

**PENENTUAN INVERS MATRIKS TRIDIAGONAL DENGAN
ALGORITMA LEWIS**

(Skripsi)

Oleh

**DAVID AJI SAPUTRA
NPM. 2117031108**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025**

ABSTRACT

DETERMINATION OF TRIDIAGONAL MATRIX INVERSE USING THE LEWIS ALGORITHM

By

David Aji Saputra

A matrix is a rectangular array of numbers consisting of entries, with its size (order) determined by the number of rows and columns. There are various types of matrices, one of which is the tridiagonal matrix. A tridiagonal matrix is a square matrix that only has non-zero elements on the main diagonal, superdiagonal, and subdiagonals. One of the main challenges in using tridiagonal matrices is determining their inverse. This study aims to determine the inverse of a tridiagonal matrix using the Lewis Algorithm, a recursive-based method that utilises patterns of relationships between elements to generate the inverse, particularly for large-sized matrices and sparsely populated matrices. This research was conducted analytically and reinforced with implementation using the Python programming language. The results of the research show that the Lewis Algorithm is able to determine the inverse of a tridiagonal matrix systematically with validation through multiplication of the initial matrix and the inverse result, which produces an identity matrix.

Keywords: Matrix, Tridiagonal Matrix, Matrix Inverse, Lewis Algorithm.

ABSTRAK

PENENTUAN INVERS MATRIKS TRIDIAGONAL DENGAN ALGORITMA LEWIS

Oleh

David Aji Saputra

Matriks adalah susunan bilangan berbentuk segi empat siku-siku yang terdiri dari entri-entri, dengan ukuran (ordo) ditentukan oleh banyaknya baris dan kolom. Terdapat berbagai jenis matriks, salah satunya adalah matriks tridiagonal. Matriks tridiagonal merupakan jenis matriks bujursangkar yang hanya memiliki elemen tidak nol pada diagonal utama, superdiagonal, dan subdiagonal. Salah satu tantangan utama dalam penggunaan matriks tridiagonal adalah menentukan inversnya. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan invers matriks tridiagonal menggunakan Algoritma Lewis, yaitu metode berbasis rekursif yang memanfaatkan pola hubungan antar elemen untuk menghasilkan invers, khususnya untuk matriks berdimensi besar dan jarang terisi. Penelitian ini dilakukan secara analitik dan diperkuat dengan implementasi menggunakan bahasa pemrograman Python. Hasil penelitian menunjukkan bahwa Algoritma Lewis mampu menentukan invers matriks tridiagonal secara sistematis dengan validasi melalui perkalian kembali matriks awal dan hasil invers yang menghasilkan matriks identitas.

Kata-kata kunci: Matriks, Matriks Tridiagonal, Invers Matriks, Algoritma Lewis.

**PENENTUAN INVERS MATRIKS TRIDIAGONAL DENGAN
ALGORITMA LEWIS**

DAVID AJI SAPUTRA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2025**

LEMBAR PENGESAHAN

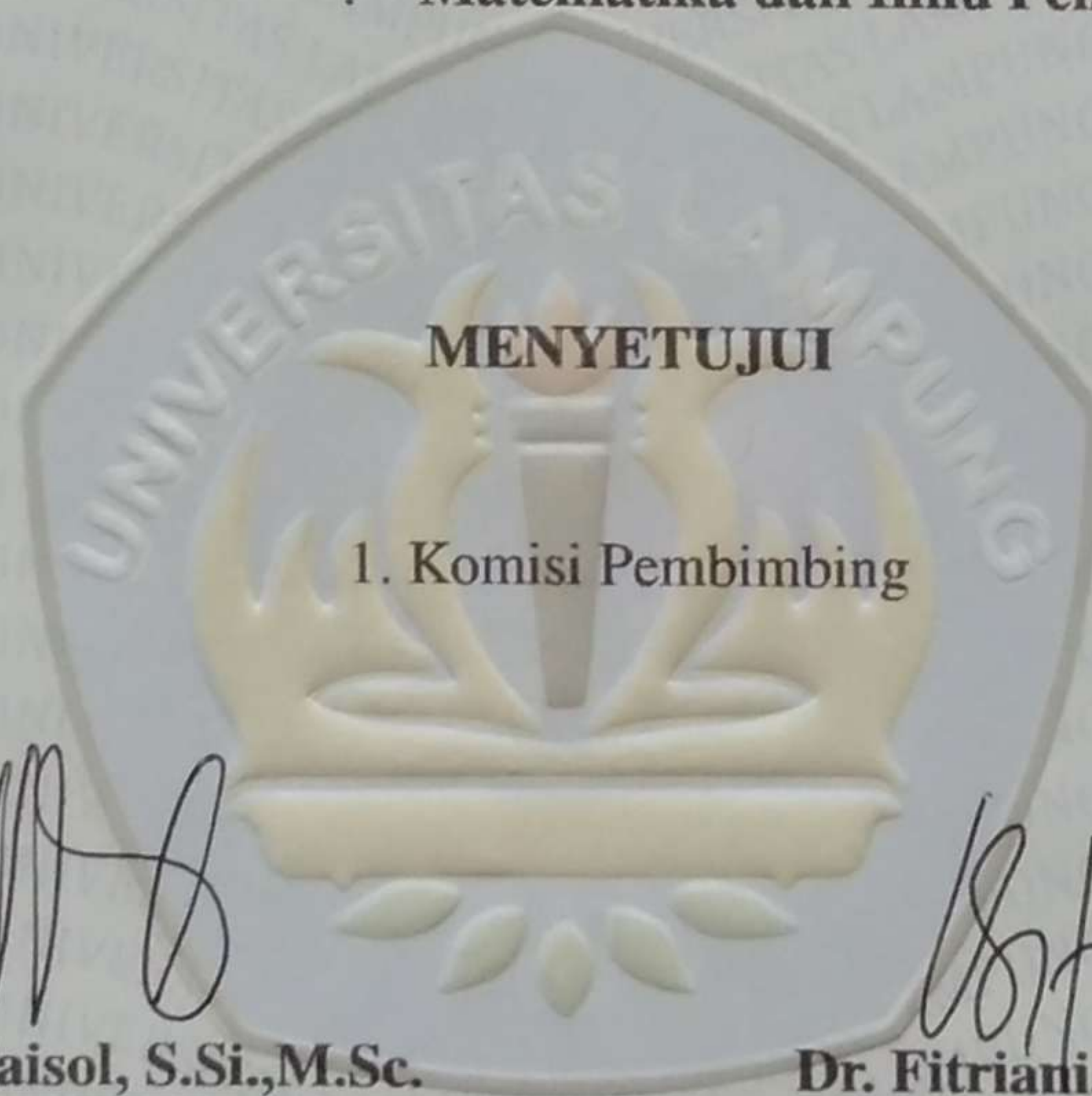
Judul : **Penentuan Invers Matriks Tridiagonal dengan Algoritma Lewis**

Nama Mahasiswa : **David Aji Saputra**

Nomor Pokok Mahasiswa : **2117031108**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**



1. Komisi Pembimbing

Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.
NIP 198002062003121003

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.
NIP 198406272006042001

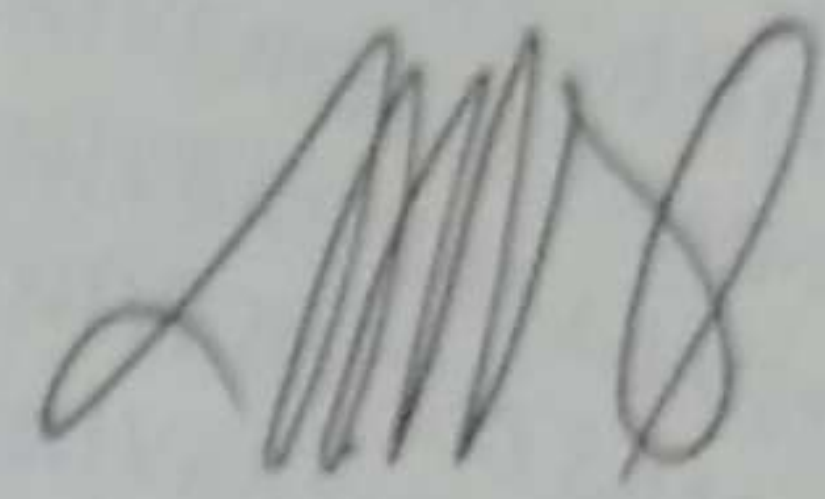
2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

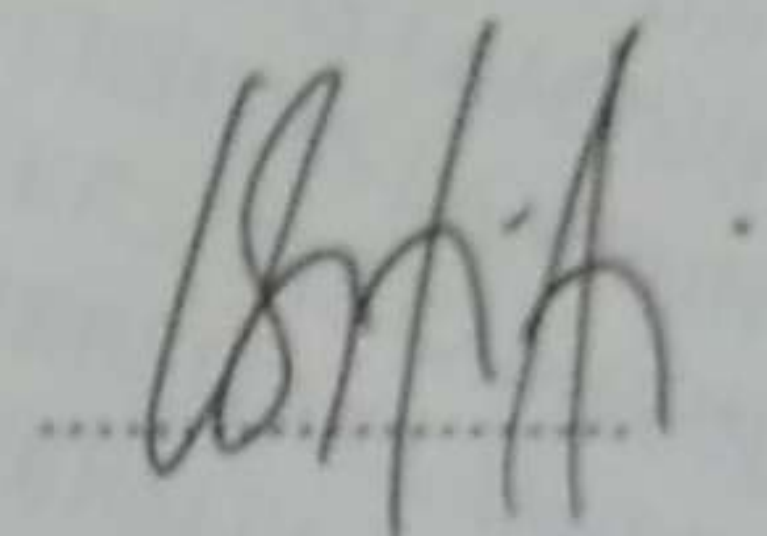
MENGESAHKAN

1. Tim penguji

Ketua : Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.

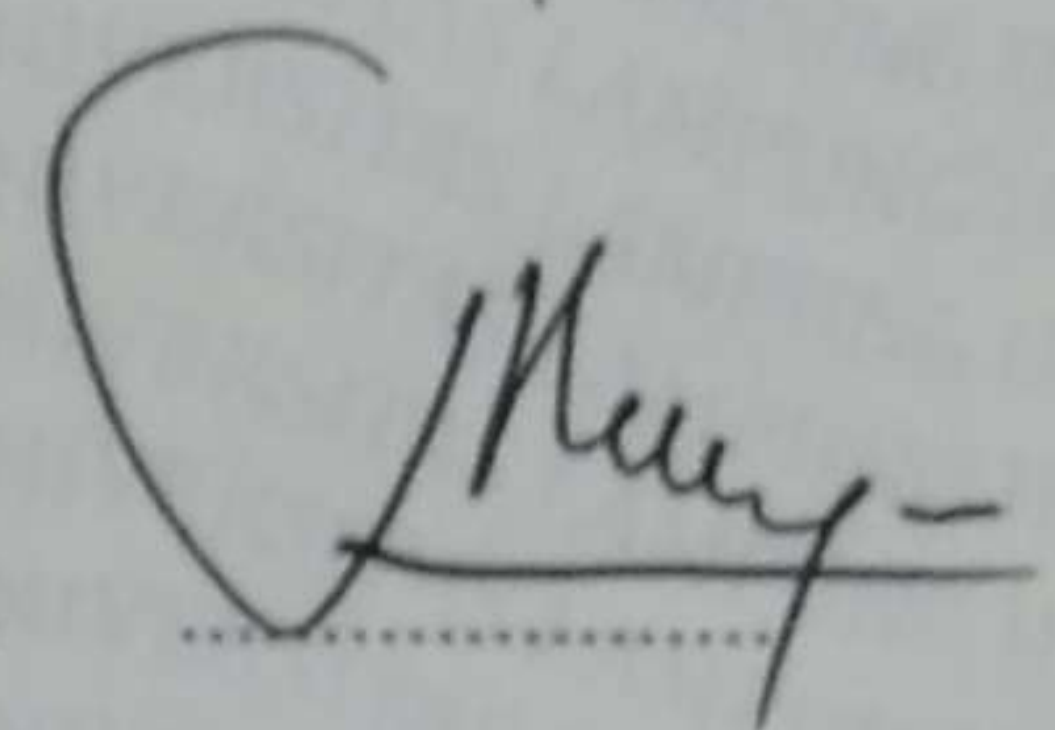


Sekretaris : Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.



Penguji

Bukan Pembimbing : Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.



2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.

NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: 26 Juni 2025

PERNYATAAN SKRIPSI

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **David Aji Saputra**
Nomor Pokok Mahasiswa : **2117031108**
Jurusan : **Matematika**
Judul Skripsi : **Penentuan Invers Matriks Tridiagonal dengan Algoritma Lewis**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 26 Juni 2025



David Aji Saputra

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap David Aji Saputra yang lahir di Seputih Mataram pada tanggal 30 Mei 2003. Penulis merupakan anak pertama dari dua bersaudara yang terlahir dari pasangan Ayah Suwanto dan Ibu Wiwin Sunarti.

Penulis menempuh awal pendidikan di SD 02 Gula Putih Mataram pada tahun 2007 sampai tahun 2009. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan sekolah menengah pertama di SMP Gula Putih Mataram pada tahun 2009 sampai tahun 2015. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan sekolah menengah atas di SMA Gula Putih Mataram pada tahun 2018 sampai tahun 2021.

Pada tahun 2021, penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung (UNILA) melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN). Penulis pernah menjadi Anggota Bidang Minat dan Bakat HIMATIKA Periode 2023.

Pada bulan Desember 2023 sampai Februari 2024, sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu kepada masyarakat, penulis melaksanakan kegiatan Kerja Praktik (KP) di Dinas Kehutanan Provinsi Lampung tepatnya di KPHK Tahura Wan Abdul Rachman (TAHURA WAR). Pada bulan Juli sampai Agustus 2024 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Sumber Rejo, Kecamatan Jabung, Kabupaten Lampung Timur.

KATA INSPIRASI

”Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya.”
(Q.S Al Baqarah: 286)

”Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan.”
(Q.S Al Insyirah: 5-6)

”Aku menyerahkan urusanku kepada Allah. Sungguh, Allah Maha Melihat akan hamba-hamba-Nya.”
(QS. Ghafir: 44)

”Jangan pernah menganggap belajar sebagai tugas, tetapi anggaplah sebagai kesempatan berharga untuk mempelajari sesuatu.”
(Albert Einstein)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucapkan Alhamdulillah dan syukur kepada Allah SWT atas nikmat serta hidayah-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan Bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Ayah dan Ibu Tercinta

Terimakasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini. Terimakasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "*Penentuan Invers Matriks Tridiagonal dengan Algoritma Lewis*" dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing 1 yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Bapak Dr. Muslim Ansori, S. Si., M.Si. selaku Pembimbing Akademik penulis.
6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang telah memberikan ilmu, wawasan dan pengetahuan yang berharga bagi penulis selama masa perkuliahan.

7. Ayah Suwanto dan Ibu Wiwin yang sangat aku sayangi dan cintai yang selalu memberikan dukungan, nasihat, dan semangat, serta mendoakan atas kelancaran selama pendidikan awal hingga selesai. Terimakasih atas pengorbanan, lelah, dan keringatnya untuk mencari rezeki agar anak-anaknya bisa mendapatkan pendidikan tinggi. Adik Alan yang selalu mendoakan, memberikan semangat dan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan perkuliahan dengan baik.
8. Teman-teman seperjuangan keluarga The King yang selalu kebersamai, memberi dukungan, berbagi canda tawa, dan selalu tau kapan waktu healing.
9. Teman-teman seperjuangan Pejuang Budi yang selalu menemani proses perkuliahan dari awal hingga menyelesaikan tugas akhir. Memberikan warna baru diperkuliahan, berbagi canda tawa, dan saling membantu satu sama lain.
10. Teman-teman seorganisasi HIMATIKA khususnya Bidang Minat dan Bakat Periode 2023 yang telah memberikan dukungan, berbagi canda tawa dan menemani penulis disaat waktu tersulit dalam berorganisasi.
11. Teman-teman Matematika 2021 yang telah memberikan kesempatan kenal satu sama lain dan berbagi keceriaan penulis selama perkuliahan.
12. Almamater tercinta Universitas Lampung.
13. Semua pihak yang telah membantu memberikan bantuan dalam menyelesaikan perkuliahan ini yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 26 Juni 2025

David Aji Saputra

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI	xii
DAFTAR TABEL	xiv
DAFTAR GAMBAR	xv
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Tujuan Penelitian	2
1.3 Manfaat Penelitian	2
II TINJAUAN PUSTAKA	3
2.1 Matriks	3
2.2 Operasi Matriks	5
2.3 Determinan Matriks	8
2.4 Invers Matriks	12
2.5 Matriks Tridiagonal	15
2.6 Algoritma Lewis	16
III METODE PENELITIAN	17
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian	17
3.2 Metode Penelitian	17
IV HASIL DAN PEMBAHASAN	19
4.1 Matriks tridiagonal dengan entri Bilangan Asli	19
4.2 Menentukan invers matriks tridiagonal menggunakan Pemrograman Python	29
4.3 Matriks tridiagonal dengan entri diagonal utama 1 dan subdiagonal berkelipatan r	41
4.4 Matriks tridiagonal dengan entri diagonal utama 1 dan subdiagonal berkelipatan $-r$	52
V KESIMPULAN DAN SARAN	64
5.1 Kesimpulan	64
5.2 Saran	64
DAFTAR PUSTAKA	65

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Salah satu cabang dari ilmu matematika adalah aljabar linear yang di dalamnya membahas tentang matriks. Matriks merupakan salah satu materi dasar untuk mempelajari ilmu matematika khususnya tentang aljabar (Rasmawati dkk, 2021). Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan, bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dari matriks, dalam matriks dikenal ukuran matriks yang disebut ordo yaitu banyaknya baris $\times$ banyaknya kolom (Anton dan Rorres, 2004). Salah satu jenis matriks yang sering ditemui adalah matriks tridiagonal.

Matriks tridiagonal adalah matriks bujursangkar yang seluruh elemen bukan 0 (nol) berada di sekitar elemen diagonal, sementara elemen lainnya bernilai 0 (nol) (Higham, 1986). Bentuk sederhana dari matriks ini memungkinkan berbagai perhitungan numerik menjadi mudah. Matriks tridiagonal banyak digunakan dalam pemodelan masalah fisis seperti pemecahan persamaan diferensial parsial, simulasi jaringan listrik, analisis struktur, serta dalam metode numerik seperti metode eliminasi Gauss dan metode iteratif (Burden dan Faires, 2011).

Permasalahan yang sering dihadapi dalam studi matriks adalah menentukan invers dari suatu matriks. Invers matriks sangat penting dalam berbagai bidang, terutama dalam ilmu matematika maupun ilmu terapan, komputasi, dan ilmu teknik (Strang, 2016). Beberapa metode yang digunakan dalam menghitung invers suatu matriks adalah metode substitusi, partisi matriks, matriks adjoin, dan eliminasi Gauss-Jordan (Marzuki dan Aryani, 2019). Proses untuk menemukan invers suatu matriks sangat dipengaruhi oleh ukuran matriks tersebut. Semakin besar ukuran matriks, semakin kompleks dan sulit proses penentuan inversnya. Oleh karena itu, diperlukan metode atau algoritma khusus untuk menghitung invers matriks.

Metode yang dapat menghitung invers matriks tridiagonal diantaranya adalah eliminasi Gaussian, Dekomposisi L-U dan metode Cholesky (Meurant, 1992). Salah satu metode lain yang dikembangkan untuk menentukan invers matriks tridiagonal adalah Algoritma Lewis. Proses dalam algoritma Lewis melibatkan langkah-langkah yang sistematis untuk menghitung elemen-elemen dari invers matriks tridiagonal dengan menggunakan hubungan antara elemen-elemen matriks tersebut. Dengan memanfaatkan sifat-sifat dari matriks tridiagonal, algoritma ini dapat mengurangi jumlah operasi yang diperlukan, sehingga mempercepat proses perhitungan. Algoritma Lewis dirancang untuk bekerja dengan baik pada matriks besar dan *sparse* (jarang terisi). Hal ini menghemat waktu dan memori karena hanya entri-entri bukan nol yang dihitung.

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan invers matriks tridiagonal dengan Algoritma Lewis secara analitik, sebagai tambahan akan dibuat algoritma komputer untuk menentukan invers matriks tridiagonal menggunakan pemrograman *Python*. Dengan memahami serta mengimplementasikan algoritma ini, diharapkan dapat memberikan solusi yang lebih cepat dan akurat untuk menyelesaikan masalah yang melibatkan matriks tridiagonal.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan invers matriks tridiagonal dengan Algoritma Lewis secara analitik. Sebagai tambahan, akan dibuat algoritma komputer untuk menentukan invers matriks tridiagonal menggunakan pemrograman *Python*.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. menambah wawasan tentang Algoritma Lewis sebagai solusi alternatif dalam menghitung invers matriks tridiagonal;
2. membantu dalam pengembangan perangkat lunak atau alat komputasi untuk penyelesaian masalah berbasis matriks tridiagonal;
3. menjadi referensi bagi mahasiswa atau peneliti lain yang ingin melanjutkan studi di bidang ini.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Matriks

Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks (Anton dan Rorres, 2004). Dengan kata lain, matriks merupakan susunan bilangan yang diatur dalam baris dan kolom, baik dalam bentuk persegi maupun persegi panjang. Bilangan-bilangan ini disebut elemen matriks dan diapit oleh tanda kurung siku atau kurung biasa. Ukuran matriks dinyatakan melalui jumlah baris dan kolom, yang dikenal sebagai ordo, dan nama matriks ditulis dengan huruf kapital. Bentuk umum dari suatu matriks dapat dilihat sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dapat dituliskan dengan $A_{m \times n}$ yaitu matriks A berukuran $m \times n$ dengan keterangan sebagai berikut:

m : banyak baris pada matriks;

n : banyak kolom pada matriks;

$m \times n$: ordo suatu matriks.

Contoh 2.1.1 Berikut diberikan beberapa contoh matriks.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}.$$

Contoh-contoh yang diberikan merupakan matriks dengan ukuran yang berbeda, yaitu matriks A berukuran 2×2 , matriks B berukuran 2×3 , matriks C berukuran 3×1 , matriks D berukuran 1×2 , serta matriks E berukuran 1×1 .

Berdasarkan pada penyusunan dari entri-entrinya, matriks dapat dibagi menjadi beberapa jenis diantaranya adalah matriks bujursangkar, matriks nol, matriks diagonal, matriks identitas, matriks segitiga, matriks simetri dan matriks skalar. Matriks bujur sangkar/persegi adalah matriks yang banyak baris dan banyak kolomnya sama (Anton dan Rorres, 2004). Dengan kata lain, matriks tersebut berordo $n \times n$. Berikut diberikan contoh matriks bujur sangkar:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Matriks nol adalah sebuah matriks yang seluruh elemen penyusunnya merupakan bilangan nol (Anton dan Rorres, 2004). Matriks nol dilambangkan dengan 0. Berikut diberikan contoh matriks nol.

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks diagonal adalah matriks bujur sangkar (jumlah baris dan kolomnya sama) dengan seluruh unsurnya bernilai 0 kecuali pada diagonal utama (diagonal dari kiri atas ke kanan bawah) (Anton dan Rorres, 2004). Berikut diberikan contoh matriks diagonal:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matriks identitas adalah bentuk khusus dari matriks diagonal, dimana seluruh unsurnya bernilai 0 kecuali pada diagonal utamanya yang semua unsurnya bernilai 1 (Anton dan Rorres, 2004). Matriks identitas juga disebut matriks satuan dan disimbolkan dengan I . Berikut diberikan contoh matriks identitas:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriks segitiga adalah matriks persegi yang semua entri di atas diagonal pertamanya adalah nol di sebut matriks segitiga bawah dan sebaliknya matriks persegi yang semua entri di bawah diagonal pertamanya adalah nol di sebut matriks segitiga atas (Anton dan Rorres, 2004). Berikut diberikan contoh matriks segitiga atas dan segitiga bawah:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Matriks simetris adalah matriks bujur sangkar dengan elemen a_{ij} sama dengan a_{ji} atau ($a_{ij} = a_{ji}$), untuk setiap i dan j (Anton dan Rorres, 2004). Pada matriks simetris berlaku sifat $A = A^T$. Berikut diberikan contoh matriks simetris:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Matriks skalar adalah matriks diagonal yang semua elemen pada diagonal utama bernilai sama, tetapi selain nol (Anton dan Rorres, 2004). Berikut diberikan contoh matriks skalar:

$$G = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

2.2 Operasi Matriks

Operasi matriks adalah serangkaian aturan yang digunakan untuk melakukan perhitungan atau manipulasi terhadap matriks. Operasi ini meliputi penjumlahan, pengurangan, perkalian, transpose, determinan, dan invers matriks (Lay, 2016). Operasi-operasi tersebut sangat berguna dalam menyelesaikan sistem persamaan linear, transformasi geometri, dan perhitungan numerik dalam berbagai bidang ilmu.

Dalam perhitungan matriks, terdapat beberapa operasi matriks diantaranya penjumlahan matriks, pengurangan matriks, perkalian matriks, dan transpose matriks. Penjumlahan matriks hanya dapat dilakukan pada matriks-matriks yang memiliki ukuran yang sama. Dua matriks dapat dijumlahkan atau dikurangkan apabila kedua matriks tersebut berukuran sama (Golub dan Loan, 2013). Setiap elemen pada baris ke- m dan kolom ke- n dijumlahkan dengan elemen yang sesuai pada matriks lainnya, yaitu pada baris ke- m dan kolom ke- n .

Contoh 2.2.1 Diberikan A dan B matriks berukuran 2×2 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}.$$

Sama halnya dengan penjumlahan matriks, pengurangan matriks juga hanya dapat dilakukan pada matriks-matriks yang memiliki ukuran yang sama. Pengurangan matriks A dengan B adalah suatu matriks yang elemen-elemennya diperoleh dengan cara mengurangkan elemen matriks A dengan elemen matriks B yang bersesuaian (seletak), atau dapat pula diartikan sebagai penjumlahan matriks A dengan lawan negatif dari B , dituliskan $A - B = A + (-B)$ (Anton dan Rorres, 2004). Proses pengurangannya serupa dengan penjumlahan, yaitu setiap elemen pada baris ke- m dan kolom ke- n dikurangkan dengan elemen yang sesuai dari matriks lainnya pada baris ke- m dan kolom ke- n .

Contoh 2.2.2 Diberikan A dan B matriks berukuran 2×2 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh:

$$B - A = \begin{bmatrix} 5-1 & 6-2 \\ 7-3 & 8-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Perkalian matriks terdiri dari dua jenis, yaitu perkalian matriks dengan skalar dan perkalian matriks dengan matriks. Pada perkalian matriks dengan skalar, jika terdapat matriks k dan matriks $A_{m \times n}$ dengan elemen a_{ij} maka kA adalah matriks yang berukuran $m \times n$ dengan elemen ka_{ij} (Anton dan Rorres, 2004). Berdasarkan definisi tersebut, jika A adalah sebarang matriks dan k adalah sebarang skalar, maka hasil kali kA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap elemen A dengan k (Rifa'i, 2016). Perkalian matriks dengan skalar ini bersifat komutatif, sehingga $kA = Ak$.

Contoh 2.2.3 Diberikan matriks A berukuran 3×2 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

dengan skalar $k = 3$, maka:

$$3A = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.1 & 3.2 \\ 3.3 & 3.4 \\ 3.5 & 3.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \\ 15 & 18 \end{bmatrix}.$$

Sementara itu, perkalian matriks hanya dapat dilakukan jika jumlah kolom pada matriks pertama sama dengan jumlah baris pada matriks kedua. Perkalian dilakukan dengan menjumlahkan hasil kali elemen baris matriks pertama dengan elemen kolom matriks kedua. Jika syarat tersebut tidak terpenuhi, maka hasil kali tidak dapat didefinisikan. Perkalian matriks dengan matriks ini tidak bersifat komutatif atau $AB \neq BA$.

Contoh 2.2.4 Diberikan matriks A dan B berukuran 2×2 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh:

$$C = AB = \begin{bmatrix} (1)(2) + (2)(1) & (1)(0) + (2)(3) \\ (3)(2) + (4)(1) & (3)(0) + (4)(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}.$$

Kemudian yang terakhir yaitu transpose matriks. Transpose matriks adalah operasi menukar baris menjadi kolom atau sebaliknya (Lay, 2016). Jika A adalah matriks berukuran $m \times n$, maka A^T (transpos A) adalah matriks berukuran $n \times m$.

Contoh 2.2.5 Diberikan matriks A berukuran 2×3 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Transpos dari A adalah:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

2.3 Determinan Matriks

Determinan adalah suatu nilai yang dapat dihitung dari elemen-elemen suatu matriks persegi. Determinan memiliki berbagai aplikasi dalam aljabar linear, termasuk untuk mengetahui apakah suatu matriks dapat dibalik (*invertible*) dan untuk memecahkan sistem persamaan linear. Determinan dari suatu matriks A berukuran $n \times n$ dapat dihitung dengan menggunakan ekspansi kofaktor atau metode reduksi, namun kedua metode tersebut sering kali memerlukan waktu komputasi yang besar, terutama untuk matriks berukuran besar (Strang, 2016). Apabila suatu matriks tidak memiliki determinan atau sama dengan 0 maka matriks tersebut tidak memiliki invers.

Berdasarkan ordo pada matriks, terdapat beberapa cara untuk mencari determinan matriks. Untuk matriks ordo 2×2 , determinan dapat dihitung dengan menggunakan cara berikut:

Diberikan matriks A sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Diperoleh:

$$\det(A) = a.d - b.c \quad (2.3.1)$$

Contoh 2.3.1 Diberikan matriks A berukuran 2×2 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan Persamaan (2.3.1), diperoleh:

$$\det(A) = 1.4 - 2.3 = -2.$$

Kemudian untuk menentukan matriks berordo 3×3 , terdapat dua cara yaitu dengan metode sarrus dan ekspansi kofaktor. Metode Sarrus, menurut Fisher, (1985), adalah cara cepat untuk menghitung determinan matriks berukuran 3×3 dalam aljabar linear. Metode ini melibatkan penyalinan dua kolom pertama matriks ke sebelah kanan matriks, kemudian menghitung hasil kali diagonal utama dan diagonal sekunder.

Diberikan matriks 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Determinan A yaitu:

$$\det(A) = (aei + bfg + cdh) - (ceg + bdi + afh). \quad (2.3.2)$$

Contoh 2.3.2 Diberikan matriks A berukuran 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan Persamaan (2.3.2), dapat dihitung sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \det(A) &= (5.2.9 + 3.4.8 + 2.6.7) - (2.2.8 + 3.6.9 + 5.4.7) \\ &= (90 + 96 + 84) - (32 + 162 + 140) \\ &= 270 - 334 \\ &= -64. \end{aligned}$$

Selain itu, untuk menghitung determinan suatu matriks dengan ordo 3×3 menggunakan metode ekspansi minor kofaktor. Minor matriks adalah determinan dari submatriks yang diperoleh dengan menghilangkan satu baris dan satu kolom tertentu dari matriks asli. Determinan dari matriks minor tersebut ditulis dengan $|M_{ij}|$. Minor digunakan dalam perhitungan determinan matriks yang lebih besar melalui metode ekspansi kofaktor. Dalam metode ini, determinan matriks dihitung dengan menjumlahkan hasil kali elemen-elemen pada suatu baris atau kolom dengan kofaktor yang sesuai. Kofaktor sendiri adalah minor yang dikalikan dengan faktor $(-1)^{i+j}$ (Fatmasari dan Nurman, 2016).

Diberikan matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Minor-minor dari matriks A adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, & M_{21} &= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, & M_{31} &= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \\ M_{12} &= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, & M_{22} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, & M_{32} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \\ M_{13} &= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, & M_{23} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, & M_{33} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Jika A adalah suatu matriks bujur sangkar, maka minor entri a_{ij} dinyatakan sebagai M_{ij} dan didefinisikan menjadi determinan submatriks yang tersisa setelah baris ke- i dan kolom ke- j dihilangkan dari A . Bilangan $(-1)^{i+j} M_{ij}$ dinyatakan sebagai C_{ij} dan disebut sebagai kofaktor dari entri a_{ij} (Anton dan Rorres, 2004). Kofaktor dan minor dari suatu elemen a_{ij} hanya berbeda dalam tandanya, yaitu $C_{ij} = \pm M_{ij}$. Cara yang lebih baik untuk menentukan tanda yang menghubungkan C_{ij} dan M_{ij} berada pada baris ke- i dan kolom ke- j dari susunan berikut:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks tanda tersebut, maka didapatkan kofaktor:

$$C_{11} = M_{11}, C_{21} = -M_{21}, C_{43} = -M_{33}, \dots, C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (2.3.3)$$

maka secara matematis determinan matriks dengan ordo $n \times n$ dapat dihitung dengan ekspansi kofaktor ditulis sebagai berikut:

$$\det(A) = \sum_{i=0}^n (-1)^{i+j} |M_{ij}| \quad \text{atau} \quad |A| = \sum_{i=0}^n a_{ij} C_{ij}. \quad (2.3.4)$$

Menurut Anton dan Rorres, determinan dari matriks $A_{n \times n}$, dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris atau kolom dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali-hasil kali yang diperoleh (Anton dan Rorres, 2004).

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj} \quad (2.3.5)$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke- j)

dan

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in} \quad (2.3.6)$$

(ekspansi kofaktor sepanjang baris ke- i).

Contoh 2.3.3 Diberikan matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}.$$

Minor-minor matriks A adalah

$$\begin{array}{lll} C_{11} = -10, & C_{12} = -22, & C_{13} = 26, \\ C_{21} = -13, & C_{22} = 29, & C_{23} = -11, \\ C_{31} = 8, & C_{32} = -8, & C_{33} = -8. \end{array}$$

Diperoleh matriks kofaktor dari A sebagai berikut:

$$C = \begin{bmatrix} -10 & -22 & 26 \\ -13 & 29 & -11 \\ 8 & -8 & -8 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan Persamaan (2.3.5) untuk nilai determinan matriks A menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama dari A diperoleh:

$$\det(A) = 5(-10) + (-3)(22) + 2(26) = -64.$$

2.4 Invers Matriks

Invers matriks adalah konsep fundamental dalam aljabar linear yang berkaitan dengan matriks bujur sangkar (Lay, 2016). Simbol dari invers matriks adalah pangkat -1 di atas hurufnya. Contoh matriks B adalah invers suatu matriks A ditulis $B = A^{-1}$ dan matriks A adalah invers dari matriks B ditulis $A = B^{-1}$. Secara umum, invers dari matriks A adalah matriks lain, disebut A^{-1} , yang memenuhi persamaan $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, dengan I adalah matriks identitas.

Tidak semua matriks memiliki invers. Syarat utama agar matriks A memiliki invers adalah determinannya tidak sama dengan nol ($\det(A) \neq 0$). Matriks dengan determinan nol disebut matriks singular dan tidak memiliki invers, sedangkan matriks dengan determinan bukan nol disebut matriks nonsingular dan memiliki invers (Strang, 2016).

Perhitungan invers matriks bergantung pada ordo matriks tersebut. Untuk matriks berordo 2×2 , yang berbentuk:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Invers dari A yaitu:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (2.4.7)$$

dengan $ad - bc$ adalah determinan dari matriks A . Invers hanya ada jika determinan tidak sama dengan nol.

Contoh 2.4.1 Diberikan matriks A berukuran 2×2 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Dalam Contoh 2.3.1, nilai determinan matriks A dapat ditulis dengan $\det(A) = -2$, karena $\det(A) \neq 0$, matriks A memiliki invers. Kemudian gunakan Persamaan (2.4.7), didapat:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya untuk matriks 3×3 , invers dapat dihitung menggunakan metode adjoin atau transformasi baris elementer. Jika A adalah matriks bujur sangkar, dan jika sebuah matriks yang berukuran sama bisa didapatkan sedemikian sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut bisa dibalik dan B disebut invers dari A (Anton dan Rorres, 2004).

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A). \quad (2.4.8)$$

Menurut Aryani dan Coracon, jika A adalah matriks $n \times n$ sebarang dan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij} , maka matriks

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut matriks kofaktor dari A . Transpos dari matriks ini disebut adjoin dari A dan dinyatakan sebagai $\text{adj}(A)$ (Aryani dan Coracon, 2016).

Contoh 2.4.2 Diberikan matriks A berukuran 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}.$$

Dalam Contoh 2.3.2, nilai determinan dari matriks A adalah $\det(A) = -64$. Kemudian untuk mendapatkan invers matriks A maka perlu mencari adjoin matriks A . Untuk mendapatkan adjoin matriks A perlu didapatkan kofaktornya karena menurut Aryani dan Coracon, 2016 adjoin matriks A didapat dengan mentransposkan kofaktor matriks A . Dalam Contoh 2.3.3 diperoleh matriks kofaktor, sehingga:

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -10 & -13 & 8 \\ -22 & 29 & -8 \\ 26 & -11 & -8 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan Persamaan (2.4.8), diperoleh invers matriks A sebagai berikut:

$$A^{-1} = \frac{1}{-64} \begin{bmatrix} -10 & -13 & 8 \\ -22 & 29 & -8 \\ 26 & -11 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/64 & 13/64 & -8/64 \\ 22/64 & -29/64 & 8/64 \\ -26/64 & 11/64 & 8/64 \end{bmatrix}.$$

Sebagai tambahan akan dijelaskan secara singkat mengenai sifat-sifat invers matriks. Sifat-sifat invers matriks mencakup beberapa hal penting. Pertama, invers matriks bersifat unik, artinya jika B dan C adalah invers dari matriks A , maka $B = C$. Kedua, hasil kali beberapa matriks yang dapat dibalik juga dapat dibalik, dengan rumus $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, jika A dan B dapat dibalik. Ketiga, matriks yang memiliki invers memenuhi sifat identitas, yaitu $AA^{-1} = I$, dan $A^{-1}A = I$, dengan I adalah matriks identitas. Terakhir, matriks memiliki invers jika dan hanya jika determinannya tidak sama dengan nol.

2.5 Matriks Tridiagonal

Matriks tridiagonal adalah matriks bujursangkar yang memiliki elemen tidak nol hanya pada diagonal utama, subdiagonal, dan superdiagonal. Matriks ini sering digunakan dalam berbagai aplikasi matematika, fisika, dan teknik, terutama dalam penyelesaian sistem persamaan linear, perhitungan nilai eigen, dan pemodelan proses fisik (Anton dan Rorres, 2004). Struktur umum dari matriks tridiagonal dapat dijelaskan sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix},$$

dengan:

a_i adalah elemen pada diagonal utama,

b_i adalah elemen pada superdiagonal,

c_i adalah elemen pada subdiagonal.

Matriks tridiagonal memiliki beberapa sifat penting yang membuatnya efisien dan sering digunakan dalam berbagai aplikasi. Matriks ini hanya memiliki elemen non-nol pada tiga diagonalnya (diagonal utama, superdiagonal, dan subdiagonal), sehingga mengurangi penggunaan memori dan waktu komputasi. Selain itu, matriks tridiagonal cenderung memiliki stabilitas numerik yang baik, menjadikannya cocok untuk metode numerik seperti metode elemen hingga. Determinan dan invers matriks tridiagonal juga dapat dihitung dengan lebih efisien menggunakan metode rekursif atau algoritma khusus.

Contoh 2.5.1 Berikut diberikan contoh matriks tridiagonal berukuran 4×4 :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Pada matriks ini, diagonal utama adalah 4, 5, 6, dan 7, superdiagonal adalah 1, 1, 1, dan subdiagonal adalah 2, 3, dan 4.

2.6 Algoritma Lewis

Algoritma Lewis adalah metode yang digunakan dalam penyelesaian sistem persamaan linier matriks tridiagonal dengan matriks yang memiliki elemen-elemen non-nol hanya pada diagonal utama, diagonal atas, dan diagonal bawah. Algoritma lewis lebih berfokus pada peningkatan sifat numerik dari algoritma rekursif yang digunakan untuk membalikkan (invers) matriks tridiagonal. Untuk meningkatkan sifat numerik dari algoritma rekursif untuk membalikkan matriks tridiagonal, harus disertakan ketergantungan yang diketahui antara elemen-elemen di segitiga atas matriks invers X dan elemen-elemen di segitiga bawah (Keller dan Wrobel, 2015).

Teorema 2.6.1 Diberikan matriks tridiagonal nonsingular A yang memenuhi $a_{k-1,k} \neq 0$ dan $a_{k,k-1} \neq 0$ untuk $2 \leq k \leq n$ dengan $n \geq 3$. Didefinisikan $\{\hat{z}_k\}, \{z_k\}, \{e_k\}$ sebagai berikut:

$$\hat{z}_n = 1, \quad \hat{z}_{n-1} = -\frac{a_{n,n}}{a_{n-1,n}}, \quad \hat{z}_{k-1} = -\frac{a_{k,k}}{a_{k-1,k}}\hat{z}_k - \frac{a_{k+1,k}}{a_{k-1,k}}\hat{z}_{k+1} \quad (n > k > 1),$$

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -\frac{a_{1,1}}{a_{2,1}}, \quad z_{k+1} = -\frac{a_{k,k}}{a_{k+1,k}}z_k - \frac{a_{k-1,k}}{a_{k+1,k}}z_{k-1} \quad (1 < k < n),$$

$$e_1 = 1, \quad e_{k+1} = \frac{a_{k+1,k}}{a_{k,k+1}}e_k \quad (1 < k < n).$$

maka, $X = A^{-1}$ memenuhi:

$$x_{1n} = \frac{1}{(a_{11}\hat{z}_1 + a_{21}\hat{z}_2)},$$

$$x_{sk} = (e_s z_s x_{1n})\hat{z}_k \quad (s \leq k), \quad x_{sk} = (e_s \hat{z}_s x_{1n})z_k \quad (s > k), \quad (1 \leq k \leq n). \text{ (Lewis, 1982)}$$

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil tahun ajaran 2024/2025 bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamat di Jalan Prof. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung. .

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan studi literatur yang diperoleh dengan mengumpulkan dan mengolah informasi yang relevan dari berbagai sumber, seperti buku, jurnal, dan artikel yang berkaitan dengan topik penelitian baik dari dalam negeri ataupun luar negeri yang menunjang pada penelitian yang dilakukan.

Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam menyelesaikan masalah dalam penelitian ini antara lain:

1. Diberikan matriks tridiagonal A berukuran $n \times n$ sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & a_{k-1,k} \\ 0 & 0 & 0 & a_{k,k-1} & a_{kk} \end{bmatrix}$$

dengan $a_{k-1,k} \neq 0$ dan $a_{k,k-1} \neq 0$ untuk $2 \leq k \leq n$.

2. Hitung $\hat{z}_k$.

$$\hat{z}_n = 1, \quad \hat{z}_{n-1} = -\frac{a_{n,n}}{a_{n-1,n}}, \quad \hat{z}_{k-1} = -\frac{a_{k,k}}{a_{k-1,k}}\hat{z}_k - \frac{a_{k+1,k}}{a_{k-1,k}}\hat{z}_{k+1} \quad (n > k > 1).$$

3. Hitung z_k .

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -\frac{a_{1,1}}{a_{2,1}}, \quad z_{k+1} = -\frac{a_{k,k}}{a_{k+1,k}}z_k - \frac{a_{k-1,k}}{a_{k+1,k}}z_{k-1} \quad (1 < k < n).$$

4. Hitung e_k .

$$e_1 = 1, \quad e_{k+1} = \frac{a_{k+1,k}}{a_{k,k+1}}e_k \quad (1 < k < n).$$

5. Setelah nilai dari $\{\hat{z}_k\}, \{z_k\}, \{e_k\}$ diperoleh . Cari A^{-1} menggunakan cara berikut:

$$x_{1n} = \frac{1}{(a_{11}\hat{z}_1 + a_{21}\hat{z}_2)}$$

dan

$$x_{sk} = (e_s z_s x_{1n})\hat{z}_k \quad (s \leq k), \quad (1 \leq k \leq n), \text{ (Untuk matriks diatas subdiagonal),}$$

$$x_{sk} = (e_s \hat{z}_s x_{1n})z_k \quad (s > k), \quad (1 \leq k \leq n), \text{ (Untuk matriks dibawah diagonal utama).}$$

6. Diperoleh $A^{-1} = [x_{sk}]$.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan maka diperoleh kesimpulan matriks tridiagonal memiliki struktur unik yang memungkinkan penghitungan inversnya secara sistematis. Salah satu struktur uniknya adalah matriks tridiagonal dengan diagonal utama 1 dan subdiagonal berkelipatan r dan $-r$ dari superdiagonal, dengan $r \neq 0$. Kedua invers matriks ini memiliki pola antara lain, untuk yang berkelipatan r entri $x_{ji} = rx_{ij}$ dengan $x_{ji} \neq 0$ atau $x_{21} = rx_{12}, x_{32} = rx_{23}, x_{43} = rx_{34}$, dan $x_{54} = rx_{45}$, dan untuk yang berkelipatan $-r$ entri $x_{21} = -rx_{12}, x_{32} = -rx_{23}, x_{43} = -rx_{34}$, dan $x_{54} = -rx_{45}$. Penelitian ini berhasil menentukan invers matriks tridiagonal dengan menggunakan pendekatan sistematis dengan algoritma Lewis. Hal ini menunjukkan efektifitas dan fleksibilitas algoritma yang digunakan.

5.2 Saran

Penulis memberikan saran untuk penelitian selanjutnya, pembaca dapat mengembangkan algoritma yang lebih efisien dalam menentukan invers matriks tridiagonal, khususnya untuk matriks berukuran besar.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H., & Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer*. Edisi ke delapan. Jakarta: Erlangga.
- Aryani, F., & Corazon, C.M. 2016. Inverse of Tridiagonal Toeplitz Matrix By Adjoint Method. *Proceeding IcoSTechS*, Pekanbaru.
- Fatmasari, S., & Nurman, T. A. 2016. Bentuk Umum Determinan Matriks Toeplitz Tridiagonal. *Jurnal MSA (Matematika dan Statistika serta Aplikasinya)*, 4(1), 33-39.
- Burden, R. L., & Faires, J. D. 2011. *Numerical Analysis*. Cengage Learning.
- Fisher, G. 1985. *Analytische Geometrie Edisi keempat*. Wiesbaden : Vieweg.
- Golub, G. H., & Van Loan, C. F. 2013. *Matrix computations, 4th*. Johns Hopkins: University Press.
- Higham, N. J. 1986. Efficient algorithms for computing the condition number of a tridiagonal matrix. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 7(1), 150-165.
- Keller, P., & Wróbel, I. 2015. On recursive algorithms for inverting tridiagonal matrices. *arXiv preprint arXiv:1509.09264*.
- Lay, D. C. 2016. *Linear Algebra and Its Applications*. Pearson Education.
- Lewis, J. G. 1982. Algorithm for the Inversion of a Tridiagonal Matrix. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 30(2), 247-253.

- Meurant, G. 1992. A review on the inverse of symmetric tridiagonal and block tridiagonal matrices. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 13(3), 707-728.
- Marzuki, C. C., & Aryani, F. 2019. Invers Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Menggunakan Metode Adjoin. *Jurnal sains matematika dan statistika*, 5(1), 1-10.
- Rasmawati, R., Yahya, L., Nuha, A. R., & Resmawan, R. 2021. Determinan Suatu Matriks Toeplitz K-Tridiagonal Menggunakan Metode Reduksi Baris dan Ekspansi Kofakor. *Euler: Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi*, 9(1), 6-16.
- Rifa'i, R. 2016. *Aljabar Matriks Dasar*. Yogyakarta : Deepublish.
- Strang, G. 2016. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press.