang diperoleh dari metode Newton. Rumus metode *Midpoint* untuk mencari akar suatu sistem nonlinier adalah:

$$\boldsymbol{X_{n+1}} = \boldsymbol{X_n} - \left(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{X_n}) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{X^*_{n+1}})\right)^{-1}.2\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X_n}), n = \mathbb{Z}^+ \quad (2.9)$$

di mana $\boldsymbol{X^*_{n+1}} = \boldsymbol{X_n} - \boldsymbol{J}(\boldsymbol{X_n})^{-1}.\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X_n})$ dan matriks Jacobian $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{X_n})$ berupa matriks nonsingular. Kriteria untuk menghentikan iterasi dalam metode *Midpoint* adalah ketika galat iterasi lebih kecil dari galat toleransi yang ditentukan, sebagaimana ditunjukkan pada persamaan (2.8).

2.7.2 Metode Halley

Metode Halley adalah perluasan dari metode Newton yang diperoleh dengan menggunakan deret Taylor yang dipotong hingga orde kedua. Rumus metode Halley digunakan untuk mencari akar dari persamaan $f(x_n)$ dengan tebakan awal x_n adalah:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{\left(2f'(x_n)\right)^2 - f(x_n)f''(x_n)}, n = \mathbb{Z}^+$$

di mana $f'(x_n)$ merupakan turunan pertama dari $f(x_n)$. Sedangkan rumus untuk mencari akar suatu sistem persamaan adalah:

$$\boldsymbol{X_{n+1}} = \boldsymbol{X_n} - \left(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{X_n}) - \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes \left\{\left(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{X_n})^{-1}.\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X_n})\right)^T \boldsymbol{H_i}(\boldsymbol{X_n})\right\}\right)^{-1}.\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X_n}), n = \mathbb{Z}^+ \quad (2.10)$$

di mana $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{X_n})$ adalah matriks Jacobian yang merupakan turunan pertama dari fungsi $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X_n})$, $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X_n})$ adalah matriks Hessian yang merupakan turunan kedua dari fungsi $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X_n})$ dan e_i adalah vektor berukuran $k \times 1$ dengan nilai 1 jika $i = j$ dan 0 untuk $i \neq j$ serta $\otimes$ adalah *kronecker product* (Hafiz & Baghdad, 2012). Kriteria pemberhentian iterasi metode *Midpoint* adalah ketika galat iterasi lebih kecil dari pada galat toleransi yang diberikan atau dapat dilihat pada persamaan (2.8).

2.7.3 Metode NMH

Metode NMH adalah salah satu metode iterasi yang digunakan untuk menentukan nilai akar-akar persamaan dengan iterasi tiga langkah yang menggabungkan formula pada persamaan (2.7), persamaan (2.9) dan persamaan (2.10). Jika nilai $\boldsymbol{X_{n+1}}$ pada persamaan (2.7) dan persamaan (2.10) masing-masing disebut sebagai $\boldsymbol{Z_n}$ dan $\boldsymbol{Y_n}$ maka rumus metode NMH untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinier dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Z_n} &= \boldsymbol{X_n} - \boldsymbol{J}(\boldsymbol{X_n})^{-1}.\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X_n}), n = \mathbb{Z}^+ \\
\boldsymbol{Y_n} &= \boldsymbol{X_n} - \left(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{X_n}) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{Z_n})\right)^{-1}.2\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X_n}), n = \mathbb{Z}^+ \\
\boldsymbol{X_{n+1}} &= \boldsymbol{Y_n} - \left(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{Y_n}) - \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{2} e_i \otimes \right. \\
&\qquad \left. \left\{\left(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{Y_n})^{-1}.\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y_n})\right)^T \boldsymbol{H_i}(\boldsymbol{Y_n})\right\}\right)^{-1}.\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y_n}), n = \mathbb{Z}^+.
\end{aligned}$$

Adapun algoritma metode NMH sebagai berikut:

1. Definisikan sistem persamaan nonlinier dua variabel $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$.
2. Tentukan galat toleransi $E_\delta = 10^{-9}$ nilai awal $\boldsymbol{X_n}$ dengan $n = \mathbb{Z}^+$.
3. Tentukan nilai $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X_n})$ dan $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{X_n})$.
4. Hitung nilai $\boldsymbol{Z_n}$ dengan metode Newton:

   $\boldsymbol{Z_n} = \boldsymbol{X_n} - \boldsymbol{J}(\boldsymbol{X_n})^{-1}.\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X_n})$

   Hitung nilai $\boldsymbol{Y_n}$ dengan metode *Midpoint*:

   $\boldsymbol{Y_n} = \boldsymbol{X_n} - \left(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{X_n}) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{Z_n})\right)^{-1}.2\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X_n})$

   Hitung nilai $\boldsymbol{X_{n+1}}$ dengan metode Halley:

   $\boldsymbol{X_{n+1}} = \boldsymbol{Y_n} - [\boldsymbol{J}(\boldsymbol{Y_n}) - \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{2} e_i \otimes \left(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{Y_n})^{-1}.\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y_n})\right)^T \boldsymbol{H_i}(\boldsymbol{Y_n})]^{-1}.\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y_n})$.
5. Tentukan nilai galat iterasi:

   $\boldsymbol{E_{n+1}} = |\boldsymbol{X_{n+1}} - \boldsymbol{X_n}|$, dan

   norm dari galat iterasi:

   $\|\boldsymbol{E_{n+1}}\| = \sqrt{x^2 + y^2}, x$ dan $y \in \boldsymbol{E_{n+1}}$.
6. a. jika nilai $\|\boldsymbol{E_{n+1}}\| \geq E_\delta$, ganti $\boldsymbol{X_n}$ dengan $\boldsymbol{X_{n+1}}$ dan ulangi langkah 3.

   b. jika $\|\boldsymbol{E_{n+1}}\| < E_\delta$ maka iterasi berhenti.

Contoh 2.3

Selesaikan sistem persamaan nonlinear berikut dengan metode NMH:

$$x^2 - 2y = 3$$

$$4x - y^2 = -1$$

dengan toleransi galat $\varepsilon = 10^{-9}$.

Penyelesaian:

Dengan menggunakan algoritma metode NMH, Tabel 1 adalah solusi numerik iterasi pertama dan seterusnya:

Tabel 1. Hasil Iterasi Metode NMH pada *Wolfram Mathematica 9.0.*

iter	x	y	galat
1	0	0	$-$
2	0.2825705924	-1.460065723	1.487157710
3	0.2828901952	-1.459986568	0.000329258

iter	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$	**galat**
4	0.2828901952	-1.459986568	0

Berdasarkan Tabel 1 iterasi ke-4 diperoleh nilai yang diinginkan yaitu nilai $x = 0.2828901952$ dan $y = -1.459986568$ dengan galat dari toleransi galat $\varepsilon = 10^{-9}$ yaitu galat untuk $x = 0$ dan $y = 0$.

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun pelajaran 2023/2024 di jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan secara studi literatur yaitu mempelajari buku-buku yang terdapat di ruang baca jurusan matematika atau Perpustakaan Daerah Provinsi Lampung serta artikel yang menunjang proses penelitian.

Adapun langkah-langkah yang digunakan adalah sebagai berikut:

Mempelajari pengertian dan teorema-teorema yang mendasari penelitian ini.

Menetapkan kasus sebagai awal untuk membandingkan metode.

Menyusun algoritma untuk metode Gauss-Seidel, metode titik tetap, dan Newton *Midpoint* Halley (NMH).

Membuat dan menyusun program komputer berdasarkan definisi dan teorema yang telah ditetapkan menggunakan software *Mathematica.*

Menganalisa dan membandingkan iterasi serta galat dari metode Gauss-Seidel, metode titik tetap, dan metode Newton *Midpoint* Halley (NMH).

Menentukan kesimpulan.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan, kualitas metode dapat dinilai dari akurasi galat dan jumlah iterasinya dalam menyelesaikan sistem persamaan nonlinear:

Kasus 1.

$$2x^4 + y^3 - z^6 = 18$$
$$10x^4 + 22y^3 - 2z^6 = 98$$
$$x^4 - 8y^3 + 10z^6 = 6$$

Kasus 2.

$$3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0$$
$$x_1^2 - 81(x_2 + 0{,}1)^2 + sinx_3 + 1.06 = 0$$
$$e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

Metode Gauss-Seidel menghasilkan rata-rata 8.5 iterasi, dengan galat rata-rata sebesar $0{,}0000000005$. Metode titik tetap menghasilkan rata-rata 37.5 iterasi, dengan galat rata-rata sebesar $0{,}0000000005$. Metode NMH menghasilkan rata-rata 3.5 iterasi, dengan galat rata-rata sebesar 0. Sehingga dengan melihat dari rata-rata galat dan iterasi yang diperoleh dapat disimpulkan bahwa metode NMH lebih baik dibandingkan dengan metode Gauss-Seidel dan metode titik tetap untuk solusi sistem persamaan nonlinear.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. & Rorres, C. 2013. *Elementary Linear Algebra*. 11th Edition. John Wiley & Sons, Inc: United States of America.

Asminah, & Sahfitri, V. 2012. Implementasi Dana Analisis Tingkat Akurasi Software Penyelesaian Persamaan Non Linear Dengan Metode Fixed Point Iteration Dan Metode Bisection. *Jurnal Informatika Universitas Bina Darma*. **1**(1): 1-8.

Ayres, F., & Schmidt, P.A. 2004. *Matematika Universitas*. Ed. ke-**3**. Erlangga: Jakarta.

Basuki, A. 2005. *Metode Numerik dan Algoritma Komputasi*. Ed. ke-**1**. Andi: Yogyakarta.

Cahyono, E. 2013. *Pemodelan Matematika*. Ed. ke-**1**. Graha Ilmu: Yogyakarta.

Chapra, S. & Canale, R. 1991. *Metode Numerik Untuk Teknik dengan Penerapan pada Komputer Pribadi*. Ed. ke-**1**. Universitas Indonesia (UI-Press): Jakarta.

Chapra, S. & Canale, R. 2002. *Numerical Methods for Engineers: With Software and Programming Applications*. 4th Edition. McGraw-Hill Education: New York.

Hafiz, M.A., & Baghdad, S.M. 2012. *Extended and Modified Halley's Iterative Method for Solving Nonlinear Systems*. *J. Math. Comput. Sci*. **2**(5): 1512-1521.

Hidayah, F.N., Yundari, & Kiftiah, M. 2019. Metode Newton *Midpoint* Halley (NMH) untuk Menyelesaikan Sistem Persamaan Nonlinier. *Jurnal UNTAN*. **8**(4): 845-850.

Hidayati, T., Aedi, W.G., & Masitoh, L.F. 2022. *Metode Numerik*. Ed. ke-**1**. Unpam Press: Tangerang Selatan.

Hulu, V.T. & Sinaga, T.R. 2019. *Analisis data Statistik Parameter Aplikasi SPSS dan Statcal*. Ed. ke-**11**. Yayasan Kita Menulis: Medan.

Leon, S.J. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya*. Ed. ke-**5**. Erlangga: Jakarta.

Masykur, M. & Halim, A. 2009. Mathematical Intelligence Cara Cerdas Melatih Otak dan Menanggulangi Kesulitan Belajar. *Yogyakarta: Ar-Ruzz Media, 2017*. **1**(2): 42-43.

Monice, Halilintar, M.P., & Zulfahri. 2023. Studi Perbandingan Metode Gauss-Seidel dan Metode Newton Raphson dalam Rekonfigurasi Penyulang Okura PT.PLN Unit Layanan Pelanggan (ULP) Rumbai. *Jurnal Universitas Muhammadiyah Sumatera Barat*. **6**(2): 76-93.

Munif, Abdul, & Aries, H.P. 2003. *Cara Praktis Penguasaan dan Penggunaan Metode Numerik*. Ed. ke-**2**. Prima Printing: Surabaya.

Munir, R. 2006. *Metode Numerik*. Ed. ke-**1**. Informatika: Bandung.

Ozban, A.Y. 2004. *Some New Variants of Newton's Method*. *Applied Mathematic Letters*. **17**(6): 677-682.

Prihandono, B. 2015. Penyelesaian Persamaan Nonlinear Berderajat Dua Menggunakan Metode Hopfield Modifikasi. *Jurnal UNTAN*. **4**(3): 353-362.

Ripai. 2012. Pengantar Analisis dan Komputasi Metode Numerik. *Jurnal Istek*. **10**(2): 62-76.

Ritonga, J. & Suryana, D. 2019. Perbandingan Kecepatan Konvergensi Akar Persamaan Nonlinier Metode Titik Tetap dengan Metode Newton Raphson

Menggunakan Matlab. *Jurnal Informatika dan Sistem Informasi*. **11**(2): 51-64.

Sahid. 2005. *Pengantar Komputasi Numerik dengan Matlab*. Ed. ke-**1**. Andi: Yogyakarta.

Salwa, H.N., Syahruddin, Sulistiana, L., Nurmayanti, E., Rahmatin, A., & Negara, H.R.P. 2022. Perbandingan Metode Midpoint Halley, Metode Olver dan Metode Chabysave dalam Penyelesaian Akar-Akar Persamaan Non-Linear. *Indonesian Journal of Engineering*. **3**(1): 1-15.

Sitompul, H.A. & Siahaan, E.W.B. 2022. Solusi Numerik Persamaan Diferensial Biasa Orde Dua Dengan Sistem Persamaan Nonlinier. *Jurnal Universitas Darma Agung*. **11**(2): 379-389.

Utami, N.N.R., Widana, N. & Asih, N.M. 2013. Perbandingan Solusi Sistem Persamaan Nonlinear Menggunakan Metode Newton-Raphson dan Metode Jacobian. *E-Jurnal Matematika*. **2**(2): 11-17.