

**PENENTUAN INVERS MATRIKS k -TRIDIAGONAL MENGGUNAKAN
ALGORITMA DEKOMPOSISI DOOLITTLE**

Skripsi

Oleh

**NANDA DWI SAPUTRA
NPM. 2117031067**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2025

ABSTRACT

DETERMINING THE INVERSE OF k -TRIDIAGONAL MATRIX USING DOOLITTLE DECOMPOSITION ALGORITHM

By

Nanda Dwi Saputra

This research discusses the determination of the inverse of a k -tridiagonal matrix using the Doolittle decomposition algorithm. A k -tridiagonal matrix is a generalization of a tridiagonal matrix with non-zero entries only on the main diagonal and k diagonals above and below it. An analytical approach is applied using LU decomposition via the Doolittle method to factor the matrix A into a lower triangular matrix L and an upper triangular matrix U . The inverse of matrix A is then computed by solving the linear system equations in two stages using forward and backward substitution. Additionally, a numerical algorithm based on Python programming is developed to facilitate the computation of the inverse of a k -tridiagonal matrix. The results show that the Doolittle method is effective in systematically and structurally determining the inverse of k -tridiagonal matrices.

Keywords: k -tridiagonal matrix, Doolittle decomposition, matrix inverse, LU decomposition, Python.

ABSTRAK

PENENTUAN INVERS MATRIKS k -TRIDIAGONAL MENGGUNAKAN ALGORITMA DEKOMPOSISI DOOLITTLE

Oleh

Nanda Dwi Saputra

Penelitian ini membahas penentuan invers dari matriks k -tridiagonal menggunakan algoritma dekomposisi Doolittle. Matriks k -tridiagonal merupakan generalisasi dari matriks tridiagonal yang memiliki elemen tidak nol hanya pada diagonal utama serta k diagonal di atas dan di bawahnya. Dalam penelitian ini, digunakan pendekatan analitik melalui dekomposisi LU dengan metode Doolittle untuk membagi matriks A menjadi matriks segitiga bawah L dan matriks segitiga atas U . Invers dari matriks A kemudian diperoleh dengan menyelesaikan sistem persamaan linear dua tahap menggunakan substitusi maju dan substitusi mundur. Selain itu, disusun algoritma numerik berbasis Python untuk mempermudah proses komputasi invers matriks k -tridiagonal. Hasil penelitian menunjukkan bahwa metode Doolittle efektif digunakan dalam menentukan invers matriks k -tridiagonal secara sistematis dan terstruktur.

Kata-kata kunci: matriks k -tridiagonal, dekomposisi Doolittle, invers matriks, dekomposisi LU, Python.

**PENENTUAN INVERS Matriks k -TRIDIAGONAL MENGGUNAKAN
ALGORITMA DEKOMPOSISI DOOLITTLE**

NANDA DWI SAPUTRA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2025

Judul Skripsi : **PENENTUAN INVERS MATRIKS
 k -TRIDIAGONAL MENGGUNAKAN
ALGORITMA DEKOMPOSISI
DOOLITTLE**

Nama Mahasiswa : **Nanda Dwi Saputra**

Nomor Pokok Mahasiswa : **2117031067**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan
Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing



Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.
NIP. 198002062003121003



Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.
NIP. 198406272006042001

2. Ketua Jurusan Matematika

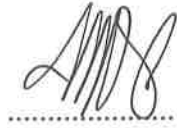


Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**



Sekretaris : **Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**



Penguji

Bukan Pembimbing : **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.**



2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.

NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Skripsi: **21 Juli 2025**

PERNYATAAN SKRIPSI

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **Nanda Dwi Saputra**
Nomor Pokok Mahasiswa : **2117031067**
Jurusan : **Matematika**
Judul Skripsi : **Penentuan Invers Matriks k -tridiagonal
Menggunakan Algoritma Dekomposisi
Doolittle**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 21 Juli 2025

Penulis,



Nanda Dwi Saputra

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Nanda Dwi Saputra yang lahir di Margo Mulyo pada tanggal 08 April 2003. Penulis merupakan anak kedua dari dua bersaudara yang terlahir dari pasangan Teguh dan Rusmiati.

Penulis menempuh awal pendidikan di SDN 03 Terbanggi Besar pada tahun 2009 sampai tahun 2015. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan sekolah menengah pertama di SMPN 1 Terbanggi Besar pada tahun 2015 sampai tahun 2018. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan sekolah menengah atas di SMAN 1 Terbanggi Besar pada tahun 2018 sampai tahun 2021.

Pada tahun 2021, penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa S1 di Jurusan Matematika Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung (UNILA) melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN). Selama menjadi mahasiswa, penulis juga aktif dalam organisasi. Pada tahun 2022, penulis menjadi anggota Bidang Kaderisasi dan Kepemimpinan Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA).

Pada bulan Desember 2023 sampai Februari 2024, sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu kepada masyarakat, penulis melaksanakan kegiatan Kerja Praktik (KP) di Dinas Tenaga Kerja Provinsi Lampung. Pada bulan Juli sampai Agustus 2024 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di desa Braja Harjosari, Kecamatan Braja Slebah, Kabupaten Lampung Timur.

KATA INSPIRASI

”Tidak semua perjuangan harus dilihat, tidak semua luka harus diceritakan. Ada perjalanan yang disimpan rapat dalam diam, cukup hati dan Tuhan yang tahu seberapa keras diri ini berjuang”

(Nanda Dwi S)

”Even when the world feels heavy and the path uncertain, remember: Allah only says 'Be', and it is. What seems impossible to you is effortless for Him”

(QS. Yasin (36): 82)

”In the middle of difficulty lies opportunity”

(Albert Einstein)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucapkan syukur dan Alhamdulillah kepada Allah SWT. atas nikmat serta hidayah-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan Bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Ayah, Ibu, dan Kakakku Tercinta

Terimakasih kepada Bapak dan mamak atas segala pengorbanan, nasihat, doa serta dukungannya selama ini. Terimakasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang harus ditempuh secara mandiri, dan menjalani hidup dengan kuat sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi orang lain.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat berjasa dalam membantu, memberikan motivasi dan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasi, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta Universitas Lampung

Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT. atas limpahan berkat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Penentuan Invers Matriks k -tridiagonal menggunakan Algoritma Dekomposisi Doolittle" dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Sholawat serta salam, semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing I yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung sekaligus Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.
4. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Bapak, Mak, Mas Feri, Mba Ulan dan keluarga besar yang selalu memotivasi, memberikan dukungan, dan doa kepada penulis.
6. Teman-teman Angkatan 2021 yang telah membantu saya selama di perkuliahan.

7. Teman-teman dari Grup Pejuang Budi dan Keluarga Kontrakan yaitu Ridho, Jumi, David, Zainal, Jonathan, Miranda, Rena, Awik, dan Ilham yang selalu memberikan kebersamaan atas setiap momen yang kita lalui bersama. Kehadiran kalian di tengah perjalanan ini selalu memberikan semangat dan kehangatan, baik dalam suka maupun duka. Semoga persahabatan kita selalu terjaga, dan kebahagiaan selalu menyertai setiap langkah kalian semua.
8. Teman-teman satu komunitas Ojek-ku dan Bude warung Syafa'at yang telah kebersamai penulis dalam lingkup kerja selama perkuliahan. Terima kasih atas kebersamaan, dukungan, dan semangat yang tak henti-hentinya diberikan.
9. Untuk teman sekelas Mabar (Mahasiswa Aljabar) yang sudah menjadi bagian dari perjalanan ini, terima kasih telah menjadi teman yang luar biasa. Setiap diskusi, kerja kelompok, dan tawa bersama telah memberi warna tersendiri dalam perjalanan ini. Semoga kita semua terus berkembang dan mencapai tujuan masing-masing.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 21 Juli 2025

Nanda Dwi Saputra

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI	iii
DAFTAR TABEL	v
DAFTAR GAMBAR	vi
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Tujuan Penelitian	3
1.3 Manfaat Penelitian	3
II TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Matriks	4
2.2 Operasi Matriks	5
2.3 Determinan	9
2.4 Invers Matriks	12
2.5 Dekomposisi Matriks	13
2.5.1 Dekomposisi Matriks Menggunakan Algoritma Doolittle	14
2.6 Matriks k -tridiagonal	16
III METODE PENELITIAN	18
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian	18
3.2 Metode Penelitian	18
IV HASIL DAN PEMBAHASAN	20
4.1 Algoritma Dekomposisi Doolittle pada Matriks	20
4.2 Algoritma Dekomposisi Doolittle pada Matriks k -tridiagonal	21
4.3 Penentuan Invers Matriks k -tridiagonal Menggunakan Pemograman <i>Python</i>	33
4.4 Matriks k -tridiagonal dengan Entri Diagonal Utama 1 dan Subdiagonal Berkelipatan r	41
4.5 Matriks k -tridiagonal dengan Entri Diagonal Utama 1 dan Subdiagonal Berkelipatan $-r$	53
V KESIMPULAN DAN SARAN	66
5.1 Kesimpulan	66
5.2 Saran	66

DAFTAR PUSTAKA	67
-----------------------	-----------

DAFTAR TABEL

4.1	Penentuan invers matriks dengan pemrograman Python	40
-----	--	----

DAFTAR GAMBAR

4.1	<i>Syntax</i> membuktikan syarat dekomposisi Doolittle	34
4.2	<i>Syntax</i> mencari matriks L dan matriks U	35
4.3	<i>Syntax</i> substitusi maju	36
4.4	<i>Syntax</i> substitusi mundur	37
4.5	<i>Syntax</i> menggabungkan matriks kolom $\hat{x}_i$ menjadi matriks utuh $\hat{X}$.	38
4.6	<i>Syntax</i> perkalian matriks A dengan A^{-1}	40

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matriks adalah salah satu alat dalam matematika terapan dan komputasi numerik, khususnya dalam penyelesaian sistem persamaan linear. Matriks jenis khusus, seperti matriks k -tridiagonal, sering muncul dalam berbagai aplikasi teknik dan ilmiah (Jia dan Li, 2015). Matriks ini memiliki struktur yang khas, dengan entri tidak nol hanya berada pada diagonal utama, serta k -diagonal atas dan bawah (Burden dan Faires, 2010). Salah satu permasalahan yang penting dalam studi matriks adalah bagaimana menghitung invers dari matriks tersebut.

Untuk menghitung invers dari matriks k -tridiagonal, salah satu metodenya adalah dekomposisi Doolittle. Dalam pendekatan Doolittle, matriks A didekomposisi menjadi dua matriks segitiga, yaitu matriks segitiga bawah (L) dengan entri diagonal utamanya bernilai 1, dan matriks segitiga atas (U) (Golub dan Loan, 1996). Metode ini memungkinkan untuk memecah perhitungan invers menjadi langkah-langkah yang lebih sederhana, terutama untuk matriks besar yang dapat muncul dalam berbagai aplikasi teknik dan ilmiah (El-Mikkawy dan Atlan, 2014).

Penelitian mengenai invers matriks tridiagonal beberapakali telah dilakukan. Misalnya, penelitian yang berjudul *Inversion of a tridiagonal Jacobi matrix*, berhasil mengembangkan ekspresi eksak untuk invers matriks tridiagonal menggunakan pendekatan rekursif, tetapi pendekatan tersebut kurang fleksibel untuk komputasi skala besar (Usmani, 1994). Sementara itu, penelitian lain yang berjudul *The LU factorizations and determinants of the k-tridiagonal matrices*, Penelitian ini membahas faktorisasi LU (*Lower–Upper Decomposition*) dan perhitungan determinan dari matriks k -tridiagonal (Yalçiner, 2011). Penelitian berjudul *A Novel Algorithm for Inverting a General k-Tridiagonal Matrix* menyajikan pendekatan yang

eksak dan stabil untuk menghitung invers dari matriks k -tridiagonal nonsingular dengan memanfaatkan metode rekursif berbasis dekomposisi LU (El-Mikkawy dan Atlan, 2014).

Sebagai generalisasi dari matriks tridiagonal, matriks k -tridiagonal sering muncul dalam berbagai bidang dan telah menarik banyak perhatian dalam beberapa tahun terakhir (Jia dan Li, 2015). Penelitian ini bertujuan untuk menentukan invers dari matriks k -tridiagonal menggunakan dekomposisi Doolittle. Sebagai tambahan, akan disusun suatu algoritma komputer untuk menentukan invers matriks k -tridiagonal dengan menggunakan pemograman *Python*.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. menentukan invers matriks k -tridiagonal dengan metode Doolittle secara analitik;
2. menyusun suatu algoritma untuk menentukan invers matriks k -tridiagonal secara numerik dengan menggunakan bahasa pemograman *Python*.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. membantu memahami cara menghitung invers matriks k -tridiagonal menggunakan metode Doolittle secara lebih jelas;
2. hasil penelitian ini dapat menjadi tambahan pengetahuan dalam bidang matematika, khususnya tentang matriks dan metode untuk menyelesaikannya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini membahas tentang definisi-definisi dasar yang berperan sebagai teori pendukung dalam penyelesaian penelitian ini.

2.1 Matriks

Matriks merupakan susunan bilangan dalam bentuk persegi panjang, dan setiap bilangan yang berada dalam susunan tersebut disebut entri matriks. Ukuran atau dimensi matriks ditentukan berdasarkan banyaknya baris dan kolom yang menyusunnya (Anton dan Rorres, 2000).

Definisi 2.1.1 Matriks berukuran $m \times n$ adalah kumpulan bilangan yang disusun dalam bentuk persegi panjang dengan m baris dan n kolom, yang dapat dinyatakan sebagai berikut (Eves, 1968):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Matriks A memiliki m baris yang masing-masing merupakan deret horizontal dari skalar-skalar yaitu:

$$[a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1n}], [a_{21} \ a_{22} \ \cdots \ a_{2n}], \dots, [a_{m1} \ a_{m2} \ \cdots \ a_{mn}].$$

Sementara itu, kolom-kolom dari matriks A terdiri dari n deret vertikal sebagai

berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Setiap entri a_{ij} disebut sebagai entri ke- i, j dari matriks A , yaitu entri yang terletak pada baris ke- i dan kolom ke- j . Secara umum, dapat ditulis dalam bentuk $A = [a_{ij}]$.

2.2 Operasi Matriks

Setelah memahami definisi matriks sebagai susunan bilangan dalam baris dan kolom yang berbentuk persegi panjang, langkah berikutnya adalah mempelajari operasi-operasi dasar matriks. Operasi ini, seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian dan transpos matriks.

Definisi 2.2.1 Diberikan matriks $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$, yang masing-masing berukuran $m \times n$. Jumlah dari matriks A dan B adalah matriks $C = [c_{ij}]$, dengan $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. begitu pula berlaku untuk pengurangan matriks (Wijayanti dkk., 2018).

Secara sederhana, definisi tersebut dapat dituliskan sebagai:

$$C = A + B = [a_{ij} + b_{ij}].$$

$$C = A - B = [a_{ij} - b_{ij}].$$

Contoh 2.2.1 Diberikan matriks A dan B sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -8 & -1 \\ 9 & 3 & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Jumlah $(A + B)$ dan selisih $(A - B)$ dari kedua matriks tersebut adalah

$$\begin{aligned}
 C &= A + B \\
 &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & -4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 7 & -8 & -1 \\ 9 & 3 & 2 & -5 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2+4 & -1+7 & 3+(-8) & 6+(-1) \\ 4+9 & 6+3 & -4+2 & 0+(-5) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 6 & 6 & -5 & 5 \\ 13 & 9 & -2 & -5 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C &= A - B \\
 &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & -4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 7 & -8 & -1 \\ 9 & 3 & 2 & -5 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2-4 & -1-7 & 3-(-8) & 6-(-1) \\ 4-9 & 6-3 & -4-2 & 0-(-5) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -2 & -8 & 11 & 7 \\ -5 & 3 & -6 & 5 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, akan dibahas operasi perkalian skalar dengan matriks. Dalam operasi operasi ini, setiap entri dalam matriks dikalikan dengan bilangan skalar tertentu.

Definisi 2.2.2 Diberikan sebarang matriks $A = [a_{ij}]$ yang berukuran $m \times n$ dan skalar c , maka hasil kali cA adalah matriks baru yang terbentuk dari perkalian setiap entri pada matriks A dengan bilangan c . Matriks cA disebut sebagai kelipatan skalar dari A (Kolman dan Beck, 2015).

Dalam notasi matriks, jika $A = [a_{ij}]$, maka:

$$(cA)_{ij} = c(A)_{ij} = ca_{ij}.$$

Contoh 2.2.2 Diberikan $c = 2$ dan matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh:

$$2A = 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 10 \\ 6 & 4 & 16 \end{bmatrix}.$$

Selain dapat dikalikan dengan skalar, matriks juga bisa dikalikan dengan matriks lain. Proses perkalian ini dilakukan dengan cara menjumlahkan hasil perkalian antara entri-entri pada baris dari matriks pertama dengan entri-entri pada kolom dari matriks kedua.

Definisi 2.2.3 Diberikan matriks $A = [a_{ij}]$ dengan ukuran $m \times n$ dan matriks $B = [b_{jk}]$ dengan ukuran $n \times p$. Hasil perkalian matriks A dan B adalah matriks C berukuran $m \times p$ dengan komponen-komponen (Wijayanti dkk., 2018):

$$\begin{aligned} c_{ij} &= b_i(A) \cdot k_j(B) \\ &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \\ &= \sum_{t=1}^n a_{it}b_{tj}, \end{aligned}$$

dengan $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, p$.

Definisi ini menunjukkan bahwa dua matriks dapat dikalikan jika jumlah kolom pada matriks pertama sama dengan jumlah baris pada matriks kedua. Matriks hasil perkalian, yaitu C , akan memiliki ukuran $m \times p$, dengan setiap entri c_{ij} diperoleh dengan menjumlahkan hasil perkalian entri-entri pada baris ke- i dari matriks pertama dengan entri-entri pada kolom ke- j dari matriks kedua.

Contoh 2.2.3 Diberikan matriks A dengan ukuran 2×3 dan matriks B dengan ukuran 3×4 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -8 \\ 4 & 5 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, akan dihitung hasil perkalian antara baris-baris dari matriks A dan kolom-kolom dari matriks B . Sebagai contoh, vektor baris ke-2 dari matriks A , yaitu $b_2(A)$ dengan vektor kolom ke-3 dari matriks B , yaitu $k_3(B)$. Hasil perkalian ini akan menjadi entri pada baris ke-2 dan kolom ke-3 dari matriks C . Perhitungan dilakukan sebagai berikut:

Entri c_{23} dari matriks hasil perkalian dihitung sebagai berikut:

$$\begin{aligned} c_{23} &= \begin{bmatrix} 5 & -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= (5 \cdot 1) + ((-6) \cdot (-2)) + (2 \cdot (-1)) \\ &= 5 + 12 + (-2) \\ &= 15. \end{aligned}$$

Proses ini dilakukan untuk setiap vektor baris dari matriks A dan setiap vektor kolom dari matriks B , sehingga diperoleh seluruh entri dari matriks hasil perkalian sebagai berikut:

$$C = \begin{bmatrix} -24 & 34 & -8 & -33 \\ -18 & -15 & 15 & 0 \end{bmatrix}.$$

Operasi terakhir yang akan dibahas yaitu transpos matriks, operasi ini dilakukan dengan cara menukar posisi dari baris matriks menjadi kolom matriks.

Definisi 2.2.4 Jika A adalah matriks berukuran $m \times n$, maka transpos dari A , yang dilambangkan dengan A^T , adalah matriks yang diperoleh dengan menukar baris-baris dan kolom-kolom dari A . Dalam hal ini, kolom pertama dari A^T merupakan hasil dari baris pertama A , kolom kedua dari A^T berasal dari baris kedua A , dan seterusnya (Anton dan Rorres, 2000).

Contoh 2.2.4 Diberikan matriks A berukuran 2×2 dan B adalah matriks berukuran 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Transpos dari matriks A dan B dilambangkan dengan A^T dan B^T adalah sebagai berikut:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

2.3 Determinan

Sebelum membahas konsep determinan matriks, penting untuk memahami bahwa determinan adalah salah satu nilai penting yang dapat dihitung dari matriks persegi. Nilai ini memberikan informasi tentang sifat matriks, seperti apakah matriks memiliki invers atau tidak dan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear (Strang, 2016). Matriks yang memiliki determinan bernilai nol, berarti matriks tersebut tidak memiliki invers.

Definisi 2.3.1 Determinan dari matriks berordo ke- n , misalkan $A = [a_{ij}]$, dilambangkan dengan $|A|$, didefinisikan sebagai bilangan yang dihitung dari jumlah berikut, melibatkan $n!$ entri matriks:

$$\det(A) = |A| = \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

dengan $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ adalah jumlah permutasi n bilangan asli yang pertama. Setiap entri diberikan tanda $+$ jika permutasi dari $\{1, 2, \dots, n\}$ adalah genap, dan tanda $-$ jika permutasi tersebut ganjil (Hadley, 1992).

Contoh 2.3.1 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Perkalian entri yang diperoleh dari matriks A adalah ad dan bc , sedangkan permutasi dari (ad) yaitu $(1,2)$ yang bernilai genap $(+)$, dan (bc) yaitu $(2,1)$ yang bernilai ganjil $(-)$. Sehingga, nilai determinan dari A dapat ditulis dengan $\det(A) = (ad) - (bc)$.

Setiap matriks bujursangkar memiliki skalar yang disebut dengan determinan, dilambangkan dengan $\det(A)$ atau $|A|$, atau:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Berdasarkan ordo matriks, terdapat beberapa cara untuk mencari determinan matriks. Sebagai contoh, akan ditampilkan mencari determinan matriks A berukuran $n \times n$ dengan cara aturan sarrus dan ekspansi minor-kofaktor. Metode Sarrus pada

prinsipnya memanfaatkan konsep inversi permutasi dan mengikuti bentuk umum sebagaimana dijelaskan dalam Definisi 2.3.1. Namun, metode ini hanya dapat digunakan untuk menghitung determinan matriks berorde paling tinggi 3.

Diberikan matriks A berukuran 2×2 dan B berukuran 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Diperoleh:

$$\det(A) = (a.b) - (b.c). \quad (2.3.1)$$

$$\det(B) = ((a.e.i) + (b.f.g) + (c.d.h)) - ((c.e.g) + (a.f.h) + (b.d.i)). \quad (2.3.2)$$

Contoh 2.3.2 Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan aturan sarrus diperoleh:

$$\det(A) = (5)(-2) - (-3)(2) = -10 + 6 = -4.$$

$$\det(C) = (45 + 84 + 96) - (105 + 48 + 72) = 240.$$

Selanjutnya akan dibahas mengenai metode ekspansi minor-kofaktor.

Definisi 2.3.2 Jika A merupakan matriks bujur sangkar, maka minor dari entri a_{ij} , yang dilambangkan dengan M_{ij} , adalah determinan dari submatriks yang diperoleh dengan menghapus baris ke- i dan kolom ke- j dari matriks A . Nilai $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ disebut sebagai C_{ij} , yaitu kofaktor dari entri a_{ij} (Anton dan Rorres, 2000).

Contoh 2.3.3 Diberikan matriks A adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Minor M_{ij} diperoleh dengan menghilangkan baris ke- i dan kolom ke- j dari matriks A sebagai berikut:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, & M_{12} &= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, & M_{13} &= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \\ M_{21} &= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, & M_{22} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, & M_{23} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \\ M_{31} &= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, & M_{32} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, & M_{33} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Kofaktor A_{ij} didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot M_{11}, & A_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot M_{12}, & A_{13} &= (-1)^{1+3} \cdot M_{13} \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot M_{21}, & A_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot M_{22}, & A_{23} &= (-1)^{2+3} \cdot M_{23} \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \cdot M_{31}, & A_{32} &= (-1)^{3+2} \cdot M_{32}, & A_{33} &= (-1)^{3+3} \cdot M_{33} \end{aligned}$$

Dari ekspansi tersebut dapat disusun matriks C yaitu matriks dengan entri-entrinya merupakan hasil dari ekspansi minor-kofaktor A_{ij}

$$C = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} & A_{13} \\ -A_{21} & A_{22} & -A_{23} \\ A_{31} & -A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Menghitung determinan dengan ekspansi kofaktor bisa dilakukan dengan 2 cara yaitu ekspansi kofaktor sepanjang baris ke- i dan ekspansi sepanjang kolom ke- j pada matriks C .

Diketahui matriks A berukuran $n \times n$ sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Untuk menghitung ekspansi kofaktor sepanjang baris ke- i adalah sebagai berikut:

$$\det(A) = a_{i1}.C_{i1} + a_{i2}.C_{i2} + \cdots + a_{in}.C_{in}, \quad (2.3.3)$$

Untuk menghitung ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke- j adalah sebagai berikut:

$$\det(A) = a_{1j} \cdot C_{1j} + a_{2j} \cdot C_{2j} + \cdots + a_{nj} \cdot C_{nj}. \quad (2.3.4)$$

dengan $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$.

Contoh 2.3.4 Diberikan

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Kofaktor-kofaktor dari A adalah

$$\begin{aligned} C_{11} &= -4, & C_{12} &= 11, & C_{13} &= 12. \\ C_{21} &= 2, & C_{22} &= -6, & C_{23} &= -7. \\ C_{31} &= 3, & C_{32} &= -9, & C_{33} &= -10. \end{aligned}$$

Jadi, matriks kofaktornya adalah

$$\begin{bmatrix} -4 & 11 & 12 \\ 2 & -6 & -7 \\ 3 & -9 & -10 \end{bmatrix}.$$

sesuai dengan Persamaan (2.3.4) nilai determinan dari matriks A menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama dari A adalah

$$\det(A) = 3(-4) + (-2(2)) + 5(3) = -1.$$

Setelah mendapatkan matriks C , akan dicari nilai adjoin dari matriks tersebut.

Definisi 2.3.3 Jika A adalah sebarang matriks $n \times n$ dan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij} , maka matriks

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}.$$

disebut matriks kofaktor dari A . Transpos dari matriks ini disebut adjoin dari A (Anton dan Rorres, 2000).

Contoh 2.3.5 Berdasarkan matriks kofaktor C didalam Contoh 2.3.4, maka adjoin matriks dari A adalah

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 11 & -6 & -9 \\ 12 & -7 & -10 \end{bmatrix}.$$

Adjoin matriks dapat digunakan untuk menentukan invers dari suatu matriks.

2.4 Invers Matriks

Setelah memahami konsep determinan dan adjoin matriks, untuk selanjutnya akan melangkah ke pembahasan invers matriks. Invers suatu matriks jika dikalikan dengan dirinya sendiri akan menghasilkan matriks identitas.

Definisi 2.4.1 Jika A adalah matriks berukuran $m \times n$, dan jika terdapat matriks B berukuran $m \times n$ sedemikian sehingga:

$$AB = BA = I,$$

dengan I adalah matriks identitas berukuran $m \times n$, maka matriks A disebut *non-singular* atau *invertibel*, dan B merupakan invers dari A , atau A merupakan invers dari B (Pudjiastuti, 2006).

Sebaliknya, jika matriks A tidak memiliki invers, maka A disebut matriks *singular* atau *non-invertibel*.

Setelah mengenal definisi dari adjoin, suatu matriks dapat dicari invers matriks dengan cara sebagai berikut. Jika B adalah matriks yang memiliki invers, maka

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \text{adj}(B). \quad (2.4.5)$$

Selain dengan menggunakan adjoinnya, invers matriks juga bisa dicari dengan menggunakan dekomposisi matriks.

2.5 Dekomposisi Matriks

Tahap berikutnya setelah mempelajari invers matriks adalah memahami dekomposisi matriks, yaitu proses membagi matriks menjadi beberapa komponen dengan sifat tertentu. Proses ini memiliki peran signifikan dalam aljabar linear karena membantu menyederhanakan perhitungan, menyelesaikan sistem persamaan linear, serta mengungkap struktur matriks secara mendalam.

Definisi 2.5.1 Dekomposisi matriks merupakan metode dekomposisi atau faktorisasi matriks persegi menjadi matriks segitiga bawah dan matriks segitiga atas. Dengan kata lain, bisa didapatkan persamaan

$$A = LU.$$

dengan A merupakan matriks persegi, L merupakan matriks segitiga bawah, dan U merupakan matriks segitiga atas (Golub dan Loan, 1996).

Terdapat beberapa algoritma dekomposisi matriks, yaitu algoritma Doolittle dan algoritma Crout. Selanjutnya, akan ditampilkan penjelasan terkait algoritma dekomposisi Doolittle.

2.5.1 Dekomposisi Matriks Menggunakan Algoritma Doolittle

Metode Doolittle merupakan teknik dekomposisi matriks yang bertujuan membentuk matriks segitiga bawah L dengan entri diagonal utama bernilai 1, sedangkan entri-entri lainnya di luar diagonal dapat bernilai bebas (Ruminta, 2009).

Suatu matriks yang akan didekomposisi menggunakan metode Doolittle memiliki syarat yaitu sebagai berikut:

1. matriksnya harus berbentuk persegi, yaitu memiliki jumlah baris dan kolom yang sama ($n \times n$);
2. matriksnya harus merupakan jenis matriks yang *non-singular* yaitu determinan dari matriks tidak boleh sama dengan nol;
3. semua *leading principal minor* dari matriks tidak boleh sama dengan nol.

Definisi 2.5.2 Jika terdapat suatu matriks berukuran $n \times n$, maka *leading principal minor* ke- k (dengan $k \leq n$) adalah suatu submatriks berukuran $k \times k$ yang diperoleh dengan menghapus $(n - k)$ baris dan kolom yang bersesuaian dari matriks tersebut (Horn dan Johnson, 2012).

Diberikan matriks A berukuran $n \times n$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Diperoleh *leading principal minor* dari matriks tersebut adalah:

- a. minor orde 1: $|a_{11}|$.
- b. minor orde 2: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.
- c. minor orde 3: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.
- $\vdots$
- d. minor orde $n = \det(A)$.

Setelah matriks diketahui memenuhi syarat dari dekomposisi Doolittle, Selanjutnya akan dioperasikan metode dekomposisi Doolittle sebagai berikut:

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

Entri-entri matriks L dan U dapat dicari dengan cara berikut:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \quad (2.5.6)$$

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}}{u_{ii}}, \quad (2.5.7)$$

untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$, dan $j = i + 1, i + 2, \dots, n$.

Dari hasil dekomposisi, penyelesaian persamaan linear matriks A untuk menghitung suatu invers dari matriks dapat dihitung dengan menggunakan persamaan sebagai berikut:

Misalkan X adalah invers dari matriks A , dari definisi invers matriks, maka diperoleh

$$AX = I.$$

Dengan kata lain,

$$LUX = I \quad \text{atau} \quad UX = L^{-1}. \quad (2.5.8)$$

Langkah pertama untuk menyelesaikan persamaan adalah dengan menghitung L^{-1} menggunakan substitusi maju,

$$LUX = I. \quad (\text{Misalkan } UX = Y \text{ dan } I = B) \quad (2.5.9)$$

sehingga diperoleh,

$$LY = B. \quad (2.5.10)$$

dengan:

Y = matriks kolom pada L^{-1} ;

B = matriks kolom pada I .

Pemecahan Persamaan (2.5.10) sebagai berikut:

$$LY = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Dari Persamaan (2.5.10) diperoleh nilai Y sebagai berikut:

$$y_1 = b_1, \quad y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} \cdot y_j, \quad \text{untuk } i = 2, 3, \dots, n. \quad (2.5.11)$$

Setelah mendapatkan nilai Y , dengan permisalan yang sebelumnya akan dicari nilai X dengan substitusi mundur

$$UX = Y. \quad (2.5.12)$$

Pemecahan Persamaan (2.5.12) sebagai berikut :

$$UX = Y \Rightarrow \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Dari Persamaan (2.5.12) diperoleh nilai X sebagai berikut:

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} \cdot x_j}{u_{ii}}, \quad (2.5.13)$$

untuk $i = n - 1, n - 2, \dots, 1$ (Ruminta, 2009).

2.6 Matriks k -tridiagonal

Setelah mempelajari berbagai operasi dan sifat matriks, kini saatnya memperkenalkan konsep matriks khusus, yaitu matriks k -tridiagonal.

Definisi 2.6.1 Matriks k -tridiagonal adalah generalisasi dari matriks tridiagonal berukuran $n \times n$ yang memiliki struktur khas dengan entri-entri yang tidak nol hanya berada pada diagonal utama dan k diagonal di atas serta di bawahnya (Burden dan Faires, 2010).

Secara umum, matriks k -tridiagonal $T_n^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, n$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$T_n^{(k)} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 & \cdots & \ddots & a_{n-k} \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & b_{n-k} & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix},$$

dengan,

$$1 \leq k < n \quad \text{dan} \quad a_{ij}, b_{ij}, d_{ij} \neq 0.$$

Parameter k menyatakan skalar yang menentukan letak entri tidak nol dari matriks k -tridiagonal.

Contoh 2.5.1 Berikut diberikan contoh matriks k -tridiagonal

$$T_3^{(1)} = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{bmatrix}, \quad T_4^{(2)} = \begin{bmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{bmatrix}, \quad T_5^{(3)} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2024/2025 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamat di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Metode yang digunakan adalah studi literatur, yang diperoleh dari mengumpulkan dan mengolah bahan penelitian berdasarkan referensi terkait seperti jurnal, buku, dan artikel yang berkaitan dengan penelitian ini serta mengkaji definisi dan teorema yang berhubungan dengan permasalahan penelitian ini.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini sebagai berikut:

1. Diberikan matriks k -tridiagonal $T_n^{(k)}$ berukuran $n \times n$.

$$T_n^{(k)} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 & \cdots & \ddots & a_{n-k} \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & b_{n-k} & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix}.$$

2. Membuktikan syarat matriks untuk dioperasikan menggunakan metode Doolittle.

Pada langkah ini akan menggunakan Definisi (2.5.2) akan dibuktikan kelayakan matriks A untuk dioperasikan menggunakan metode dekomposisi Doolittle.

3. Faktorisasi LU menggunakan metode Doolittle.

Pada langkah ini menggunakan Persamaan (2.5.6) dan (2.5.7) matriks $T_n^{(k)}$ didekomposisi menjadi matriks segitiga bawah L dan matriks segitiga atas U sehingga diperoleh:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix}, \text{ dan } U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

4. Penyelesaian Sistem Linear $LY = B$ dan $UX = Y$.

Pada langkah menggunakan Persamaan (2.5.11) dan (2.5.13) matriks identitas I dipartisi menjadi kolom-kolom $b_1, b_2, \dots, b_n$. Untuk setiap kolom b_i , selesaikan sistem:

$L \cdot Y = B$ menggunakan substitusi maju:

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} \cdot y_j.$$

$U \cdot X = Y$ menggunakan substitusi mundur:

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} \cdot x_j}{u_{ii}}.$$

5. Susun matriks X setelah memperoleh hasil setiap kolom $x_1, x_2, \dots, x_n$ dengan

$$X = (T_n^{(k)})^{-1}.$$

$$X = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_2 \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} x_n \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis serta pembahasan yang telah dilakukan, diperoleh kesimpulan bahwa matriks k -tridiagonal merupakan matriks yang unik karena memiliki sifat khas yaitu banyak elemen yang bernilai nol yang memungkinkan untuk mempermudah perhitungan nilai determinan dan invers secara sistematis. Penelitian ini berhasil menentukan invers matriks k -tridiagonal dengan menggunakan metode dekomposisi Doolittle yang mempunyai syarat khusus agar suatu matriks bisa didekomposisi, perhitungan ini juga melibatkan fungsi persamaan linear substitusi maju dan substitusi mundur. Dari penelitian ini diperoleh bahwa matriks k -tridiagonal yang berorde 6×6 dengan $k = 3$ yang mempunyai entri diagonal utamanya 1 dan subdiagonalnya berkelipatan r dari superdiagonalnya akan memiliki invers matriks dengan entri diagonal utamanya $(\frac{1}{1-ra^2})$ dan entri $x_{41} = rx_{14}, x_{52} = rx_{25}, x_{63} = rx_{36}$. Selanjutnya matriks k -tridiagonal yang berorde 6×6 dengan $k = 3$ yang mempunyai entri diagonal utamanya 1 dan subdiagonalnya berkelipatan $-r$ dari superdiagonalnya akan memiliki invers matriks dengan entri diagonal utamanya $(\frac{1}{1+ra^2})$ dan entri $x_{41} = -rx_{14}, x_{52} = -rx_{25}, x_{63} = -rx_{36}$. Selain itu, penelitian ini juga berhasil menentukan invers matriks k -tridiagonal menggunakan pemrograman *Python*.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian ini, disarankan agar penelitian lanjutan dilakukan untuk mengeksplorasi penerapan algoritma dekomposisi Doolittle pada jenis matriks lainnya, serta mengkaji metode alternatif dalam menentukan invers dari matriks k -tridiagonal.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H., & Rorres, C. 2000. *Elementary Linear Algebra*. New York : No Starch Press.

Pudjiastuti. 2006. *Matriks Teori dan Aplikasi*. Yogyakarta : Graha Ilmu.

Burden, R.L., & Faires, J.D. 2010. *Numerical Analysis*. Boston : Brooks/Cole Cengage Learning.

El-Mikkawy, M., & Atlan, F. 2014. A novel algorithm for inverting a general k-tridiagonal matrix. *Applied Mathematics Letters*, 32, 41-47.

Eves, H. 1968. *Elementary Matrix Theory*. Boston: Allyn and Bacon, Inc.

Golub, G. H., & Van Loan, Charles F. 1996. *Matrix Computations*. United States of America: The Johns Hopkins University Press.

Hadley, G. 1992. *Aljabar Linier*, Edisi revisi. Jakarta: Erlangga.

Horn, R. A., & Johnson, C. R. 2012. *Matrix analysis*. Cambridge university press.

Jia, J., & Li, S. 2015. Symbolic algorithms for the inverses of general k-tridiagonal matrices. *Computers & Mathematics with Applications*, 70(12), 3032-3042.

Kolman, B., & Beck, R. E. (1995). *Elementary linear programming with applications*. Gulf Professional Publishing.

Ruminta, D. 2009. *Matriks, persamaan linier dan pemrograman linier*. Bandung: Rekayasa Sains.

Strang, G. 2016. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press.

Usmani, R. A. 1994. Inversion of a tridiagonal Jacobi matrix. *Linear Algebra and its Applications*, 212(213), 413-414.

Wijayanti, I. E., Wahyuni, S., & Susanti, Y. 2018. *Dasar-Dasar Aljabar Linear dan Penggunaannya dalam Berbagai Bidang*. UGM PRESS.

Yalçiner, A. 2011. The LU factorizations and determinants of the k-tridiagonal matrices. *Asian-European Journal of Mathematics*, 4(01), 187-197.