KARAKTERISASI SUBSEMIRING *ROUGH* PADA HIMPUNAN BERHINGGA

Tesis

Oleh

MARYAM SALSABILA HASANA
2227031002

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

ABSTRAK

THE CHARACTERIZATION SUBSEMIRING *ROUGH* BY FINITE SETS

By

Maryam Salsabila Hasana

Subsemiring *rough*, is an algebraic structure of semiring expansion. An ordered pair of universal sets (U, θ) where U is a universal set and θ is where an equivalence relation is a relation that has three properties, namely reflexive, symmetric and transitive. Where the subsemiring *rough* is a subset of the semiring *rough*. In this study, several examples are given for constructing subsemiring *rough* on finite sets, using approximation spaces with the notation $\overline{X}$ and $\underline{X}$. Then it shows that there are subsemiring properties *rough* in finite sets. After that it can be determined using a *Python* program

Keywords:*Approximation space, rough set, rough semiring, rough subsemiring, Python program.*

ABSTRAK

KARAKTERISASI SUBSEMIRING *ROUGH* PADA HIMPUNAN BERHINGGA

Oleh

Maryam Salsabila Hasana

Subsemiring *rough* adalah suatu struktur aljabar dari perluasan semiring. Pasangan berurut himpunan semesta (U, θ) dengan U adalah himpunan universal dan θ adalah suatu relasi ekuivalensi merupakan suatu relasi yang memiliki tiga sifat yaitu refleksif, simetris, dan transitif. Dimana subsemiring *rough* merupakan himpunan bagian dari semiring *rough*. Pada penelitian ini, diberikan beberapa contoh untuk mengkonstruksi subsemiring *rough* pada himpunan berhingga, menggunakan ruang aproksimasi dengan notasi $\overline{X}$ dan $\underline{X}$. Kemudian menunjukkan bahwa terdapat sifat -sifat subsemiring *rough* pada himpunan berhingga. Setelah itu dapat ditentukan dengan menggunakan program *Python*.

Kata-kata kunci: *Ruang aproksimasi, himpunan rough, semiring, subsemiring rough, program Python.*

Judul Skripsi	:	**KARAKTERISASI SUBSEMIRING *ROUGH* PADA HIMPUNAN BERHINGGA**
Nama Mahasiswa	:	***Maryam Salsabila Hasana***
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2227031002**
Program Studi	:	**Magister Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Fitriani, S.Si.,M.Sc.	**Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D.**
NIP 19840627 200604 2 001	NIP 19631108 198902 2 001

a.n

2. Ketua Program Studi Magister Matematika

Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.
NIP. 19760411 200012 2 001

MENGESAHKAN

1. tim penguji

Ketua	:	**Dr. Fitriani, S.Si.,M.Sc.**	....
Sekretaris	:	**Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	:	**1. Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**	....
	:	**2. Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 19711001 200501 1 002

3. Direktur Program Pasca Sarjana

Prof. Dr. Ir. Murhadi, M.Si.
NIP. 19640326 199802 1 001

Tanggal Lulus Ujian Tesis: **9 Agustus 2024**

PERNYATAAN TESIS MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Maryam Salsabila Hasana**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2227031002**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul tesis	:	**KARAKTERISASI SUBSEMIRING *ROUGH* PADA HIMPUNAN BERHINGGA**

Dengan ini menyatakan bahwa tesis ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa tesis ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 9 Agustus 2024

Penulis,

METERAI TEMPEL

SEPULUH RIBU RUPIAH 10000

CBD35ALX287032085

Maryam Salsabila Hasana

KARAKTERISASI SUBSEMIRING *ROUGH*
PADA HIMPUNAN BERHINGGA

Tesis

Oleh

MARYAM SALSABILA HASANA
NPM. 2227031002

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2024

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori himpunan *rough* (*rough set theory*) merupakan teori himpunan pada matematika yang dikenalkan oleh Zdzislaw Pawlak pada tahun 1982 untuk pertama kali. Himpunan *rough* ini digunakan dalam menangani masalah yang bersifat ketidakjelasan dan ketidakpastian. Banyak peneliti yang telah mengkaji tentang teori himpunan *rough*, seperti penelitian yang dilakukan oleh Jerzy W. Grzymala-Busse pada tahun 2005 membahas mengenai himpunan *rough* dan penerapan himpunan *rough* pada struktur aljabar. Pada tahun 2004, Davvaz menyelidiki ring *rough* dan sifat-sifatnya. Selanjutnya pada tahun 2005, Miao dkk mempelajari tentang grup *rough*, subgrup *rough*, dan sifat-sifatnya. Selain itu, penelitian juga dilakukan oleh Isaac dan Neelima pada tahun 2013 mengenai ideal *rough*, serta berbagai penelitian lainnya.

Konsep dasar dari teori himpunan *rough* oleh Pawlak adalah relasi ekuivalensi. Menurut Barnier dan Feldman tahun 1990, relasi ekuivalensi merupakan relasi yang bersifat reflektif, simetris, dan transitif yang akan membentuk kelas-kelas ekuivalensi. Kelas ekuivalensi akan menentukan aproksimasi atas dan aproksimasi bawah suatu himpunan bagian dari himpunan semesta. Pasangan (U, θ) disebut ruang aproksimasi jika U merupakan suatu himpunan tak kosong dan θ adalah relasi ekuivalensi dari U.

Jika X subhimpunan dari U, aproksimasi bawah dari X yang dinotasikan dengan $\underline{X}$, pada ruang aproksimasi (U, θ) merupakan gabungan dari kelas ekuivalensi yang terdapat dalam X, sedangkan aproksimasi atas dari X yang dinotasikan dengan $\overline{X}$ pada ruang aproksimasi (U, θ) merupakan gabungan dari kelas-kelas ekuivalensi yang irisannya dengan X bukan merupakan himpunan kosong. Jika $\overline{X} - \underline{X} \neq \emptyset$, himpunan X disebut himpunan *rough*.

Ring merupakan struktur aljabar didefinisikan sebagai himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner serta memenuhi beberapa aksioma tertentu yaitu adalah grup komutatif, semigrup dan memenuhi hukum distributif kiri beserta hukum distributif kanan.

Pada tahun 1935, Vandiver memperkenalkan struktur yang disebut sebagai semiring. Kemudian konsep subsemiring *rough* dikenalkan oleh Zadeh, tahun 1965 yaitu subsemiring dari suatu semiring, yang merupakan struktur aljabar yang terdiri dari himpunan tak kosong yang dilengkapi dua operasi biner yang memenuhi sifat - sifat tertentu. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan dikontruksi subsemiring *rough* dan diselidiki sifat-sifatnya.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan pada penelitian ini adalah:

1. mengkonstruksi subsemiring *rough* dengan menggunakan himpunan berhingga,
2. menyelidiki sifat – sifat subsemiring *rough*,
3. membuat program penentuan subsemiring *rough* menggunakan bahasa pemrograman Python.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah menjadikan tulisan ini sebagai referensi dalam mempelajari penerapan himpunan *rough* pada struktur semiring *rough*.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai definisi, teorema dan pembahasan yang digunakan dalam penelitian ini. Definisi-definisi tersebut antara lain yaitu himpunan *rough* (*rough set*), relasi ekuivalensi, grup *rough* (*rough group*), ring *rough* (*rough ring*), dan semiring *rough*.

2.1 Relasi Ekuivalensi

Pada awal tahun 1980-an, Pawlak memperkenalkan himpunan *rough*. Metode himpunan *rough* adalah suatu pendekatan matematis untuk menganalisa pola data yang brsifat tak pasti. Himpunan *rough* berkaitan dengan relasi ekuivalensi, aproksimasi bawah dan aproksimasi atas. Oleh karena itu, sebelum diberikan definisi himpunan *rough* terlebih dahulu akan diberikan definisi relasi ekuivalensi aproksimasi bawah dan aproksimasi atas.

Definisi 2.1.1 Suatu relasi R atas suatu himpunan S adalah suatu himpunan bagian dari $S \times S = \{(a,b) : a,b \in S\}$. Dengan kata lain, suatu relasi R atas suatu himpunan S adalah suatu aturan yang menghubungkan unsur dari himpunan S ke unsur himpunan S itu sendiri (Suwilo dkk., 1987).

Contoh 2.1.2 Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Relasi R pada himpunan A didefinisikan sebagai berikut: $R = \{(a,b) \in A \times A | a < b\}$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} R =& \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ &(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)\}. \end{aligned}$$

Setelah memahami definisi dan contoh dari relasi, selanjutnya akan dibahas menge nai relasi ekuivalensi. Berikut diberikan definisi dari relasi ekuivalensi.

Definisi 2.1.3 Suatu relasi R pada suatu himpunan P disebut relasi ekuivalensi jika R memiliki sifat refleksif, simetris, dan transitif.

i. Relasi R bersifat refleksif, jika dan hanya jika xRx untuk setiap $x \in P$.

ii. Relasi R bersifat simetris, jika dan hanya jika xRy berakibat yRx, untuk setiap $x, y \in P$.

iii. Relasi R bersifat transitif jika dan hanya jika xRy dan yRz berakibat xRz, untuk setiap $x, y, z \in P$ (Barnier dan Feldman,1990)

Contoh 2.1.4 Didefinisikan relasi $\sim$ pada $\mathbb{Q}$ dengan aturan $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$ jika dan hanya jika $ad = bc$. Akan ditunjukkan relasi $\sim$ pada $\mathbb{Q}$ merupakan relasi ekuivalensi.

i. Akan ditunjukkan $\mathbb{Q}$ bersifat refleksif, yaitu $\frac{a}{b} \sim \frac{a}{b}$ untuk setiap $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Diberikan sebarang $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, karena $ab = ba$, diperoleh $\frac{a}{b} \sim \frac{a}{b}$. Jadi $\sim$ bersifat refleksif.

ii. Akan ditunjukkan $\sim$ bersifat simetris. Diberikan $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ dengan $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$ artinya $ad = bc$ atau $cb = da$ sehingga $\frac{c}{d} \sim \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Jadi $\sim$ bersifat simetris.

iii. Akan ditunjukkan $\sim$ bersifat transitif, yaitu jika $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$ dan $\frac{c}{d} \sim \frac{e}{f}$ maka $\frac{a}{b}$ $\sim \frac{e}{f}$. Diberikan sebarang $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$, dengan $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$ dan $\frac{c}{d} \sim \frac{e}{f}$, artinya $ad = bc$ dan $cf = de$. Dengan hukum kanselasi, sehingga $\frac{a}{b} \sim \frac{e}{f}$. Jadi $\sim$ bersifat transitif.

Oleh karena itu, $\sim$ merupakan relasi ekuivalensi.

Teorema 2.1.5 Jika S himpunan tak kosong dan $\sim$ merupakan relasi ekuivalensi pada S, maka relasi $\sim$ mengakibatkan terbentuknya partisi dan kelas ekivalensi yang memuat $\overline{a} = \{x \in S | x \sim a\}$ (Suwilo dkk., 1987).

Bukti. Diberikan sebarang $a \in S$. Bentuk kelas ekuivalensi $\overline{a} = \{x \in S | x \in a\}$. Akan ditunjukkan relasi $\sim$ membentuk partisi, yaitu $a \in \overline{a}$ dan a tidak termuat dalam kelas ekivalensi yang lain.

a) Karena relasi $\sim$ adalah relasi ekuivalensi, maka relasi $\sim$ bersifat refleksif, akibatnya $a \sim a$. Jadi $a \in \overline{a}$.

b) Misalkan $a \in \overline{b}$.

   (i) Diberikan sebarang $x \in \overline{a}$ maka $x \sim a$, karena $a \in \overline{b}$ maka $a \sim b$. Karena $x \sim a$, karena $a \sim b$ berdasarkan sifat transitif diperoleh $x \sim b$. Jadi $x \in \overline{b}$, sehingga dapat diperoleh $\overline{a} \subset \overline{b}$.

   (ii) Diberikan sebarang $y \in \overline{b}$, maka $y \sim b$. Diketahui bahwa $a \sim b$ dan relasi yang yang ekivalen, berlaku sifat simetris, yaitu jika $a \sim b$ maka $b \sim a$. Karena $y \sim b$ dan $b \sim a$ maka berdasar sifat transitif diperoleh $y \sim a$. Karena $y \sim a$ maka $y \in \overline{a}$, artinya $\overline{b} \subset \overline{a}$ yaitu $\sim \overline{a} = \{x \in S | x \sim a\}$.

■

Contoh 2.1.6 Relasi kekongruenan pada bilangan bulat merupakan relasi ekuivalensi yang mengakibatkan terbentuknya ekuivalen yang memuat a, yaitu

$$\begin{aligned} \overline{a} &= \{x \in \mathbb{Z} | x \equiv a (\text{mod } n)\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} | x = a + nk, k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Diperoleh kelas ekuivalensi yang terbentuk, yang merupakan ekuivalensi partisi dari $\mathbb{Z}$, yaitu:

$$
\begin{aligned}
\overline{0} &= \{x \in \mathbb{Z} | x = 0 + nk, k \in \mathbb{Z}\} \\
\overline{1} &= \{x \in \mathbb{Z} | x = 1 + nk, k \in \mathbb{Z}\} \\
\overline{2} &= \{x \in \mathbb{Z} | x = 2 + nk, k \in \mathbb{Z}\} \\
&\vdots \\
\overline{n-1} &= \{x \in \mathbb{Z} | x = (n-1) + nk, k \in \mathbb{Z}\} \\
\overline{n} &= \{x \in \mathbb{Z} | x = n + nk, k \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} | x = n(1+k), k \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} | x = np, p \in \mathbb{Z}\} = \overline{0}.
\end{aligned}
$$

Jadi, kelas ekuivalensi yang berbeda dapat dirangkum sebagai berikut: $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}$. Kemudian $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}\}$ disebut sebagai himpunan kelas residu modulo n dan disimbolkan dengan $\mathbb{Z}_n$.

Contoh 2.1.7 Didefinisikan relasi pada $\mathbb{Z}_{20}$ yaitu x, y $\in$Z$_{20}$, xRy jika dan hanya jika $4|(x-y)$. Didapatkan pasangan relasi terurut sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
R =&\{(\overline{0},\overline{0}), (\overline{0},\overline{4}), (\overline{0},\overline{12}), (\overline{0},\overline{16}), (\overline{0},\overline{20}), (\overline{1},\overline{1}), (\overline{1},\overline{5}), (\overline{1},\overline{9}), (\overline{1},\overline{13}), (\overline{1},\overline{17}), \\
&(\overline{2},\overline{2}), (\overline{2},\overline{6}), (\overline{2},\overline{10}), (\overline{2},\overline{14}), (\overline{2},\overline{18}), (\overline{3},\overline{7}), (\overline{3},\overline{11}), (\overline{3},\overline{15}), (\overline{3},\overline{19}), \\
&(\overline{4},\overline{4}), (\overline{4},\overline{8}), (\overline{4},\overline{12}), (\overline{4},\overline{16}), (\overline{5},\overline{1}), (\overline{5},\overline{5}), (\overline{5},\overline{9}), (\overline{5},\overline{13}), (\overline{5},\overline{17}), \\
&(\overline{6},\overline{2}), (\overline{6},\overline{6}), (\overline{6},\overline{10}), (\overline{6},\overline{14}), (\overline{6},\overline{18}), (\overline{7},\overline{3}), (\overline{7},\overline{7}), (\overline{7},\overline{11}), (\overline{7},\overline{15}), (\overline{7},\overline{19}), \\
&(\overline{8},\overline{0}), (\overline{8},\overline{8}), (\overline{8},\overline{12}), (\overline{8},\overline{16}), (\overline{9},\overline{1}), (\overline{9},\overline{5}), (\overline{9},\overline{9}), (\overline{9},\overline{13}), (\overline{9},\overline{7}), (\overline{10},\overline{2}), \\
&(\overline{10},\overline{6}), (\overline{10},\overline{10}), (\overline{10},\overline{14}), (\overline{10},\overline{18}), (\overline{11},\overline{3}), (\overline{11},\overline{7}), (\overline{11},\overline{11}), (\overline{11},\overline{15}), (\overline{11},\overline{19}), \\
&(\overline{12},\overline{0}), (\overline{12},\overline{4}), (\overline{12},\overline{8}), (\overline{12},\overline{12}), (\overline{12},\overline{16}), (\overline{13},\overline{1}), (\overline{13},\overline{5}), (\overline{13},\overline{9}), \\
&(\overline{13},\overline{13}), \overline{13},\overline{17}), (\overline{14},\overline{2}), (\overline{14},\overline{6}), (\overline{14},\overline{10}), (\overline{14},\overline{14}), (\overline{14},\overline{18}), (\overline{15},\overline{3}), (\overline{15},\overline{7}), \\
&(\overline{15},\overline{11}), (\overline{15},\overline{15}), (\overline{15},\overline{19}), (\overline{16},\overline{4}), (\overline{16},\overline{8}), (\overline{16},\overline{12}), (\overline{16},\overline{16}), (\overline{17},\overline{1}), \\
&(\overline{17},\overline{5}), (\overline{17},\overline{9}), (\overline{17},\overline{13}), (\overline{17},\overline{17}), (\overline{18},\overline{2}), (\overline{18},\overline{6}), (\overline{18},\overline{10}), (\overline{18},\overline{14}), (\overline{18},\overline{18}), \\
&(\overline{19},\overline{3}), (\overline{19},\overline{7}), (\overline{19},\overline{11}), (\overline{19},\overline{15}), (\overline{19},\overline{19})\}.
\end{aligned}
$$

Jadi, kelas – kelas ekuivalensi dari himpunan $\mathbb{Z}_{20}$ terhadap relasi ekuivalensi R yaitu:

$E_1 = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\}$,

$E_2 = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{9}, \overline{13}, \overline{17}\}$,

$E_3 = \{\overline{2}, \overline{6}, \overline{10}, \overline{14}, \overline{18}\}$,

$E_4 = \{\overline{3}, \overline{7}, \overline{11}, \overline{15}, \overline{19}\}$.

Jadi, kelas ekuivalensi dari himpunan $\mathbb{Z}_{20}$ adalah E_1, E_2, E_3 dan E_4.

2.2 Ruang Aproksimasi

Setelah memahami definisi dan contoh mengenai relasi ekuivalensi, selanjutnya dibahas definisi dari ruang aproksimasi.

Definisi 2.2.1 Pasangan (U, θ) dengan $U \neq \emptyset$ dan θ merupakan relasi ekuivalensi pada U disebut ruang aproksimasi (Pawlak, 1982).

Untuk memahami Definisi 2.3.1, berikut akan diberikan contoh dari ruang aproksimasi, dengan himpunan $A \neq \emptyset$ dan relasi R merupakan relasi ekuivalensi.

Contoh 2.2.2 Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Pada $\mathbb{Z}$ didefinisikan relasi R dengan $(a, b) \in R$ jika dan hanya jika $a + b$ adalah bilangan genap. Akan ditunjukkan R merupakan relasi ekuivalensi.

1. Untuk setiap bilangan bulat $(a, a) \in \mathbb{Z}$ berlaku $(a, a) \in R$, karena $a + a$ adalah bilangan genap. Jadi R adalah relasi refleksif.

2. Untuk sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $(a, b) \in R$, sehingga $a + b$ adalah bilangan genap. Karena $a + b = b + a, b + a$ adalah bilangan genap dan akibatnya $(b, a) \in R$. Jadi R adalah relasi simetris.

3. Selanjutnya, jika $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$, oleh karena itu $a + b$ adalah bilangan genap dan $b + c$ adalah bilangan genap juga. Hal ini mengakibatkan $a + c = (a + b) + (b + c) - 2b$ adalah bilangan genap, sedemikian sehingga $(a, c) \in R$. Jadi R adalah relasi transitif. Jadi, R merupakan relasi ekuivalensi pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$.

Dari Contoh 2.2.2 pasangan $(\mathbb{Z}, R)$ merupakan ruang aproksimasi dengan R adalah suatu relasi ekuivalensi atas himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$.

2.3 Aproksimasi Atas dan Aproksimasi Bawah (*Upper Approximation and Lower Approximation*)

Selanjutnya diberikan definisi ruang aproksimasi yaitu aproksimasi atas dan aproksimasi bawah dari suatu himpunan.

Definisi 2.3.1 Diberikan pasangan (U, θ) adalah ruang aproksimasi dan X merupakan himpunan bagian dari semesta U. Aproksimasi atas dan aproksimasi bawah dituliskan sebagai berikut: $Apr : P(U) \rightarrow P(U) \times P(U)$. Aproksimasi bawah dan aproksimasi atas didefinisikan sebagai berikut:

1. $\overline{X} = \{x | [x]_\theta \cap X \neq \emptyset\}$.

2. $\underline{X} = \{x | [x]_\theta \subseteq X\}$.

$\overline{X}$ disebut aproksimasi atas dari X dan $\underline{X}$ disebut aproksimasi bawah dari X di ruang aproksimasi K (Miao dkk., 2005). Untuk memahami Definisi 2.3.1, berikut diberikan contoh aproksimasi atas dan aproksimasi bawah.

Contoh 2.3.2 Diberikan ruang aproksimasi (U, θ) dengan himpunan
$U = \{ x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}\}$ dan R relasi ekuivalensi pada U dengan kelas-kelas ekuivalensi sebagai berikut:
$E_1 = \{x_1, x_2\}$

$E_2 = \{x_3, x_7, x_{10}\}$

$E_3 = \{x_4\}$

$E_4 = \{x_5\}$

$E_5 = \{x_6\}$

$E_6 = \{x_8\}$

$E_7 = \{x_9\}$
Jika dipilih $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, maka aproksimasi atas dan aproksimasi bawah

adalah sebagai berikut:
$\underline{X} = E_1 \cup E_3$

$= \{x_1, x_2, x_4\}$ dan

$\overline{X} = E_1 \cup E_2 \cup E_3$

$= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7, x_{10}\}$.
Dengan demikian, $Apr(X) = (\{x_1, x_2, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7, x_{10}\})$.

Contoh 2.3.3 Diberikan ruang aproksimasi (U, θ) dengan $U = \mathbb{Z}_{26} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{25}\}$. Didefinisikan relasi R pada $\mathbb{Z}_{26}$ sebagai berikut. xRy Jika dan hanya jika $3|(x-y)$. Akan diberikan R merupakan relasi ekuivalensi, karena memenuhi tiga sifat:

a. Untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_{26}$ didefinisikan R himpunan $\mathbb{Z}_{26}$, yaitu xRx menunjukkan $3(x-x)$ = $3(0) = 0$. Oleh karena itu, R bersifat refleksif.

b. Untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_{26}$ didefinisikan R himpunan $\mathbb{Z}_{26}$, menunjukkan xRy $3(x-y)$ maka yRx $3(y-x)$ habis dibagi 3, dan $y - x = x - y$ = $-3k$ merupakan kelipatan dari 3 mod 26. Jadi R bersifat simetris.

c. Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}_{26}$ yaitu xRy dan yRz maka xRz, xRy dan yRz yaitu $3(x-y)$ habis dibagi 3, $x - y$= $3m$, dan $3(y-z)$ habis dibagi 3, $y - z$= $3n$ bilangan bulat, dan $3(x-z)$ habis dibagi 3, dari persamaan tersebut, maka $x - z$ = $(x-y)+(y-z)$ = $3m$ + $3n$ = 3 $(m+n)$, dan $3(x-z)$ habis dibagi 3. Dengan demikian, R memenuhi sifat transitif.

Oleh karena itu, pasangan $(\mathbb{Z}_{26}, R)$ merupakan ruang aproksimasi. Selanjutnya diperoleh kelas-kelas ekuivalensi dari himpunan $\mathbb{Z}_{26}$, dengan himpunan X sebagai berikut:
$X = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{25}\}$,

$$E_1 = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}, \overline{21}, \overline{24}\},$$
$$E_2 = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{7}, \overline{10}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{19}, \overline{22}, \overline{25}\},$$
$$E_3 = \{\overline{2}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{11}, \overline{14}, \overline{17}, \overline{20}, \overline{23}\}.$$

Diperoleh aproksimasi atas dari X adalah: $\overline{X} = E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \mathbb{Z}_{26}$.
Aproksimasi bawah dari X adalah $\underline{X} = \emptyset$. Dengan demikian, $Apr(X) = (\emptyset, \mathbb{Z}_{26})$.

Berikut Tabel *Cayley* $\cdot\mathbb{Z}_{26}$

Tabel 2.1 Tabel Cayley untuk Perkalian $\mathbb{Z}_{26}$

$\cdot_{26}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$	$\overline{9}$	$\overline{11}$	$\overline{15}$	$\overline{17}$	$\overline{19}$	$\overline{21}$	$\overline{23}$	$\overline{25}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$	$\overline{9}$	$\overline{11}$	$\overline{15}$	$\overline{17}$	$\overline{19}$	$\overline{21}$	$\overline{23}$	$\overline{25}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{9}$	$\overline{15}$	$\overline{21}$	$\overline{1}$	$\overline{7}$	$\overline{19}$	$\overline{25}$	$\overline{5}$	$\overline{11}$	$\overline{15}$	$\overline{23}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{15}$	$\overline{25}$	$\overline{9}$	$\overline{19}$	$\overline{3}$	$\overline{23}$	$\overline{7}$	$\overline{17}$	$\overline{1}$	$\overline{11}$	$\overline{21}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{21}$	$\overline{9}$	$\overline{23}$	$\overline{11}$	$\overline{25}$	$\overline{1}$	$\overline{15}$	$\overline{3}$	$\overline{17}$	$\overline{5}$	$\overline{19}$
$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{1}$	$\overline{19}$	$\overline{11}$	$\overline{3}$	$\overline{21}$	$\overline{5}$	$\overline{23}$	$\overline{15}$	$\overline{7}$	$\overline{25}$	$\overline{17}$
$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\overline{7}$	$\overline{3}$	$\overline{25}$	$\overline{21}$	$\overline{17}$	$\overline{9}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{23}$	$\overline{19}$	$\overline{15}$
$\overline{15}$	$\overline{15}$	$\overline{19}$	$\overline{23}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{9}$	$\overline{17}$	$\overline{21}$	$\overline{25}$	$\overline{3}$	$\overline{7}$	$\overline{11}$
$\overline{17}$	$\overline{17}$	$\overline{25}$	$\overline{7}$	$\overline{15}$	$\overline{23}$	$\overline{5}$	$\overline{21}$	$\overline{3}$	$\overline{11}$	$\overline{19}$	$\overline{1}$	$\overline{9}$
$\overline{19}$	$\overline{19}$	$\overline{5}$	$\overline{17}$	$\overline{3}$	$\overline{15}$	$\overline{1}$	$\overline{25}$	$\overline{11}$	$\overline{23}$	$\overline{9}$	$\overline{21}$	$\overline{7}$
$\overline{21}$	$\overline{21}$	$\overline{11}$	$\overline{1}$	$\overline{17}$	$\overline{7}$	$\overline{23}$	$\overline{3}$	$\overline{19}$	$\overline{9}$	$\overline{25}$	$\overline{15}$	$\overline{5}$
$\overline{23}$	$\overline{23}$	$\overline{15}$	$\overline{11}$	$\overline{5}$	$\overline{25}$	$\overline{19}$	$\overline{7}$	$\overline{1}$	$\overline{21}$	$\overline{15}$	$\overline{9}$	$\overline{3}$
$\overline{25}$	$\overline{25}$	$\overline{23}$	$\overline{21}$	$\overline{19}$	$\overline{17}$	$\overline{15}$	$\overline{11}$	$\overline{9}$	$\overline{7}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$

Berikut ini akan diberikan proposisi mengenai aproksimasi bawah dan aproksimasi atas.

Proposisi 2.3.1 Jika $X, Y \subset U$, maka berlaku sifat sebagai berikut:

1. $\underline{X} \subset X \subset \overline{X}$
2. $\underline{\emptyset} = \overline{\emptyset} = \emptyset$, $\underline{U} = \overline{U} = U$
3. $\underline{X \cap Y} = \underline{X} \cap \underline{Y}$
4. $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$
5. $X \subseteq Y$ berarti $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$ dan $\underline{X} \subseteq \underline{Y}$
6. $\underline{X} \cup \underline{Y} \subseteq \overline{X} \cup \overline{Y}$
7. $\overline{X \cap Y} \subseteq \overline{X} \cap \overline{Y}$ (Isaac dan Neelima, 2013).

Bukti

1. Jika $x \in \underline{X}$, maka $x \in [x]_R \subseteq X$. Oleh karena itu, $\underline{X} \subseteq X$. Selanjutnya, jika $x \subseteq \overline{X}$, maka $x \in [x]_R$ didapat $[x]_R \cap X \neq \emptyset$. Jadi $X \subseteq \overline{X}$. Dengan demikian $\underline{X} \subseteq X \subseteq \overline{X}$.

2. Jika $\underline{\emptyset} \subseteq \overline{\emptyset}$ dan $\overline{\emptyset} \subseteq \underline{\emptyset}$ maka $\underline{\emptyset} = \overline{\emptyset} = \emptyset$. Demikian pula juga $\underline{U} \subseteq \overline{U}$ dan $\overline{U} \subseteq \underline{U}$, maka $\underline{U} = \overline{U} = U$.

3. $$\begin{aligned} x \in \underline{X \cap Y} &\Leftrightarrow [x]_R \subseteq (X \cap Y) \\ &\Leftrightarrow x \in \underline{X} \text{ dan } x \in \underline{Y} \\ &\Leftrightarrow x \in \underline{X} \cap \underline{Y} \end{aligned}$$
   Jadi, $\underline{X \cap Y} = \underline{X} \cap \underline{Y}$.

4. $$\begin{aligned} x \in \overline{X \cup Y} &\Leftrightarrow [x]_R \cap (X \cup Y) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow ([x]_R \cap X \neq \emptyset) \cup ([x]_R \cap Y \neq \emptyset) \\ &\Leftrightarrow [x]_R \cap X \neq \emptyset \text{ atau } [x]_R \cap Y \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{X} \cup \overline{Y} \end{aligned}$$
   Jadi, $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$.

5. Diberikan $X \subseteq Y$ jika dan hanya jika $X \cap Y = X$, berdasarkan No. 3 bahwa $\underline{X \cap Y} = \underline{X} \cap \underline{Y}$, diperoleh: $\underline{X \cap Y} = \underline{X}$ dan $\underline{X} \cap \underline{Y} = \underline{X}$. Dengan demikian, terbukti bahwa $\underline{X} \subseteq \underline{Y}$. Diberikan $X \subseteq Y$ jika dan hanya jika $X \cup Y = Y$, berdasarkan No. 4 bahwa $\overline{(X \cup Y)} = \overline{X} \cup \overline{Y}$, diperoleh $\overline{(X \cup Y)} = \overline{Y}$ dan $\overline{(X \cup Y)} = \overline{Y}$.
   Dengan demikian, terbukti bahwa $\underline{X} \subseteq \underline{Y}$.

6. Misalkan $X \subseteq X \cup Y$ dan $Y \subseteq X \cup Y$, berdasarkan No. 5 bahwa $\underline{X} \subset \underline{Y}$, diperoleh: $\underline{X} \subset \underline{X \cup Y}$ dan $\underline{Y} \subset \underline{X \cup Y}$. Dengan demikian, terbukti bahwa $\underline{X} \cup \underline{Y} \subset \underline{X \cup Y}$.

7. Diberikan $X \cap Y \subset X$ dan $X \cap Y \subseteq Y$ berdasarkan pembuktian No. 5 bahwa $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$ diperoleh: $\overline{X \cap Y} \subseteq \overline{X}$ dan $\overline{X \cap Y} \subseteq \overline{Y}$. Dengan demikian, terbukti $\overline{X} \subseteq \overline{Y} \subseteq \overline{X \cap Y}$ (Kuroki, 1997).

Berikut diberikan contoh mengenai Proposisi 2.3.1.

Contoh 2.3.4 Diberikan $\mathbb{Z}_9 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8}\}$ merupakan himpunan bilangan bulat modulo 9 dan $+_9$ operasi penjumlahan modulo 9. Pada himpunan $\mathbb{Z}_9$ didefinisikan relasi R yaitu aRb jika dan hanya jika $4|(a-b)$ untuk setiap $a,b \in \mathbb{Z}_9$.

1. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_9$ maka $a \equiv a(\text{mod } 4) \in \mathbb{Z}_9$ artinya $a - a = 4k$ dengan $k \in \mathbb{Z}$, hal ini benar untuk bilangan bulat $k = 0$. Oleh karena itu, R bersifat refleksif.

2. Jika $a \equiv b(\text{mod } 4) \in \mathbb{Z}$ maka $b \equiv a(\text{mod } 4) \in \mathbb{Z}$, $a \equiv b(\text{mod } 4)$ artinya $a - a = 4k$ dan $b \equiv a(\text{mod } 4)$ artinya $b - a = -4k$ karena $k \in \mathbb{Z}$. Oleh karena itu, jika aRb dan bRa. Dengan kata lain R bersifat simetris.

3. Akan ditunjukkan jika aRb dan bRc maka aRc. Diketahui aRb dan bRc.
   $a \equiv b(\text{mod } 4)$ artinya $a - b = 4k$.
   $b \equiv c(\text{mod } 4)$ artinya $b - c = 4l$.
   Diperoleh
   $$(a-b)+(b-c) = 4k+4l$$
   $$(a-c) = 4(k+l).$$
   Karena $(k+l) \in \mathbb{Z}$ artinya $a \equiv c(\text{mod } 4)$. Oleh karena itu, R bersifat transitif.

Dengan demikian, relasi R bersifat ekuivalensi pada himpunan $\mathbb{Z}_9$. Selanjutnya, ditentukan kelas-kelas ekuivalensi $\mathbb{Z}_9$ adalah

$$E_1 = \{\overline{1},\overline{5}\},$$
$$E_2 = \{\overline{2},\overline{6}\},$$
$$E_3 = \{\overline{3},\overline{7}\},$$
$$E_4 = \{\overline{0},\overline{4},\overline{8}\},$$

Jika $X = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{5}\}$ dan $Y = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{4},\overline{5},\overline{6}\}$, maka aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari X dan Y, adalah sebagai berikut:

$$\underline{X} = E_1 = \{\overline{1},\overline{5}\},$$
$$\overline{X} = E_1 \cup E_2 \cup E_4 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{8}\},$$
$$\underline{Y} = E_1 \cup E_2 = \{\overline{1},\overline{2},\overline{5},\overline{6}\},$$
$$\overline{Y} = E_1 \cup E_2 \cup E_4 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{8}\}$$

Setelah menunjukkan aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari X dan Y, selanjutnya akan diberikan contoh sesuai sifat-sifat pada Proposisi 2.3.1.

Contoh 2.3.5 Berdasarkan contoh 2.3.4, diberikan $X = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{5}\}$. Diperoleh $\underline{X} = E_1 = \{\overline{1}, \overline{5}\}$ dan $\overline{X} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$. Dengan demikian, terbukti bahwa $\underline{X} \subseteq \overline{X}$, yaitu
$\{\overline{1}, \overline{5}\} \subseteq \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{5}\} \subseteq \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}\}$.
Diketahui $U = \mathbb{Z}_9$ maka $\underline{U} = \mathbb{Z}_9$ dan $\overline{U} = \mathbb{Z}_9$.
Dengan demikian, terbukti $\underline{U} = U = \overline{U}$. Selanjutnya
$X \cup Y =\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{5}\}$ dan $\underline{X \cap Y} = \quad \{\overline{1}, \overline{5}\}, \underline{U} \cap \underline{Y} =\{\overline{1}, \overline{5}\}$.
Dengan demikian terbukti bahwa $\underline{X \cap Y} = \underline{U} \cap \underline{Y}$: yaitu $\{\overline{1}, \overline{5}\}$.
Selain itu, $X \cup Y = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\}$. Diperoleh, $\overline{X \cup Y} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{8}\}$, dan
$\overline{X} \cup \overline{Y} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{8}\}$, Dengan demikian, terbukti bahwa
$\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ yaitu: $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{8}\}$.

Diketahui $X \subseteq Y$
$\overline{X} \subseteq \overline{Y}$ karena $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{8}\}$ diperoleh
$\overline{X} \subseteq \overline{Y} \subseteq \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{8}\}$.
$\underline{X} \subseteq \underline{Y}$ karena $\{\overline{1}, \overline{5}\} \subseteq \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{5}, \overline{6}\}$
Dengan demikian, terbukti bahwa $X \subseteq Y$ berarti $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$ dan $\underline{X} \subseteq \underline{Y}$.
$X \cup Y =\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\}$

$\underline{X \cup Y} =\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{5}, \overline{6}\}$,

$\underline{X} \cup \underline{Y} =\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{5}, \overline{6}\}$.
Dengan demikian, terbukti bahwa $\underline{X \cup Y} = \underline{X} \cup \underline{Y}$ yaitu: $\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{5}, \overline{6}\}$,
$X \cap Y = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{6}\}$,

$\overline{X \cap Y} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{5}, \overline{6}\}$,

$\overline{X} \cap \overline{Y} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{5}, \overline{6}\}$
Dengan demikian, terbukti bahwa $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$ yaitu: $\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{5}, \overline{6}\}$.

2.4 Operasi Biner

Kata “biner” berasal dari kata binary atau 2–ary, yang dalam konteks ini mempunyai makna pengoperasian dilakukan untuk setiap dua pasangan berurutan (x, y) di dalam $A \times A$.

Definisi 2.4.1 Jika S adalah suatu himpunan yang tidak kosong maka operasi biner $\circ$ (dibaca “bundaran”) pada S adalah suatu pemetaan (fungsi) yang mengawankan setiap pasangan berurutan $(a, b) \in S \times S$, dengan tepat satu elemen $(a \circ b) \in S$. Secara simbolik operasi biner $\circ$ dapat ditulis $\circ : S \times S \to S$ (Suwilo dkk., 1987).

Contoh 2.4.2 Diberikan $\mathbb{Z}$ dengan operasi $\circ$ yang didefinisikan oleh $a \circ b = a + b - 10$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ merupakan operasi biner. Karena $a + b - 10 \in \mathbb{Z}$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$.

Definisi 2.4.3 Operasi biner $\circ$ pada S dikatakan:

a. komutatif, apabila untuk setiap $a, b \in S$, berlaku $a \circ b = b \circ a$

b. asosiatif, apabila untuk setiap $a, b \in S$, berlaku $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

c. terdapat elemen identitas ada $e \in S$, sehingga berlaku $a \circ e = a \circ e = a$, untuk setiap $e \in S$

d. memiliki invers jika untuk setiap $a \in S$, terdapat $b \in S$, sedemikian hingga elemen $a \circ b = b \circ a = e$ b disebut invers dari elemen a, dan ditulis $a^{-1} = b$ (Suwilo dkk., 1987).

Contoh 2.4.4 $\mathbb{Z}$ dengan operasi $\circ$ yang didefinisikan oleh $a \circ b = a + b - 10$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, merupakan operasi biner. Dapat ditunjukkan elemen identitas operasi $\circ$ pada $\mathbb{Z}$ yaitu 10.

Definisi 2.4.5 Misalkan S adalah himpunan tak kosong. Operasi biner $*$ pada himpunan S adalah pemetaan dengan domain $S \times S$ dan kodomain S, dinotasikan sebagai $* : S \times S \to S$
$(x, y) \to *(x, y) = x * y = z \in S$. Himpunan S dikatakan tertutup terhadap operasi $*$ jika untuk setiap $x, y \in S$ berlaku $x * y \in S$ (Suwilo dkk., 1987).

Contoh 2.4.6 Didefinisikan relasi $*$ pada himpunan bilangan bulat positif $\mathbb{Z}^{+}$, sebagai berikut:

$$* : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$$

$$(a, b) \to *(a, b) \equiv a * b = a^b$$

untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Akan ditunjukkan bahwa operasi $*$ pada himpunan $\mathbb{Z}^+$ merupakan operasi biner.

Karena a dan b adalah elemen bilangan bulat positif, maka a^b juga elemen di $\mathbb{Z}^+$. Himpunan $\mathbb{Z}^+$ tertutup terhadap operasi $*$ dan terbukti bahwa operasi $*$ merupakan operasi biner pada himpunan $\mathbb{Z}^+$.

2.5 Grup

Struktur aljabar dengan satu himpunan objek dan satu operasi yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu disebut grup. sebelum membahas definisi grup terlebih dahulu akan dibahas kembali yang menjadi dasar pembentukan suatu grup yaitu operasi biner.

Definisi 2.5.1 Operasi $*$ pada himpunan G merupakan operasi biner jika operasi $*$ merupakan fungsi $G \times G \to G$. Dengan kata lain, operasi $*$ pada anggota himpunan G adalah operasi biner jika untuk setiap anggota a, b di G maka $(a \circ b)$ juga di G (Grillet, 2007).

Untuk memahami Definisi 2.5.1, berikut diberikan contoh operasi biner.

Contoh 2.5.2 Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$, himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$, dan himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ merupakan grup dengan penjumlahan biasa, yang mempunyai elemen identitas 0 dan invers dari elemennya adalah negatif dari elemen tersebut.

Selanjutnya akan diberikan definisi dan contoh dari grup dengan operasi biner.

Definisi 2.5.3 Himpunan tak kosong G dengan operasi biner $*$, disebut grup $(G, *)$ apabila memenuhi aksioma-aksioma berikut:

a. operasi biner $*$ bersifat asosiatif, yaitu $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk setiap $a, b, c \in G$,

b. terdapat elemen identitas $e \in G$ untuk $*$ pada G, sedemikian sehingga $e*X = x * e = x$, untuk setiap $x \in G$,

c. untuk setiap $a \in G$, terdapat suatu elemen $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a*a^{-1} = e$, (a^{-1} adalah invers a di G) (Fitriani dan Faisol, 2022).

Untuk memahami Definisi 2.5.1, berikut ini contoh dari suatu grup beserta pembuktiannya.

Contoh 2.5.4 Pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ didefinisikan $*$ dengan aturan $a * b = a + b = 2$. Akan dibuktikan bahwa operasi biner $*$ bersifat asosiatif, $a, b, c \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\begin{aligned} a * (b * c) =& a * (b + c + 2) \\ =& a * (b + c + 2) + 2 \\ =& a + (b + c + 2) + 2 \\ =& a + b + c + 2 + 2 \\ =& (a + b + 2) + c + 2 \\ =& (a * b) + c + 2 \\ =& (a * b) * c \end{aligned}$$

Jadi, $*$ bersifat asosiatif di $\mathbb{R}$.

Diberikan sebarang $a \in \mathbb{R}$.

Pilih $e = -2 \in \mathbb{R}$ berlaku

$a * e = a * (-2) = a + (-2) + 2 = a$

Jadi, terdapat elemen identitas $e = -2$, terhadat operasi $*$. Selanjutnya, akan di tunjnukkan Akan ditunjukkan bahwa setiap elemen di $\mathbb{R}$ mempunyai invers untuk $*$ pada $\mathbb{R}$. Diberikan sebarang $a \in \mathbb{R}$, pilih $a^{-1} = -a - 4 \in \mathbb{R}$ sehingga berlaku

$$
\begin{aligned}
a * a^{-1} =& a * (-a-4) \\
=& a + (-a-4) + 2 \\
=& a - a - 4 + 2 \\
=& -2 \\
=& e
\end{aligned}
$$

Jadi, untuk setiap $a \in \mathbb{R}$, terdapat invers invers dari a yaitu $a^{-1} = -a - 4$. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa $(\mathbb{R}, *)$ adalah grup.

2.6 Grup *Rough*

Selanjunya akan dipelajari mengenai grup *rough*. Berikut diberikan definisi dari grup *rough*.

Definisi 2.6.1 Diberikan ruang aproksimasi $k = (U, R)$ dengan operasi biner $*$ pada U. Himpunan $G \subseteq U$ disebut grup *rough* jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. untuk setiap $x, y \in G$, berlaku $x, y \in \overline{G}$;
2. untuk setiap $x, y, z \in G$, berlaku $(x * y) * z = x * (y * z)$ terpenuhi di $\overline{G}$;
3. terdapat $e \in \overline{G}$ sehingga untuk setiap $x \in G$, $x * e = e * x = x$, elemen e disebut elemen identitas *rough* di G;
4. untuk setiap $x \in G$, terdapat $y \in G$ sehingga $x * y = yx = e$. Elemen y disebut elemen invers *rough* dari x di G (Miao dkk., 2005).

Adapun definisi grup *rough* komutatif sebagai berikut.

Definisi 2.6.2 Grup *rough* G disebut grup *rough* komutatif jika untuk setiap $x, y \in G$, berlaku $x * y = y * x$ (Miao dkk., 2005).

Selanjutnya, akan diberikan definisi subgrup *rough* sebagai berikut.

Definisi 2.6.3 Diberikan grup *rough* G dengan operasi biner $*$ dan himpunan tak kosong H, dengan $H \subseteq G$. H disebut subgrup *rough* dari G jika H juga merupakan grup *rough* terhadap operasi biner $*$ yang sama dengan G (Kumar dkk., 2020).

2.7 Semigrup

Semigrup merupakan struktur aljabar yang disertai dengan satu operasi biner dan operasinya memenuhi hukum asosiatif. Berikut ini diberikan definisi dan contoh semigrup

Definisi 2.7.1 Misalkan S adalah himpunan tak kosong dan didefinisikan operasi biner $*$. $(S,*)$ disebut semigrup jika dan hanya jika

1. $(S,*)$ tertutup, yaitu $x*y \in S$ untuk setiap $x,y \in S$, dan
2. $*$ bersifat asosiatif, yaitu $(x*y)*z = x*(y*z)$ untuk setiap $x,y,z \in S$ (Whitelaw, 1995).

Contoh 2.7.2 Diberikan $\mathbb{Z}^+$ himpunan bilangan bulat positif dan $M_2(\mathbb{Z}^+) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | a,b,c,d \in \mathbb{Z}^+ \right\}$ Akan dibuktikan bahwa $(M_2(\mathbb{Z}^+),+)$ merupakan semigrup.

i. Akan ditunjukkan $(M_2(\mathbb{Z}^+),+)$ memenuhi sifat tertutup. Diberikan sebarang $A,B \in M_2(\mathbb{Z}^+)$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

untuk suatu $a,b,c,d,e,f,g,h \in \mathbb{Z}^+$. Didapat

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Karena $a+e, b+f, c+g, d+h \in \mathbb{Z}^+$ sehingga untuk setiap $A,B \in (\mathbb{Z}^+)$ berlaku $A+B \in M_2(\mathbb{Z}^+)$. Jadi, $(M_2(\mathbb{Z}^+),+)$ bersifat tertutup terhadap operasi $+$.

ii. Akan ditunjukkan penjumlahan bersifat asosiatif di $M_2(\mathbb{Z}^+)$.

Diberikan sebarang $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z}^+)$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

untuk suatu $a, b, c, d, e, f, g, h, p, q, r, s \in \mathbb{Z}^+$. Didapat

$$\begin{aligned}
(A+B)+C &= \left[\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right] + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (a+e)+p & (b+f)+q \\ (c+g)+r & (d+h)+s \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a+(e+p) & b+(f+q) \\ c+(g+r) & d+(h+s) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e+p & f+q \\ g+r & h+s \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \left[\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\right] \\
&= A + (B+C).
\end{aligned}$$

Karena berlaku $(A+B)+C = A(B+C)$, untuk setiap $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z}^+)$ maka $(M_2(\mathbb{Z}^+), +)$ merupakan semigrup.

Contoh 2.7.3 Berdasarkan Contoh 2.7.3, $((\mathbb{Z}^+), +)$ merupakan semigrup. Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}^+), +)$ merupakan semigrup komutatif.

Diberikan sebarang $A, B \in M_2(\mathbb{Z}^+)$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

untuk suatu $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{Z}^+$. Didapat

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Karena $a + e, b + f, c + g, d + h \in \mathbb{Z}^+$ sehingga berlaku

$$a + e = e + a, b + f = f + b, c + g = g + c, d + h = h + d,$$

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} e+a & f+b \\ g+c & h+d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= B + A \end{aligned}$$

Jadi, $A+B = B+A$ untuk setiap $A, B \in M_2(\mathbb{Z}^+)$ dan terbukti bahwa $(M_2(\mathbb{Z}^+), +)$ merupakan semigrup komutatif.

Definisi 2.7.4 Jika di dalam semigrup $(S, *)$ terdapat elemen identitas e sedemikian sehingga $e * x = e * x = x$ untuk setiap $x \in S$, maka S adalah semigrup dengan elemen identitas atau monoid (Lisapaly, dan Persulessy, 2011).

Contoh 2.7.5 Berdasarkan Contoh 2.7.3, $(M_2(\mathbb{Z}^+), +)$ merupakan semigrup komutatif. Diberikan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat dan $\mathbb{Z}_0^+$ merupakan bilangan bulat nonnegatif. Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}^+, +)$ dan$(\mathbb{Z}_0^+, +)$ merupakan monoid.

Diketahui bahwa $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ merupakan elemen identitas pada $M_2(\mathbb{Z})$ terhadap operasi penjumlahan karena $0 + A = A + 0 = A$. Diberikan sebarang $A \in M_2(\mathbb{Z})$. Karena $0 \notin M_2(\mathbb{Z}^+)$ sehingga $M_2(\mathbb{Z}^+)$ tidak memiliki elemen identitas terhadap penjumlahan maka sehingga $M_2(\mathbb{Z}^+, +)$ bukan monoid, sedangkan $0 \in M_2(\mathbb{Z}_0^+)$

sedemikian sehingga$0 + B = B + 0 = B$, untuk setiap $B \in M_2(\mathbb{Z}_0^+)$, maka $M_2(\mathbb{Z}_0^+, +)$ adalah monoid.

2.8 Monoid Komutatif

Sebelum membahas mengenai monoid komutatif, terlebih dahulu diberikan definisi dari monoid.

Definisi 2.8.1 Himpunan $(S, *)$ merupakan semigrup dengan elemen identitas jika S memuat elemen netral terhadap operasi "$*$" , yaitu terdapat $(e \in S)(\forall s \in S)$ berlaku $e * s = s * e = s$. Selanjutnya $(S, *)$ disebut monoid (Persulessy, 2011).

Definisi 2.8.2 Himpunan tak kosong G dengan operasi biner $(*)$, dikatakan monoid komutatif dengan dua operasi $(+, \cdot)$, jika $a * b = b * a$ untuk setiap $a, b \in A$ yang memenuhi sifat-sifat berikut.

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ untuk setiap $a, b, c \in A$,
2. $0 + a = a + 0 = a$ untuk setiap $a \in A$,
3. $a + b = b + a$ untuk setiap $a, b \in A$.

$(A, \cdot)$ disebut monoid jika:

1. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ untuk setiap $a, b, c \in A$,
2. $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ untuk setiap $a \in A$ (Howie, J.M,1976).

Contoh 2.8.3 Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_5$. Dapat dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_5, \cdot)$ merupakan monoid komutatif.

Tabel 2.2 Tabel operasi perkalian $\mathbb{Z}_5$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Dari Tabel 2.2 yaitu $\mathbb{Z}_5$ memenuhi sifat $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathbb{Z}_5$. Dengan diberikan $\overline{a} = a + 5k_1, \overline{b} = b + 5k_2, \overline{c} = c + 5k_3$

1. Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_5$ tertutup operasi perkalian, yaitu untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_5$, berlaku $a \cdot b \in \mathbb{Z}_5$.
2. $\mathbb{Z}_5$ operasi perkalian memenuhi sifat asosiatif, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_5$, berlaku $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b)c$
3. terdapat elemen satuan $e = \overline{1} \in Z_5$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_5$, berlaku $a \cdot \overline{1} = \overline{1} \cdot a = \overline{a}$
4. bersifat komutatif, yaitub penjumlahan $a, b \in \mathbb{Z}_5$ berlaku $a \cdot b = b \cdot a$.
   Terbukti bahwa $\mathbb{Z}_5$ terhadap operasi perkalian monoid komutatif.

2.9 Subgrup

Sebelum membahas mengenai subgrup dari suatu grup, berikut ini diberikan definisi order dari suatu grup.

Definisi 2.9.1 Jika G merupakan grup hingga, maka order dari G, dinotasikan dengan $|G|$, adalah banyaknya elemen pada G. Secara umum, untuk sebarang himpunan berhingga S, $|S|$ adalah jumlah elemen S (Fitriani dan Faisol, 2022).

Jika G adalah grup dengan operasi biner $*$, ditulis $(G, *)$, dan H adalah himpunan bagian dari G dengan $H \neq G$, maka H disebut subgrup dari G jika H dengan operasi $*$ juga merupakan grup. Secara harfiah, subgrup diartikan sebagai grup bagian yang mempunyai sifat-sifat dari Grup. Contoh $H = \{0, 2\}$, $\{H, +_4\}$ merupakan subgrup dari $\{\mathbb{Z}_4, +_4\}$. Adapun definisinya sebagai berikut:

Definisi 2.9.2 Diberikan himpunan bagian tak kosong H dari grup $(R, *)$. Himpunan H disebut subgrup dari G jika H merupakan grup terhadap operasi yang sama pada G yaitu operasi $*$ (Gallian, 2010).

Teorema 2.9.3 Misalkan H adalah himpunan bagian tak kosong dari grup G. H merupakan subgrup dari G jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in H$ berlaku $a, b^{-1} \in H$ (Gallian, 2010).

Bukti Misalkan G adalah suatu grup dan H adalah subset tak kosong dari G, maka H adalah subgrup dari G jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in H$, berlaku abH. Untuk membuktikan H subgrup dari G, dapat dibuktikan $a, b \in H$ dan $b^{-1} \in H$. Anggota H, a dan b memenuhi

$$a^2 = e \text{ dan } b^2 = e$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} (ab)^2 &= a^2b^2 && [G \text{ grup}] \\ &= ee && [a^2 = e \text{ dan } a^2 = e] \\ &= e && [\text{elemen identitas}] \end{aligned}$$

Karena $(ab)^2 = e$, maka $b^{-1} \in H$. Berdasarkan Teorema 2.9.4, H adalah subgrup dari G.

Definisi 2.9.4 Diberikan grup $(G, *)$ dan himpunan bagian tidak kosong $H \subseteq G$. Himpunan H disebut subgrup dari G jika H juga merupakan grup terhadap operasi biner "$*$" yang sama pada grup G, dinotasikan dengan $H < G$. (Gallian, 2010).

Contoh 2.9.5 Diketahui bahwa himpunan $M_{2\times2}\ \mathbb{R}$ merupakan grup terhadap operasi penjumlahan matriks. Akan ditunjukkan bahwa himpunan

$T_{2\times2}\ (\mathbb{R})$ = $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} | a, b, c \in (\mathbb{R}) \right\}$ merupakan subgrup $(M_{2\times2}\ (\mathbb{R}), +)$

1. Himpunan $T_{2\times2}\ (\mathbb{R}) \neq \emptyset$, sebab $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in T_{2\times2}(\mathbb{R})$

2. Diberikan sebarang

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \in T_{2\times2}(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a-x & b-y \\ 0 & c-z \end{bmatrix} \in T_{2\times2}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Berdasarkan syarat subgrup, diperoleh kesimpulan bahwa himpunan $T_{2\times2}(\mathbb{R})$ merupakan subgrup $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

2.10 Ring

Selanjutnya akan membahas mengenai ring. Berikut akan diberikan terlebih dahulu definsi ring dan ring divisi.

Definisi 2.10.1 Ring R adalah sebuah himpunan tak kosong dengan dua operasi biner $+$ dan $\times$ (disebut penjumlahan dan perkalian) sedemikian sehingga memenuhi aksioma berikut:

1. $(R, +)$ merupakan grup Abel.
2. R tertutup terhadap perkalian yang bersifat asosiatif yaitu: untuk setiap $a, b, c \in R$, maka $(a \times b) \times c = a \times (b \times c) \in R$.
3. Dua hukum distributif berlaku pada R, yaitu untuk setiap $a, b, c \in R$, maka berlaku $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$ dan $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ (Dummit dan Foote, 2004).

Definisi 2.10.2 Ring R dengan elemen identitas 1, dimana $1 \neq 0$, disebut ring divisi jika setiap elemen tak nol $a \in R$ memiliki invers terhadap perkalian. Misalkan $a, b \in R$ sedemikian sehingga $ab = ba = 1$. Suatu ring divisi yang bersifat komutatif disebut dengan lapangan (Dummit dan Foote, 2004).

Definisi 2.10.3 Suatu himpunan F yang padanya diberikan operasi jumlah $(+)$ dan operasi kali $(\cdot)$ disebut ring jika memenuhi aksioma berikut, yakni untuk setiap $a, b, c \in F$ berlaku:

1. tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian $a + b \in F$ dan $a \cdot b \in F$
2. operasi penjumlahan dan perkalian bersifat komutatif, yaitu:
$$a + b = b + a \text{ dan } a \cdot b = b \cdot a$$
3. sifat assosiatif penjumlahan dan perkalian:
$$(a + b) + c = a + (b + c) \text{ dan } (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$
4. memiliki unsur identitas penjumlahan dan perkalian. Untuk penjumlahan terdapat $0 \in F$, sehingga $0 + a = a + 0 = a$. Untuk perkalian: Terdapat $1 \in F$, sehingga $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.
5. memiliki invers penjumlahan dan perkalian. Untuk penjumlahan: $\exists - a \in F$, sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Untuk operasi perkalian: Terdapat $a^{-1} \in F$, sehingga $a^{-1} \cdot a = a^{-1} \cdot a = 1$.
6. sifat distributif penjumlahan dan perkalian $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ (Dummit dan Foote, 1999).

Setelah memahami definisi dari ring, maka selanjutnya akan dibahas mengenai ring *rough*.

2.11 Ring *Rough*

Setelah memahami definisi grup *rough* berikut akan diberikan himpunan *rough* dengan dua operasi biner yang membentuk ring *rough*. Berikut definisi ring *rough*.

Definisi 2.11.1 Sistem aljabar yang memiliki dua operasi biner $\langle R, +, * \rangle$ disebut ring *rough* jika memenuhi aksioma berikut:

1. $\langle R, + \rangle$ merupakan grup komutatif *rough* terhadap operasi $+$;

2. $\langle R, * \rangle$ merupakan semigrup *rough* pada operasi $*$ atau R bersifat asosiatif;

3. untuk setiap $x, y, z \in R$, berlaku hukum distributif kanan $(x + y) * z = (x * z) + (y * z)$ dan hukum distributif kiri $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$ di $\overline{Apr}(R)$ (De-song, 2004).

Selanjutnya, akan dibahas mengenai subring *rough*, berikut definisinya.

Definisi 2.11.2 Diberikan ring *rough* R dengan operasi $+$ dan $*$ serta himpunan tak kosong T dengan $T \subseteq R$. Himpunan T disebut subring *rough* dari R jika T juga merupakan ring *rough* terhadap operasi yang sama dengan R (De-song, 2004).

Berikut merupakan syarat cukup dan perlu untuk membuktikan himpunan bagian dalam ring *rough* merupakan subring *rough*.

Teorema 2.11.3 Diberikan ring *rough* $\langle R, +, * \rangle$ dan himpunan tak kosong T dengan $T \subseteq R$. Himpunan T disebut subring *rough* R untuk setiap $t_1, t_2 \in T$ berlaku:

1. $t_1 - t_2 \in \overline{T}$;

2. $t_1 \circ t_2 \in \overline{T}$ (De-song, 2004).

Bukti. Diketahui T adalah subring dari R. Hal ini berakibat untuk setiap $t_1, t_2 \in T$ maka $t_1 - t_2 \in \overline{T}$. Apabila T adalah subring dari R maka operasi pergandaan skalar pada R juga berlaku di T. Akibatnya, untuk setiap $r \in R$ dan $t \in T$ berlaku $r \circ t \in \overline{T}$. Dengan demikian, T merupakan subring di R. ■

2.12 Semiring

Sebelum membahas mengenai semiring, berikut ini diberikan definisi dari semiring. Semiring merupakan salah satu perluasan dari ring dengan dua operasi biner (penjumlahan dan perkalian). Sama halnya dengan struktur ring, dalam semiring juga terdapat substruktur yang memenuhi aksioma tertentu.

Definisi 2.12.1 Semiring adalah suatu sistem yang terdiri dari himpunan tak kosong S dengan dua biner operasi biner, yang penjumlahan dan pergandaan dapat ditulis dengan $(S, +, \cdot)$ sedemikian sehingga: $(S, +)$ adalah monoid komutatif, $(S, \cdot)$ adalah semigrup, Operasi penjumlahan dan perkalian memenuhi sifat distributif, yaitu $x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ dan $(x+y) \cdot z = (x \cdot z) + (x \cdot y)$ untuk setiap $x, y, z \in S$ (Rahmawati, 2017).

Contoh 2.12.2 Diberikan himpunan $L = \{a|a \in [0,1]\}$. Didefinisikan $(L, V, \cdot)$ dengan $x \vee y = \max\{x, y\}$, dan $x \cdot y = \max\{x + y - 1, 0\}$ untuk $x, y \in L$. Akan dibuktikan bahwa $(L, V, \cdot)$ merupakan semiring. Akan ditunjukkan bahwa $(L, V, \cdot)$ merupakan semiring.

1. $(L, V, \cdot)$ adalah monoid komutatif.

   i. Akan dibuktikan (L, V) memenuhi sifat tertutup.
   Diberikan sebarang $x, y \in L$ didapat
   $x \vee y = \max\{x, y\} = x, \in L$ untuk $y \leq x$ dan
   $x \vee y = \max\{x, y\} = y, \in L$ untuk $x \leq y$.
   Sehingga terbukti bahwa untuk $x, y \in L$ maka $x \vee y \in L$.

   ii. Akan dibuktikan (L, V) memenuhi sifat asosiatif. Diberikan sebarang $x, y, z \in L$.

      a. Jika $x \leq y \leq z$, maka
      $(x \vee y) \vee z =$ max { max $\{x, y\}, z\} =$ max $\{y, z\} = z$,
      $x \vee (y \vee z) =$ max $\{x,$ max $\{y, z\} =$ max $\{x, z\} = z$,
      sehingga $c = (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$.

      b. Jika $y \leq x \leq z$, maka
      $(x \vee y)z =$ max {max $\{x, y\}, z\} =$ max $\{x, z\} = z$,
      $x \vee (y \vee z) =$ max $\{x,$ max $\{y, x\}\} =$ max $\{x, z\} = z$,
      sehingga $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$.

      c. Jika $y \leq z \leq x$, maka
      $(x \vee y) \vee z =$ max $\{max\{x, y\}, z\} =$ max $\{x, z\} = x$,

$x \vee (y \vee z) =$ max $\{x,$ max $\{y, z\}\} =$ max $\{x, z\} = x,$

sehingga $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$.

d. Jika $z \leq y \leq x$, maka

$(x \vee y) \vee z =$ max $\{max\{x, y\}, z\} =$ max $\{x, z\} = x,$

$x \vee (y \vee z) =$ max $\{x,$ max $\{y, z\}\} =$ max $\{x, y\} = x,$

sehingga $(x \vee y) \vee z = x \vee (x \vee z)$.

Definisi 2.12.3 Semiring $(S, +, \cdot)$ dikatakan semiring komutatif jika semigrup $(S, \cdot)$ merupakan semigrup komutatif. Selain itu, S adalah semiring non-komutatif (Grillet, 1970).

Definisi 2.12.4 Semiring $(S, +, \cdot), (S, \cdot)$ adalah monoid yang yang terdapat $1 \in S$, sehingga $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, untuk setiap $a \in S$. disebut semiring dengan elemen satuan (Grillet, 1970).

Contoh 2.12.5 $M_{2\times 2}\ (\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}^0 \right\}$ adalah himpunan semua matrix berukuran 2×2 dengan entri Z^0. $(M_{2\times 2}, +, 0)$ adalah semiring dengan penjumlahan dan perkalian matrix. $M_{2\times 2}$ adalah semiring non-komutatif pada karakteristik 0 elemen satuan $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dengan kardinalitas takhingga.

i. monoid komutatif $(S, +)$ identitas 0 merupakan operasi $+$ komutatif dan assosiatif, sehingga untuk setiap $a + 0 = 0 + a = a$,

ii. monoid identitas satuan $(S, \cdot)$ merupakan operasi assosiatif, sehingga untuk setiap S yaitu $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$,

iii. operasi penjumlahan dan perkalian memenuhi sifat distributif kedua sisi, yaitu

iv. untuk setiap $a, b, c \in S$. Berlaku sifat distributif $a(b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$, $(b + c)a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$, untuk setiap S yaitu $0 \cdot s = s \cdot 0$,

v. perbedaan semiring pada identits yaitu $1 \neq 0$, dimana identitas 1 tidak sama dengan identitas operasi penjumlahan 0.

Definisi 2.12.6 Semiring $(S, +, \cdot)$ terdapat karakteristik M jika $Ms = s + \cdots + s$ adalah 0 untuk setiap $s \in S$ (Subisono, 2013).

Contoh 2.12.7 Akan dibuktikan bahwa $M_2(\mathbb{Z}_0^+, +, \cdot)$ merupakan semiring,

1. $M_2(\mathbb{Z}_0^+), +)$ adalah monoid komutatif.
   Berdasarkan Contoh 2.6.5, $M_2(\mathbb{Z}_0^+), +)$ merupakan monoid.
   Karena untuk setiap $a, b \in (\mathbb{Z}_0^+)$ berlaku $A + B = B + A$ sehingga terbukti bahwa $M_2(\mathbb{Z}_0^+), +)$ adalah monoid komutatif.

2. Operasi penjumlahan dan perkalian pada $M_2(\mathbb{Z}_0^+)$ memenuhi sifat distrubutif. pada sebarang $A, B, C \in \mathbb{Z}_0^+$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix},$$

untuk suatu suatu $a, b, c, d, e, f, g, h, p, q, r, s \in \mathbb{Z}_0^+$. Didapat

$$\begin{aligned}
A \cdot (B + C) &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \right] \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e + p & f + q \\ g + r & h + s \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a(e + p) + b(g + r) & a(f + q) + b(h + s) \\ c(e + p) + d(g + r) & c(f + q) + d(h + s) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ae + bg + ap + br & af + bh + aq + bs \\ ce + dg + cp + dr & cf + dh + cq + ds \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (ae + bg) + (ap + br) & (af + bh) + (aq + bs) \\ (ce + dg) + (cp + dr) & (cf + dh) + (cq + ds) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A\cdot(B+C) &= \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix} \\
&= \left[\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right] + \left[\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\right] \\
&= (A\cdot B)+(A\cdot C).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(A+B)\cdot C &= \left[\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right] + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (a+e)\cdot p+(b+f)\cdot r & (a+e)\cdot q(f+s)\cdot b \\ (c+g)\cdot p+(d+h)r & (c+g)\cdot q+(h+s)\cdot d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (ap+br)+(ep+fr) & (aq+bs)+(eq+fs) \\ (cp+dr)+(gp+hr) & (cq+ds)+(gq+hs) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ap+br & ap+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ep+fr & eq+fs \\ gp+hr & gq+hs \end{bmatrix} \\
&= \left[\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\right] + \left[\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\right] \\
&= A\cdot C + A\cdot B.
\end{aligned}
$$

Karena terbukti bahwa $A\cdot(B+C) = (A\cdot B)+(A\cdot C)$ dan $(A+B)\cdot C = (A{\cdot}C)+(B{\cdot}C)$ maka sifat distributif terpenuhi. Jadi, terbukti bahwa $(M_2(\mathbb{Z}_0^+),+,\cdot)$ merupakan semiring.

2.13 Ideal

Suatu himpunan bagian tak kosong dari semiring *S* dapat dikembangkan menjadi struktur yang lebih khusus yaitu ideal. Ideal di dalam semiring memiliki definisi yang berbeda dengan ideal di dalam teori ring.

Definisi 2.13.1 Diberikan semiring *S* dan diberikan *S* merupakan himpunan bagian tak kosong dari *R*,*I* disebut dengan ideal jika setiap $a, b \in I$ dan $r \in R$ memenuhi $a + b \in I$, $ra \in I$ dan $ar \in I$ (Atani dkk., 2007).

Contoh 2.13.2 Diberikan himpunan semua bilangan bulat non-negatif $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ merupakan semiring atas operasi penjumlahan biasa dan perkalian biasa. Diberikan himpunan semua bilangan bulat genap non-negatif $(2\mathbb{Z}_{\geq 0})$ merupakan himpunan bagian tak kosong dari himpunan $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Himpunan $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ merupakan ideal dari semiring $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ berdasarkan definisi 2.11.1 akan ditunjukkan $2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ merupakan ideal dari semiring $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Akan ditunjukkan $2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ merupakan ideal dari semiring $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Diambil dari sebarang a,$b \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ dan $r \in 2\mathrm{Z}_{\geq 0}$ dengan $a = 2x$, $b = 2y$ untuk $x, y \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

1. Akan dibuktikan $a + b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

$$\begin{aligned} a + b &= 2x + 2y \\ &= 2(x + y). \end{aligned}$$

   Karena $x, y \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ dan $(\mathbb{Z}_{\geq 0}, +)$ merupakan monoid komutatif, maka $x + y$ $\in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ sehingga diperoleh $2(x + y)$ = $a + b \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

2. Akan dibuktikan $ra, ar \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

$$\begin{aligned} ra &= r2x \\ &= 2rx \\ &= 2(rx) \\ ar &= 2xr \\ &= 2(xr). \end{aligned}$$

   Karena $r, x \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ dan $(\mathbb{Z}_{\geq 0},)$ merupakan monoid, maka $rx, xr \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ sehingga diperoleh $ra, ar \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Terbukti bahwa $2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ merupakan ideal dari semiring $\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Definisi 2.13.3 Misalkan R adalah suatu ring $\emptyset = I \subseteq S$. Himpunan I disebut ideal dari R jika

1. untuk setiap $s_1, s_2 \in I$, sehingga berlaku s_1 - $s_2 \in I$,
2. untuk setiap $s_1 \in I$, untuk setiap $r \in R$, $s_1\ r, r\ s_1 \in I$.

Contoh 2.13.4

Diberikan $S = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} \right\}$ himpunan bagian $M_2(\mathbb{Z})$.

Akan dibuktikan I adalah ideal dari S. $I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$

Diberikan sebarang $A_1, A_2 \in I$

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I.$$

Diperoleh $A_1 - A_1 = \begin{bmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I.$

Diberikan

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \in S \quad BA_1 = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa_1 & xb_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I,$$

sehingga $xa_1, xb_1 \in \mathbb{Z}$.

$$A_1B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1z & a_1y + b_1z \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I.$$

Jadi, I adalah ideal dari S.

2.14 Subsemiring *Rough*

Dari pembahasan sebelumnya yaitu semiring merupakan salah satu perluasan dari ring, dengan menghilangkan beberapa aksioma pada ring, sedangkan konsep subsemiring *rough* adalah bagian dari teori *rough* set yang lebih luas, yang dikembangkan oleh Pawlak.

Definisi 2.14.1 Subsemiring *rough* adalah subsemiring dari suatu semiring, yang merupakan struktur aljabar yang terdiri dari himpunan elemen-elemen dan dua operasi biner $(+, \times)$ yang memenuhi sifat-sifat tertentu (Zadeh, 1965).

Teorema 2.14.2 Diberikan S adalah semiring, subset pada I dikatakan subsemiring dari S yang juga merupakan semiring pada operasi yang sama. Untuk membuktikan bahwa I adalah subsemiring dari S adalah dengan sifat-sifat subsemiring sebagai berikut:

1. penjumlahan tertutup untuk setiap elemen $a + b$ di I,
2. perkalian tertutup untuk setiap elemen $a \cdot b$ di I,
3. terdapat identitas penjumlahan di I, sehingga untuk setiap elemen a di I yaitu, $a + 0 = 0 + a = a$
4. identitas perkalian di I, sehingga untuk setiap a di I yaitu, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (Zadeh, 1965).

Bukti. Semiring S dinotasikan dengan $C(S)$, dengan $C(S) \in a$ di S, sehingga $a \cdot s = s \cdot a = s$ untuk setiap $s \in S$. Berdasarkan definisi 2.12.4, dapat dinyatakan dengan $C(S) = a \in S | a \cdot s = s \cdot a \forall s \in S$ Jadi, notasi dari semiring merupakan unsur-unsur yang berpindah dengan semua unsur lainnya pada operasi $(+, \cdot)$ membuat struktur semiring. ■

Contoh 2.14.3 Diberikan $2\mathbb{Z}^0$ adalah subsemiring dari $\mathbb{Z}^0 = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ dengan menggunakan definisi semiring $\emptyset \in S$ pada operasi $(+, \cdot) a, b, c \in S$. Karena untuk setiap $\min \mathbb{Z}^0 = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, terdapat $2m \in \mathbb{Z}^0$, maka $2\mathbb{Z}^0 \subset \mathbb{Z}^0$ untuk membuktikan $(2\mathbb{Z}^0, +)$ adalah monoid komutatif dengan identitas 0:

$$x, y \in 2\mathbb{Z}^0 \Rightarrow x = 2m \text{ dan}$$

$$\begin{aligned} m, n \in \mathbb{Z}^0 \Rightarrow x + y & \\ &= 2m + 2n \\ &= 2(m+n), \end{aligned},$$

dengan $m + n \in \mathbb{Z}^0$ merupakan penjumlahan tertutup yaitu $x + y \in 2\mathbb{Z}^0$ atau $2\mathbb{Z}^0$ terdapat sifat komutatif, assosiatif dan $\mathbb{Z}^0$ merupakan sifat turunan. Sifat komutatif dan assosiatif subset dari $\mathbb{Z}^0$ juga merupakan komutatif dan assosiatif dari $2\mathbb{Z}^0$. Jadi, $0 \in 2.\ 0 = 0 \in 2\mathbb{Z}^0$. Maka $2\mathbb{Z}^0$ disebut monoid komutatif dengan identitas 0.

Untuk membuktikan $(2\mathbb{Z}^0, \cdot)$ adalah monoid komutatif dengan identitas 1: Karena tidak terdapat $m \in \mathbb{Z}^0$ sehingga $2m = 1 \Rightarrow 1 \neq 2\mathbb{Z}^0 \Rightarrow (2\mathbb{Z}^0, \cdot)$ bukan monoid identitas 1, dimana elemen dari $2\mathbb{Z}^0$ adalah genap, oleh karena itu $2\mathbb{Z}^0$ bukan subsemiring dari $\mathbb{Z}^0$ menurut Definisi 2.12.1.

Contoh 2.14.4 Diberikan sebarang $\mathbb{Z}^0[x]$ merupakan polinomial semiring $(+, \cdot)$, $\mathbb{Z}^0 \subseteq \mathbb{Z}^0[x]$ adalah subsemiring dari $\mathbb{Z}^0[x]$. Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}^0[x]$ merupakan polinomial semiring atas bilangan bulat berderajat 0 dengan $\mathbb{Z}^0$ adalah himpunan bilangan bulat yang memiliki koefisien, dan x menunjukkan bilangan tak tentu.

$\mathbb{Z}^0 \subseteq \mathbb{Z}^0[x]$ sebagai subsemiring dari $\mathbb{Z}^0[x]$ dengan memenuhi sifat : Penjumlahan tertutup pada dua polinomial $a + b$ di $\mathbb{Z}^0$, perkalian tertutup dua polinomial $a \cdot b$ di $\mathbb{Z}^0$, identitas aditif $-a$ polinomial di $\mathbb{Z}^0$ yang merupakan subsemiring dari $\mathbb{Z}^0[x]$ sebagai subset dari semiring dari terbentuknya struktur semiring.

Contoh 2.14.5 Pada subsemiring diberikan $S = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} \subseteq \mathbb{Z}_6$. Akan ditunjukkan bahwa merupakan subring dari $\mathbb{Z}_6$

a) perkalian tertutup di $\mathbb{Z}_6$,

b) untuk setiap $\mathbb{Z}_6, a \in S, a + 0 = a$, sehingga S merupakan identitas penjumlahan 0,

c) untuk setiap $\mathbb{Z}_6$, $a \in S, a \cdot 1 = a$, sehingga S merupakan identitas perkalian 1,

d) untuk setiap $a, b, c \in S$, $(a + b) + c = a + (b + c)$, sehingga S merupakan assosiatif penjumlahan,

e) untuk setiap $a, b, c \in S$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, sehingga S merupakan assosiatif perkalian,

f) untuk setiap $a, b, c \in S$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dan $(a + b) \cdot c$ $= (a \cdot c) + (b \cdot c)$, sehingga S merupakan distributif

Untuk membuktikan subring merupakan himpunan tak kosong dengan dua operasi biner $(R, +, \cdot)$ terdapat bilangan bulat modulo dimana $n > 1$ untuk setiap bilangan bulat, dimisalkan $a = n \cdot q + r$ dimana $0 \leq r < n = n(> 1)$ dengan $a \equiv r(\text{mod } n)$

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_n &= \{1, 2, \ldots, n-1\} \\ &= \{\overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}\} \end{aligned}$$

$\mathbb{Z}_6 = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ dengan $a + b = (a + b)$ (mod n) dan $a \times b = a \times b$ (mod n).

Tabel 2.3 Tabel operasi Penjumlahan $\mathbb{Z}_6$

$+$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$

Tabel 2.4 Tabel Operasi Perkalian $\mathbb{Z}_6$

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$

Jadi, dari Tabel 2.4, himpunan $\mathbb{Z}_6$ tertutup pada operasi penjumlahan dan perkalian yang sama maka S merupakan subsemiring di $\mathbb{Z}_6$ yang juga merupakan subring.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester genap tahun ajaran 2023/2024 di jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamat di Jalan Prof.Dr.Ir.Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Bandar Lampung.

3.2 Metodologi Penelitian

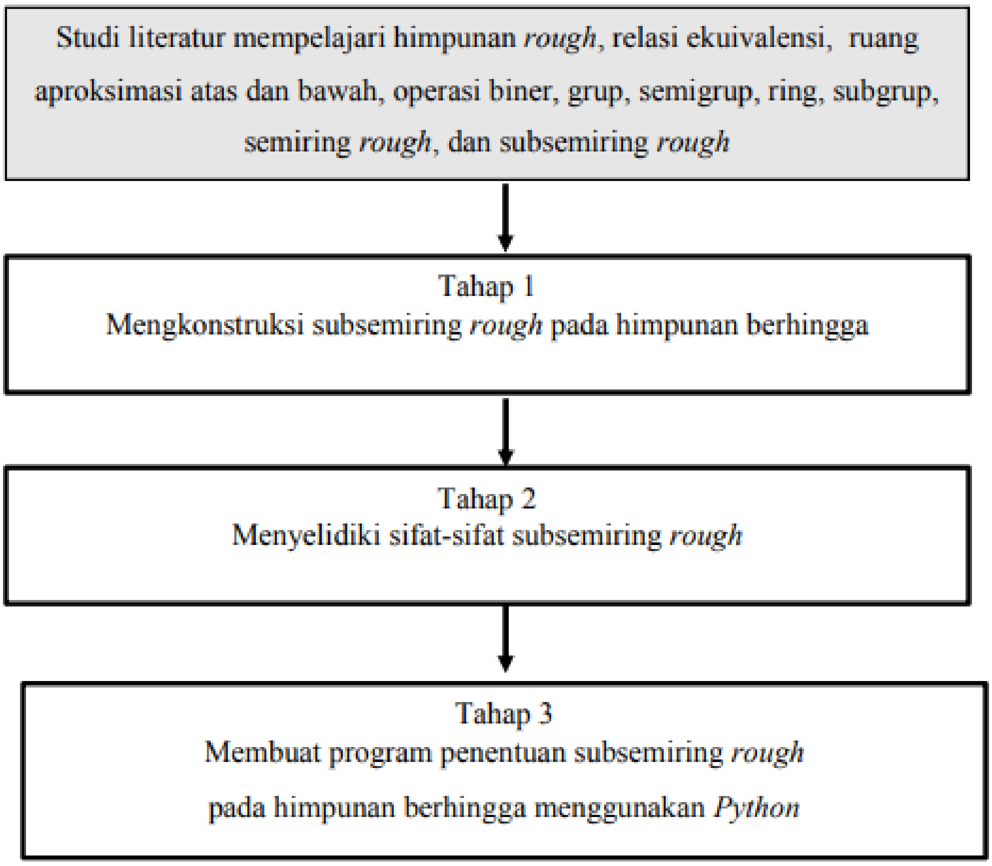
Penelitian ini menggunakan pendekatan studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. studi literatur buku-buku dan jurnal ilmiah yang berhubungan dengan penelitian ini,
2. mempelajari definisi-definisi dan teorema yang berhubungan dengan penelitian ini.

Metode ini menggunakan metode analisis dengan mencari teori dan referensi yang sesuai dengan permasalahan, oleh karena itu, diperlukan Langkah-langkah penelitian sebagai berikut:

1. mengkonstruksi subsemiring pada himpunan berhingga;
2. menyelidiki sifat-sifat subsemiring *rough* pada grup *rough*;
3. membuat program menggunakan *Python*.

Berikut langkah – langkah diagram alur dari penelitian ini adalah sebagai berikut:



Gambar 3.1 Langkah – Langkah Penelitian

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan konstruksi subsemiring *rough* dari semiring *rough* pada bab sebelumnya diketahui bahwa subsemiring *rough* dari semiring *rough* dapat dikonstruksi menggunakan ruang aproksimasi (U, θ) dengan U adalah himpunan universal dan θ adalah relasi ekuivalensi, dimana himpunan yang digunakan pada subsemiring *rough* berada pada $\overline{X} = U$. Hal yang sama juga berlaku untuk semiring *rough* akan tertutup jika $\overline{A} = U$, sehingga terdapat ruang aproksimasi (U, θ), dengan $U = \{a + b | a \in X, b \in Y\}$ untuk suatu X subsemiring *rough* U.

Selanjutnya, diberikan ruang approksimasi (U, θ) dan X subsemiring *rough* dari semiring *rough* T di U. Jika $X \subseteq Y$ dengan $\overline{X} = U$, maka X merupakan subsemiring Y,sehingga dapat dinyatakan bahwa $\{a|a \in X$ dan $a \in Y\}$. Jika X dan Y adalah subsemiring *rough* dari semiring *rough* Y, maka $X \cap Y$ juga merupakan subsemiring *rough* dari semiring *rough* X jika $\overline{X} \cap \overline{Y} = \overline{X \cap Y}$. Selanjutnya penggunaan program *Python* dalam mengkonstruksi subsemiring *rough* dari semiring *rough* dapat membantu dan mengefisiensikan waktu pengerjaan.

5.2 Saran

Bedasarkan hasil dan pembahasan, terdapat saran untuk penelitian selanjutnya. Dalam penelitian ini masih sedikit untuk menemukan sifat-sifat karakterisasi pada subsemiring *rough* sehingga masih terdapat kemungkinan untuk mengkaji karakterisasi pada subsemiring *rough* menggunakan himpunan berhingga selain yang ada dalam penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Atani, S., Hesari, S.D.P dan Khoramdel, M. (2007). The Ideal Theory in The Quotients of Semirings, *Glas. Mat.* 42(62). pp. 301-308.

Ayuni, F., Fitriani, F., dan Faisol, A. (2022). Rough U- Exact Sequence Of Rough Groups. *Jurnal Pendidikan Matematika*, 13(2), pp. 363-371.

Bagirmaz, N., dan Ozcan, A. F. (2015). Rough semigroups on approximation spa- ces. *International Journal of Algebra*, 9(7), pp. 339-350.

Barnier, W., & Feldman, N. (1990). *Introduction to Advanced Mathematics*. Jersey, 116-153.

Clifford, A. H. (1954). Bands of Semigroups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 5(3), pp. 499.

David A. (1966). *Semigroups, Semirings, and Rings of Quotients,*, University of Hiroshima .

Davvaz, B. (2004). Roughness in Rings.*Information Sciences*, 164(1-4), pp.147-163.

De-Song, W. (2004). *Application of The Theory of Rough Set on The Groups and Rings*. Dissertation for Master Degree, University of Zhejiang.

Dummit, D.S., & Foote, R.M. (1999). *Abstract Algebra 3 rd edition*. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Dummit, D. S., & Foote, R. M. (2004). *Abstract Algebra* (3 ed). Jhon Wiley & Sons, Inc.

Fitriani, F., dan Faisol, A. (2022). *Grup*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Gallian, J. A. (2010). *Contemporary Abstract Algebra* (7 ed). University of Minnesota, Duluth.

Grillet, M. P. (1970). Green's Relations in a Semiring. *Port. Math*. 29: 181–195.

Grillet, P. A. (2007) . *Abstract Algebra* (2 ed). Springer.

Howie, J.M. (1976). *An Introduction to Semigroup Theory.* London: Academic Press, Ltd.

Isaac, P., dan Neelima, C.A. (2013). Rough U- Exact Sequence Of Rough Groups. *Journal of Global Research in Mathematical Archives*, 1(6), pp. 90-97.

Kandasamy, V.W.B. (2002). Rough U- Exact Sequence Of Rough Groups. *Smarandache Semirings, Semifields, and Semivector Spaces.* USA: American Research Press.

Kumar, A., Kumar, A., & Sah, S. K. (2020). Roughness in G-modules and its Properties. *International Journal for Research in Engineering Application & Management (IJREAM)*, 6(4), 114-118.

Kuroki, N.(1997).Rough Ideals in Semigroups.*Information Sciences*, USA: American Research Press. 100(1-4), pp. 139-163.

Lisapaly, S.R., dan Persulessy, E.R. (2011). Semiring. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan*,5(2), pp. 45-47.

Miao, D., Han, S., Li, D., dan Sun, L. (2005). *Rough Group, Rough Subgroup*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1, pp. 104-105.

Munir, R.(2012). *Matematika Diskrit* (5th ed.). Informatika.

P. J. Allen and J. Neggers. (2006). *Ideal Theory in Commutative Semirings,* Kyungpook Math. J. 46, 261-271.

Pawlak, Z. (1982). Rough sets. *International Journal of Computer dan Information Sciences,* 11(5), pp. 341-356.

Rahmawati, A.(2017). Sifat- Sifat Semiring dan Konstruksinya. *Jurnal Edukasi Matematika dan Sains.*. Vol 1, no 2

Subisono, S. (2013). Institut Teknologi Sepuluh Nopember. *Aljabar Maxplus dan Terapannya* ,(Version 1.1.1). 13(2), pp. 363-371.

Suwilo, S., Tulus, Lubis, S. R. (1987). *Aljabar Abstrak*. USU Press.

Whitelaw, T.A. (1995). *Introduction Abstract Algebra*. Blakie Academic and Professional. Glasgow.

Zadeh. L. (1965). Fuzzy and Rough Sets. *Information and Control*, vol. 8, pp. 338–353.